Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 15, No. 2, Dec., 1989

商習慣에 의한 在庫金利를 고려한 基本싸이클 스케쥴링 方式의 生産計劃

朴 承 憲*

A Study on the Basic Cyclic Scheduling Problem

S.H. Park

Abstract

This paper deals with a single-facility multiproduction model concerning the basic cyclic scheduling.

The aim is to obtain the production order of each product in a cycle and the cycle frequency for minimizing the setup costs and inventory carrying costs of all products.

The problem is formulated by LP and it shows that the optimal solution derived dominates the solution of non-cyclic scheduling model on some conditions.

1. 序　　論

생산계획에 있어서 經濟的 分割生產(lot size)을 구하는 문제는 대부분이 在庫維持費와 準備費(set-up cost)의 비용합계를 최소로 하는 것이 목적이다. 또한 定式化에 있어서 "재고유지비는 平均 在庫量에 比例"한다는 것을 전제로 數式展開를 하는 것이 보편적이다. 그러나 이 전제가 성립되기 위해서는 재고유지비의 중요한 要素인 在庫金利도 재고의 時間과 數量에 관해 比例的이어야 한다. 즉, 생산을 위한 資材는 購入 즉시 代金을 지불하여 그 시점으로부터 在庫金利가 발생하는 것으로 간주되는 것이다. 그러나 재고금리에 관해서는 이미 指摘(5)된 바와 같이 "1개월을 단위로 하여 總購入費를 지정된 날에 一括的으로 마감 계산하여 그후 一定 期日이 지난후에 一括的으로 支拂"하는 商習慣을 가진 한국, 일본 등에서는 재고금리가 평균 재고량에 반드시 비례하는 것은 아니다[1].

* 仁荷大學校 工科大學 產業工學科

1) 上記의 商習慣은 모든 경우를 의미하는 것은 아니며, 資材購入 거래처와 每月의 一括計算 마감일이 존재하는 경우를 의미한다.

이와같은 경우 재고금리는 오히려 指定된 마감 계산일을 전후하여 離散的으로 변화한다.

본 연구는 상기의 商習慣下에서 발생하는 현실이 現金流入(cash flow)으로부터 직접적으로 재고금리를 평가한 경우의 分割生産 問題를 基本 싸이클 스케쥴링(basic cyclic sheduling) 방식을 대상으로 하여 검토하겠다[2].

2. 模型의 槪要, 前提, 定式化

2.1. 模型의 槪要 前提

本 硏究는 하나의 製造 라인에서 多品種을 分割生産(lot size)하는 模型을 다루며, 그때의 生産方式은 상기의 기본 싸이클 스케쥴링 방식을 취하나, 각 싸이클의 로트 사이즈는 싸이클마다 變動하는 可變(variable) lot size 방식이다. 이때 생산을 위한 원재료 및 부품은 모두 외부로부터 구입하는 것으로 한다. 또한 특정달의 初期在庫(그 특정달의 需要量을 조달하기 위해 月初에 보유하고 있는 在庫量, 이후에는 先行 生産量이라 부른다)에 부담되는 金利만을 在庫金利 變動分으로 취급하여 相異한 生産方式의 變動費를 비교분석을 한다.

이는 需要總量이 一定한 條件下에서 어떠한 生産方式을 취해도 購入材料費의 總額 및 賣上總額이 不變이기 때문에 위와 같은 費用 계산으로 충분하다. 前提條件과 記號는 다음과 같다.

(1) 製造工程은 一段階 工程으로 한다.

(2) 3製品 A, B, C를 單一 製造라인에서 分割生産한다[3].

(3) 각 제품의 每月(1개월 T 時間)의 需要量 R_A, R_B, R_C는 주어진 것으로 하며, 1개월간에 각각 一定 速度 $r_A=R_A/T$, $r_B=R_B/T$, $r_c=R_c/T$로 連續的으로 발생한다.

(4) 品切은 인정하지 않는다.

(5) 각 제품의 生産時間은 주어진 것으로 하고, 尺度를 통일하기 위해 각 제품의 單位時間當 生産量을 제품 1개로 한다.

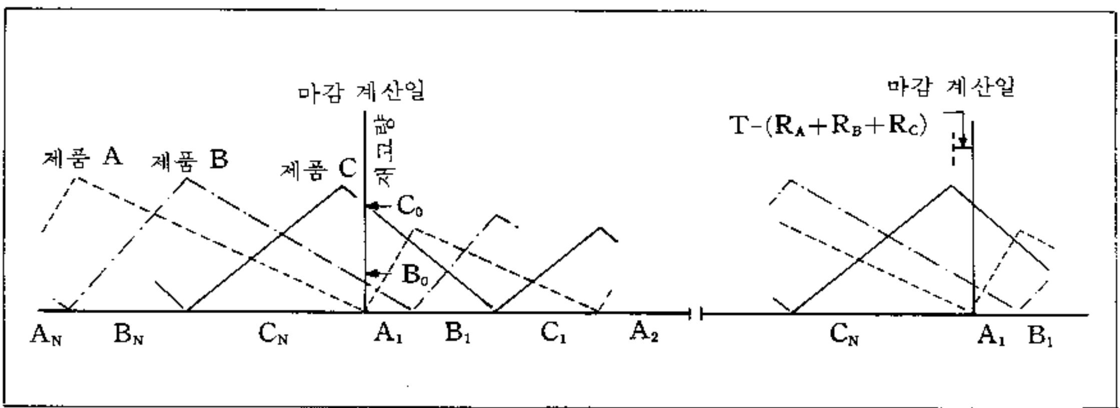

그림 1. 再考量 變動

2) 롯트 생산방식에서 製造 싸이클이 A B C A B C와 같이 이루어질 때, 1循環 흐름중에서 各 製品이 1製造 싸이클마다 포함되어 있을 때를 基本循環(basic cycle)이라 한다.

3) 본 연구에서 전개하는 議論은 m 종류($m \geq 4$)의 경우에도 확장 가능하나 설명이 대단히 복잡해지기 때문에 3製品에 限定하였다.

(6) 각 제품의 1개당 準備(Set-up) 時間, t_A, t_B, t_C는 주어진 것으로 하며, 準備 費用은 固定費 M과 單位時間當 變動費 S로 이루어져 있다.

(7) 在庫의 保管費 總額은 一定하다.

(8) 제품의 생산방식은 基本 싸이클 스케쥴 方式을 취하며, 편의상 제품의 生産順序는 A → B → C로 표현한다.

(9) 매월의 購入 資材費는 月末에 마감하여 일정 기일후에 一括的으로 支拂한다.

2.2. 定式化

이미 설명한 바와 같이 商習慣에 주목하여 어떤 月의 마감 계산일로부터 翌月의 마감계산일까지를 1個月(T)로 하며, 매월마다 동일 형태의 製造 싸이클(예 : A → b → C 등)을 반복하는 生産計劃을 고찰한다. 따라서 任意의 생산계획은 任意의 月에 관한 月次元의 生産計劃(이후 月次 生産計劃이라 부른다)으로 표현할 수 있다(그림 1 참조).

더우기 본 연구에서는 月次 生産計劃으로서 基本 싸이클 스케쥴 방식에 각 싸이클은 可變 Lot size 방식을 취하며, 當月內에 싸이클 횟수를 N 回 실행하는 生産計劃을 고찰의 대상으로 限定한다.

任意의 月次 生産計劃을 다음의 3(N+1) 次元 非陰 벡터 $X^T=(A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \cdots, A_N, B_N, C_N)$으로 나타낸다(그림 1 참조).

여기선는 A_0는 제품 A의 先行 生産量이며, $A_i(i=1, 2, \cdots, N)$는 제 i 싸이클에서 제품 A의 生産量이다(제품 B, C에 관해서도 同一).

單一 라인에서 多品種의 分割生産을 계획하고 있는 점과 前提(3), (4)로부터 $B_0>0$, $C_0>0$ 이어야만 한다. 한편 任意의 月次 生産計劃을 매월 반복하는 점과 전제 (3)으로부터 각 제품의 當月內 生産量은 先行 生産의 數量에 관계없이 需要總量과 같아야만 한다. 즉, **X**는

$$\sum_{i=1}^{N} A_i = R_A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

를 만족한다(제품 B, C에 관해서도 同一). 또한 예를 들어 $B_i(i=1, 2, \cdots, N)$의 生産開始 時點에 있어서 제품 B가 品切이 되지 않기 위해서는

$$1/r_B \sum_{j=0}^{i-1} B_j \geq \sum_{j=1}^{i}(A_j+t_B)+\sum_{j=1}^{i-1}\{(B_j+t_C)+(C_j+t_A)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

이어야만 한다(제품 A, C에 관해서도 同一). 식(2)의 좌변은 제품 B의 旣生産分 在庫가 0이 될때 까지의 시간, 우변은 전제 (5)로부터 月初부터 측정하여 B_i의 생산에 착수할 때까지의 最短時間이다. 생산계획 **X**의 實行可能 條件은 이상이나 以後에는 식(1)을(제품 B, C에 관해서

$$1/r_A \sum_{i=1}^{N} A_i \geq T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)'$$

도 同一)와 같이 不等號化 하여 보다 넓은 實行可能域을 고찰하기로 한다. 여기서 표 1의 行列 **A**를 사용하여 **X**의 실행가능 조건을 정리하면

$$\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

이 된다. 여기서 **b**는 $\mathbf{b}^T=(0, t_B, t_B+t_C, \cdots, N(t_A+t_B+t_C), T, T, T)$로 주어지는 3(N+1) 次元 定數 벡터이다.

다음으로 목적함수이나 어떤 실행 가능한 **X**도 當月內에 한번도 品切을 일으키지 않고, 각 제품의 수요를 만족시키기 때문에 收入의 現金流入(Cash flow)은 **X**의 選擇方法에 대해서 不變이다. 따라서 목적함수는 費用의 正味變動分만을 最小化 하면 된다.

전제 (7)로부터 保管費는 제외시킬수 있기 때문에 變動的 費用은

$$q(p_A A_0+p_B B_0+p_C C_0)+N\{3N+S(t_A+t_B+t_C)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

표 1. 行列 A

A_0	B_0	C_0	A_1	B_1	C_1	A_1	B_2	C_2	…	A_{N-1}	B_{N-1}	C_{N-1}	A_N	B_N	C_N
$\frac{1}{\gamma_A}$	0	0	0												
0	$\frac{1}{\gamma_B}$	0	-1	0					…						
0	0	$\frac{1}{\gamma_C}$	-1	-1	0										
$\frac{1}{\gamma_A}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_A}-1$	-1	-1										
0	$\frac{1}{\gamma_B}$	0	-1	$\frac{1}{\gamma_B}-1$	-1	-1			…						
0	0	$\frac{1}{\gamma_C}$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_C}-1$	-1	-1								
	⋮			⋮			⋮		…						
$\frac{1}{\gamma_A}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_A}-1$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_A}-1$	-1	-1							
0	$\frac{1}{\gamma_B}$	0	-1	$\frac{1}{\gamma_B}-1$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_B}-1$	-1	…	-1					
0	0	$\frac{1}{\gamma_C}$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_C}-1$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_C}-1$		-1	-1				
$\frac{1}{\gamma_A}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_A}-1$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_A}-1$	-1	-1		$\frac{1}{\gamma_A}-1$	-1	-1			
0	$\frac{1}{\gamma_B}$	0	-1	$\frac{1}{\gamma_B}-1$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_B}-1$	-1	…	-1	$\frac{1}{\gamma_B}-1$	-1	-1		
0	0	$\frac{1}{\gamma_C}$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_C}-1$	-1	-1	$\frac{1}{\gamma_C}-1$		-1	-1	$\frac{1}{\gamma_C}-1$	-1	-1	
0	0	0	$\frac{1}{\gamma_A}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_A}$	0	0		$\frac{1}{\gamma_A}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_A}$	0	0
0	0	0	0	$\frac{1}{\gamma_B}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_B}$	0	…	0	$\frac{1}{\gamma_B}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_B}$	0
0	0	0	0	0	$\frac{1}{\gamma_C}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_C}$		0	0	$\frac{1}{\gamma_C}$	0	0	$\frac{1}{\gamma_C}$

가 된다. 여기서 q는 1개월의 利子率, p_A, p_B, p_C는 각 제품 1단위당 購入資材代金 等의 변동비이다.

싸이클 횟수 N과 生產順序(예로서 A → B → C)를 임의로 고정했을 경우, 식(3)下에서 식(4)를 最小로 하는 생산계획 **X**를 구하는 문제는 標準型의 線型計劃(以下 단순하게 LP라 한다)이다. 이상과 같은 定式化 下에서 다음과 같은 문제를 검토한다.

(1) 싸이클 횟수 N과 생산순서 6가지(A →

B → C, B → C → A 等)중 하나를 任意로 고정시켜 이 LP를 풀면 基本 싸이클 方式이 LP의 最適解가 되는가?

(2) 6가지 基本 싸이클 方式中 가장 유리한 생산순서의 선택방법에 관해 어떤 規則性이 존재하는가?

(3) N을 任意로 고정했을 경우 6가지중 가장 유리한 基本 싸이클 方式이 LP의 最適解이라면 그것은 준비 횟수 3N 回(=N 싸이클)이하의 모든 非싸이클 方式을 포함하는 생산순서 전부 중에서 最適, 즉 大域的 最適解(global optimal solution)이 되는가?

3. 基本 싸이클 方式의 最適性에 관한 諸檢討

3.1. LP의 等號 最適性

여기에서는 前節의 문제 (1)에 관하여 고찰한다. 우선 싸이클 횟수 N, 需要速度 벡터 $\mathbf{r}=(r_A, r_B, r_C)$, 준비시간 벡터 $\mathbf{t}=(t_A, t_B, t_C)$는 定商生産이 가능한 조건

$$1-\{r_A+r_B+r_C+N/T(t_A+t_B+t_C)\}\geq 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

를 만족하는 것으로 한다. 식(5)의 좌변을 W라 하면, W는 라인 餘裕率을 나타낸다. 이때의 LP가 最適解를 갖는 것은 自明하다.

과도의 복잡함을 피하기 위해 $t_A=t_B=t_c=0$으로서 議論을 전개한다. 따라서 $\mathbf{b}^T=(0, \cdots, T, T, T)$이며, 3(N+1) 次元 벡터 $\mathbf{C(P)}$를 $\mathbf{C(P)}^T=3T(P_A, P_B, P_C, 0, \cdots, 0)$, (다만 $\mathbf{P}=(P_A, P_B, P_C)\subseteq P=\{\mathbf{P}\geq\mathbf{0} \mid P_A+P_B+P_C=1\}$)로 정의하면, 목적함수는 N의 數와 관계없이 $\mathbf{C(P)}^T\mathbf{X}$로 둘수 있다.

여기서 방정식

$$\mathbf{AX}=\mathbf{b} \quad \cdots\cdots (6)$$

를 고려하면, LP의 最適 端點解 $\mathbf{X}$가 基本 싸이클이 되는 것은 $\mathbf{X}$가 식(6)을 만족할 때, 또한 그때에 限한다.

방정식(6)의 해를 $\mathbf{X}^*$라 하면

(a) 任意의 N과 任意의 r에 대해서 $\mathbf{X}^*$는 제 1 成分이 0이 되는 것을 제외하고는 모든 성분이 正이 된다(證明略).

(a)로부터 $\mathbf{X}^*$는 항상 LP의 하나의 實行可能 端點解이다. 또한 Farkas의 定理를 사용하면 실행 가능한 임의의 $\mathbf{X}$에 대하여 $\mathbf{C(P)}^T\mathbf{X}^*\leq\mathbf{C(P)}^T\mathbf{X}$가 성립한다. 즉, $\mathbf{X}^*$는 LP의 最適解가 된다.

이 사실과 방정식

$$\mathbf{y}^T\mathbf{A}=\mathbf{C(P)}^T \quad \cdots\cdots (7)$$

의 解가 非陰인 것은 同値이다. 따라서 문제 (1)은 주어진 r과 P에 대하여 식(7)이 非陰解를 갖는가의 여부의 문제로 歸着된다(行列 $\mathbf{A}$의 各 成分은 $\mathbf{r}$에 의존하여 決定되는 것에 注意).

N=1의 경우 임의의 $\mathbf{P}\subseteq P$와 임의의 r에 대해서 식(7)이 非陰解를 갖는 것은 計算할 필요조차도 없이 自明하다. 그러나 일반적으로 $N\geq 2$에 대해서는 성립하지 않는다. 이하 N과 $\mathbf{r}$이 주어졌을 경우, 식(7)에 非陰解가 있는 $\mathbf{P}\subseteq P$의 集合을 $P^*(N, \mathbf{r})$로 표현하여 이것을 구체적으로 구하겠다.

$\mathbf{P}=(1/3, 1/3, 1/3)$의 경우 식(7)은 生産順序의 逆戰을 제외하고는 식(6)과 同一한 것(표 1의 行列 A의 형태로부터 확인할 수 있다)에 착안하여 性質 (a)를 식(7)에 적용하면,

(b) 任意의 N과 식(5)를 만족하는 R_A, R_B, R_C에 대하여 $\bar{\mathbf{P}}=(1/3, 1/3, 1/3)\subseteq P^*(N, \mathbf{r})$이다.

性質 (a), (b)로부터 $\mathbf{P}=\bar{\mathbf{P}}$의 경우, 식(7)의 解 $\mathbf{y}$의 최후 成分이 0이 되는 것을 제외하고는

正이 되는 것을 알수 있다.

그런데, $\mathbf{P}$를 $\bar{\mathbf{P}}$로부터 임의의 方向으로 변동시킬 경우 식(7)의 解 $\mathbf{y}$에 최초로 0 成分이 나타나는 것은 y_1, y_2, y_3중 어느것에 限定됨을 알 수 있다.

식(7)에 있어서 變數 $\mathbf{y}$의 最初 3成分을 定數로 하고, 그 대신에 $\mathbf{P}$를 變數로 간주한 방정식

$$(P_A,\ P_B,\ P_C,\ y_4, \cdots, y_{3(N+1)})\,\mathbf{A}' = (y_1,\ y_2,\ y_3,\ 0, \cdots, 0) \quad \cdots\cdots (8)$$

을 고려(行列 $\mathbf{A}$부터 行列 $\mathbf{A}'$에의 變換은 自明하므로 $\mathbf{A}'$의 표시는 생략)하여 $(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3) = \mathbf{e}_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$으로 할 경우, 解의 최초의 3成分을 $\mathbf{P}^i(N, \mathbf{r})$, $(i=1,\ 2,\ 3)$으로 하면 구해지는 영역 $P^*(N, \mathbf{r})$이다.

(c) $P^*(N,\ \mathbf{r}) = \{\mathbf{P} \subseteq P \mid \mathbf{P} = \Sigma\ \alpha_i(\mathbf{P}^i(N,\ \mathbf{r}) / \|\mathbf{P}^i(N, \mathbf{r})\|),\ \Sigma\, \alpha_i = 1,\ \alpha i \geq 0\}$으로 주어지는 P의 部分單體가 된다(그림 2 참조). 다만 $\mathbf{P}^1(N, \mathbf{r})$에 관해서는 $N, \mathbf{r}$에 관계없이 $\mathbf{P}^1(N, \mathbf{r}) = \mathbf{e}_1$이다.

3.2. $P^*(N, \mathbf{r})$의 諸性質

3.1에서 유도한 $P^*(N, \mathbf{r})$의 정점 $\mathbf{P}^2(N, \mathbf{r})$, $\mathbf{P}^3(N, \mathbf{r})$의 각 성분은 식(8)에 Cramer의 公式을 적용함에 따라 $\mathbf{r}$의 3成分에 관해서 3N 次元 多項式으로 표현할 수 있다.

이 절차에 의해 $\mathbf{P}^2(N, \mathbf{r})$은 다음의 諸性質을 만족하는 것을 알수 있다. P의 重心 $\bar{\mathbf{P}}$와 임의의 點 $\mathbf{P} \subseteq P$의 거리를 $d(\mathbf{P}, \bar{\mathbf{P}})$로 표현한다. 이때 식(5)를 만족하는(즉, $0 \leq W(\mathbf{r}) = 1-(r_A + r_B + r_C) < 1$이 되도록) 임의의 $\mathbf{r}$에 대해서

(i) $d(\mathbf{P}^j(N\text{-}1, \mathbf{r}), \bar{\mathbf{P}}) > d(\mathbf{P}^j(N, \mathbf{r}), \bar{\mathbf{P}})$
또한 $\mathbf{P}^j(1, \mathbf{r}) = \mathbf{e}^j (j=2,3)$

(ii) $d(\mathbf{P}^j(N, \alpha\mathbf{r}), P) > (\mathbf{P}^j(N, \mathbf{r}), \mathbf{P})$,
$0 < \alpha < 1$ 또한
$\lim_{\alpha \to 0} \mathbf{P}^j(N, \alpha\mathbf{r}) = \mathbf{e}^j (j=2,3)$

(iii) $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta(-1, 0, 1)$, $\Delta > 0 (\Delta < 0)$이라면
$d(\mathbf{P}^2(N, \mathbf{r}', \bar{\mathbf{P}}) - d(\mathbf{P}^2(N, \mathbf{r}), \bar{\mathbf{P}}) > 0\ (< 0)$
또한 $d(\mathbf{P}^3(N, \mathbf{r}'), \bar{\mathbf{P}}) - d(\mathbf{P}^3(N, \mathbf{r}), \mathbf{P}) < 0\ (> 0)$

가 성립된다(그림 2, 3 참조).

성질 (i), (ii)로부터 等號 最適領域 $P^*(N, \mathbf{r})$은 N과 r에 관하여 다음의 包含關係

$$P^*(N+1, \mathbf{r}) \subset P^*(N, \mathbf{r}) \subset P^*(N, \alpha\mathbf{r}),\quad 0 < \alpha \leq 1 \quad \cdots\cdots (9)$$

를 만족하는 것을 알수 있다. 식(9)의 포함관계로부터 영역 $P^*(N, \mathbf{r})$은 싸이클 횟수 N이 클수록, 또한 라인 여유율 $W(\mathbf{r}) \geq 0$이 작을수록 축소되어 가는 것을 알수 있다. 따라서 이와 같은 상황하에서는 주어진 $\mathbf{P}$에 어느정도 偏重現象이 있다면 基本 싸이클 方式이 LP의 最適解일 가능성은 감소된다. 다음으로 性質 (iii)으로부터 N과 $W(\mathbf{r})$을 함께 고정시키고, $\mathbf{r}$의 構成比만을(예를 들어 $r_A = r_B = r_C$(그림 2의 實線)로부터 $r'_A < r'_B < r'_C$(그림 2의 破線) 또는 $r''_A > r''_B >$

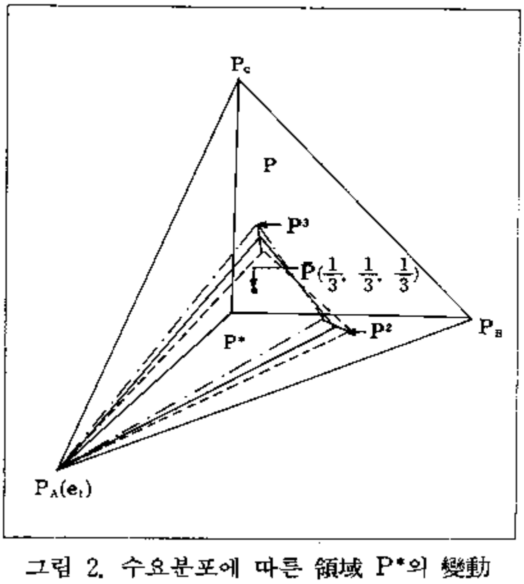

그림 2. 수요분포에 따른 領域 P^*의 變動 (N=3)

r''_C(그림 2의 一點破線)가 되도록) 변화시켰을 경우 $P^*(N, r)$이 重心點으로 특정의 방향으로 치우치는 것을 알수 있다. 즉,

(d) $P^*(N, r)$은 需要量이 작은 순서로 생산되어지는 경우 下向으로 變形하고, 需要量이 많은 순서로 생산되는 경우 上向으로 變形되어 간다.

이때 그림 3에서 볼수 있는 바와 같이 P를 重心 分割하여 區域을 6등분 하였을 경우, 左下의 구역 $M=\{P \subseteq P \mid P_A \geq P_B \geq P_C\}$이 需要 速度 r에 커다란 偏重이 없는한 $P^*(N, r)$의 가장 넓은 部分을 포함하는 것을 확인할 수 있다. 이것은

(e) 6가지 基本 싸이클 方式에서 變動費가 높은 제품 순으로 생산하는 方式이 일반적으로 變動費 分布의 가장 넓은 범위에 대해서 LP의 等號 最適性을 보존한다.

는 것을 의미한다.

3.3. 가장 유리한 기본 싸이클 방식

이미 설명한 바와 같이 購入 變動費가 $P \subseteq P^*(N, r)$인 경우 最適 生産計劃은 基本 싸이클 方式이 아니다. 이후에는 $X \nsubseteq P^*$인 경우, 즉 식(6)의 解 X^*가 적어도 LP의 最適解가 되는 경우를 對象으로 議論을 전개한다.

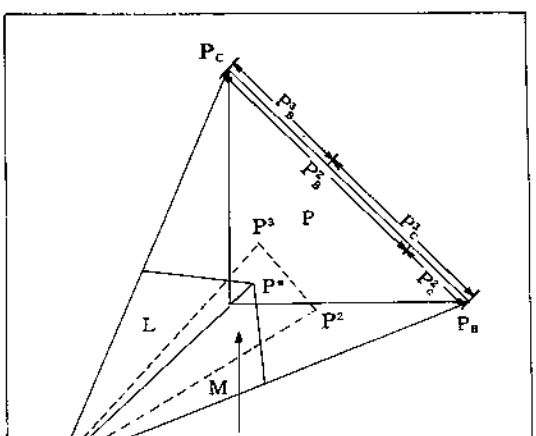

그림 3. 重心分割에 의한 區域과 領域 P^{**}의 變動($N=4$)

X^*가 갖는 性質中에서 특히 6가지 基本 싸이클 方式의 先行 生産量의 合은 N, r과 관계없이 同一 (證明略)한 점에 착안한다. 이것으로부터 예를 들어 생산순서 $A \rightarrow B \rightarrow C$에 대한 X^*를 $X^*=(0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, \cdots, A_N, B_N, C_N)$와 생산순서 $A \rightarrow C \rightarrow B$에 대한 X^*를 $X^*=(0, C'_0, B'_0, A_1, C'_1, B'_1, \cdots, A'_N, C'_N, B'_N)$로 나타내면, 모든 $1 \leq i \leq N$에 대하여 $A_i=A'_i$인 것 등의 性質이 도출된다. 이것을 이용하면

(f) 基本 싸이클 方式 6가지 중에서는 N, r에 관계없이 購入 變動費가 높은 순서로 생산하는 방식이 항상 목적함수치를 최소로 한다.

는 것을 알수 있다. 따라서 문제 (2)에 관해서는 항상 N, r에 관계없이 購入 變動費의 높은 순서로 생산하는 基本 싸이클 方式이 가장 유리하다는 規則性을 얻었다.

3.4. LP 等號解의 大逆的 最適性

마지막으로 이미 구하여진 LP의 等號 最適領域 $P^*(N, r)$을 사용하여 문제 (3)을 고찰한다. 우선 가장 유리한 基本 싸이클 方式($A \rightarrow B \rightarrow C$)이 大域的 最適이 되는 $P \subseteq P$의 集合을 P^{**}라 정의하면 $P^{**} \subset P^*(N, r)$이다. 더우기 性質 (e)로부터 $P^{**} \subset M$인 것을 알수 있다.

따라서, 영역 P^{**}가 존재한다면 항상 $P^{**} \subset M \cap P^*(N, r)$이어야만 한다. 이 사실에 $P^*(N, r)$의 성질 (f)를 대응시켜 보면 다음과 같은 假說을 세울수 있다. 즉,

(g) $M \cap P^*(N, r)$이 $P^*(N, r)$의 나머지 5가지 분할영역과 比較(특히 $L \cap P^*(N, r)$, 여기서 $L=\{P \subseteq P \mid P_A \geq P_C \geq P_B\}$(그림 3 참조)하여 相對的으로 면적이 클수록(작을수록) 영역

표 2. 基本 싸이클 方式이 最適解가 되는 數値例

N = 3			R$_A$ = 200 P$_A$ = 2			R$_B$ = 300 P$_B$ = 1.5			R$_C$ = 400 P$_C$ = 1		
	B$_0$	C$_0$	A$_1$	B$_1$	C$_1$	A$_2$	B$_2$	C$_2$	A$_3$	B$_3$	C$_3$
900	22	74	67	100	133	67	100	133	67	100	133
1000	14	48	45	73	109	62	102	145	93	125	146
1200	6	21	22	39	70	48	93	149	130	168	181

P**도 넓어지고(축소되고), 특히 $M \cap P^*(N, \mathbf{r})$과 $L \cap P^*(N, \mathbf{r})$의 면적의 比가 逆戰되는 경우를 경계로 하여 $P^{**}=\phi$이 된다.
라고 생각하는 것은 不自然스럽지 않다.

이하 모든 가능한 生産順序를 고려한 위에 需要分布를 세분하여 변동시키는 計算機 實驗에 의해 假說 (g)를 검토한다.

성질 (d)에서 설명한 바와 같이 $\mathbf{r}$의 변동에 따르는 $M \cap P^*(N, \mathbf{r})$과 $L \cap P^*(N, \mathbf{r})$의 面積比 변화를 측정하는 척도로서 $P^*(N, \mathbf{r})$의 2項點 $P^2(N, \mathbf{r})$, $P^3(N, \mathbf{r})$에 있어서 P_B/P_C의 比의 방근 즉, $\lambda=\sqrt{P^2_B P^3_B}/\sqrt{P^2_C P^3_C}$를 사용한다. 이때 우선

(h) 領域 $P^{**}=\phi$이 되는 것은 $\lambda \leq 1+\xi$의 경우 또한 그때에 限한다.
는 것이 확인되었다. 다만 ξ은 오차범위의 정수이다. 또한 $P^{**}=\phi$의 경우에는 어떤 $P \subseteq M \cap P^*(N, \mathbf{r})$이 $P \subsetneq P^{**}$가 되는가의 여부는 $\mathbf{P}$에 있어서 P_B와 P_C의 比 $\beta=P_B/P_C$만에 의존하여 결정되며, P_A와는 無關係입이 확인되었다. β의 上限 β^*와 下限 β_*에 관하여 조사한 결과 $\beta_*=1+\xi$이며(따라서 P**는 그림 3에서 표시한 $M \cap P^*$의 部分 單體가 된다), 또한 β^*에 관해서는 $\beta^*=K\lambda$로 두고 比例定數 k를 구한 결과

(i) k는 N(≥2)와 需要速度의 변동에 영향을 받지 않고, 거의 一定値($1.20 \leq k \leq 1.35$)를 취한다.
는 것이 확인되었다(표 2 참조).

마지막으로 $P^*(N, \mathbf{r})$에 관한 包含關係式(9) 중에 싸이클 횟수에 관한 單純減少性이 P**에 관해서도 成立하는가를 조사한 결과

(j) $P^{**}(N+1, \mathbf{r}) \subset P^{**}(N, \mathbf{r})$
의 관계를 확인하였다.

표 3. 주어진 需要速度(분포)에 따라서 基本 싸이클 方式이 P**가 되는 β의 上限値($W(\mathbf{r})=0$)

需要速度			N = 3		N = 4	
r_A	r_B	r_C	β*	λ	β*	λ
0.6/3	1/3	1.4/3	1.86	1.39	1.44	1.14
0.8/3	1/3	1.2/3	1.79	1.35	1.42	1.13
1/3	1/3	1/3	1.70	1.28	1.37	1.11
1.2/3	1/3	0.8/3	1.62	1.24	1.34	1.08
1.4/3	1/3	0.6/3	1.45	1.19	1.26	1.04
1.6/3	1/3	0.4/3	p**=ϕ	0.99	p**=ϕ	0.97

4. 基本 싸이클 方式의 最適 生産計劃

지금까지는 任意이지만 N을 고정시켜 基本 싸이클 方式의 最適性에 관하여 검토하였다. 여기서는 N에 관한 최적성을 검토한다.

우선 $N=1$의 경우에는 $P^*(1, r)=P^{**}(1, r)$이기 때문에 等號解 $X^*(1)$은 P, r에 관계없이 大域的 最適이다(이후 N을 고정했을 경우의 等號解를 $X^*(N)$으로 표한다). 지금 어떤 N까지

$$P \subseteq P^{**}(N, r) \quad \cdots\cdots (10)$$

또한

$$q\Delta C(N) > 3M \quad \cdots\cdots (11)$$

단, $\Delta C(1)=\infty$, $\Delta C(N)=C(P)^T X^*(N-1) - C(P)^T X^*(N)>0$, $N \geq 2$가 함께 성립한다고 하자. 이 경우 3.4의 성질 (j)에 의해 大域的인 最適領域 $P^{**}(N, r)$은 N에 관하여 축소되어 간다. 또한 LP의 최종 타블로(Tableau)에 感度分析을 행하면 $\Delta C(N)$은 N에 관하여 單純 減少하여 0에 수렴한다. 따라서 N을 증가시켜 가면 어떤 N^*에서 반드시 식(11)의 부등호가 逆轉한다. 만일, 이 번호 N^*까지 식(10)이 계속하여 성립된다면 $X^*(N-1)$은 基本 싸이클 最適解이다. 식(10)이 식(11) 보다 먼저 성립되지 않을 때는 基本 싸이클 方式이 아닌 生産計劃이 바람직한 경우가 되며, 그 해결은 本 硏究의 범위를 벗어난다.

이상의 고찰을 통하여 $t=0$으로 하였으나 이것이 正이라 해도 특히 T에 비해 상대적으로 微小하다면 본질적으로는 동일한 議論이 성립한다.

5. 結　論

이상의 고찰에 의해 얻어진 결과는 다음과 같이 정리할 수 있다. 任意로 P, r이 주어졌을 경우 一般性을 상실하지 않고, $P_A \geq P_B \geq P_C$로 가정할 수 있다(P의 크기로 제품의 記號를 바꾸기만 하면 된다). 문제는 N의 크기와 r의 偏重이나 6가지 基本 싸이클 方式에 한정하면 生産順序 $A \rightarrow B \rightarrow C$에 대응하는 等號解 X^*가 N, r에 관계없이 항상 最良인 점이 제시되었다. 이 점의 엄밀한 증명에는 雙對定理를 사용하여야 하나 직관적으로는 어떤 제품을 한 싸이클내의 최후에 생산하기 보다는 2번째에 또한 2번째 보다는 최초에 생산하는 것이 N, r에 관계없이 先行 生産良이 적다고 용이하게 추측할 수 있다. 이 경우에 生産順序 $A \rightarrow B \rightarrow C$를 선택하는 것은 보다 적은(많은) 先行 生産量에 대하여 보다 큰(작은) 購入 變動費의 加重値를 곱하는 것에 지나지 않는다.

다음으로 문제의 N, r은 基本 싸이클 解 X^*의 最適性에 다음과 같은 영향을 미치는 점을 알았다. 즉 r이 고정된채로 N이 증가하는 경우에 X^*의 大域的 最適性을 보증하는 P의 영역 $P^{**}(N, r)$은 單純하게 縮小되어 간다. 이것은 N의 증가에 따라서 가능한 非싸이클 方式의 종류가 지수의 組合으로 증가하기 때문에 X^*가 最適인 가능성이 감소되는 것에 對應하고 있다. 한편, N이 고정된채로 r의 偏重이 $r_A<r_B<r_C$ ($r_A>r_B>r_C$)가 될수록 $P^{**}(N, r)$은 擴大(縮小) 되어 간다. 이는 근본적으로 基本 싸이클 方式은 모든 생산 순서의 선택방법중 가장 偏重이 적은 生産方式이기 때문이다. 이러한 점은 製品間 重要度에 優劣이 없을수록 X^*는 最適이 되기 쉽고, 반대로 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 순으로 製品間重要度에 차이가 있을수록 A를 (N+1)회 이상 또는 C를 (N-1)회 이하로 分割 生産하는 非싸이클 方式中에 最適解가 있을 가능성이 높은 것에 對應하고 있다.

마지막으로 주어진 N, P, r에 대하여 X^*가 最適인가의 여부는 다음과 같은 절차로서 간단히 판정할 수 있다. 즉, N, r과 ($y_1, y_2, y_3=e_2, e_3$) 관하여 방정식(8)을 풀어 $P^2(N, r)$, $P^3(N, r)$을 구하고, 이것들의 B, C 成分으로부터 계산한다. 여기서 주어진 P가 不等式

$$1+\xi \leq P_B/P_C \leq K\lambda \quad \cdots\cdots (12)$$

를 만족한다면 X*는 最適이며, 그렇지 않으면 最適解는 基本 싸이클 方式이 아니다. 여기서 K는 3.4에서 설명한 比例乘數이며, ξ은 오차범위의 非陰의 定數이다. 원래 주어진 N, P, r에 대한 最適解를 구하기 위하여는 N에 관한 모든 生產順序의 組合을 LP로서 풀어야 하기 때문에 본질적으로 連立 1차 方程式을 2회만 푸는 상기의 절차가 실용상 유효하다고 생각된다.

紙面의 관계상 3장의 증명을 생략하였으나 이것들은 선형대수, 선형계획법의 통상의 수법으로 증명 가능한 것들이다. 또한 以上의 결과는 일반의 m 製品($m \geq 4$)의 경우에도 동일하게 擴張 可能하나 P*, P**를 圖示하는 편의상 3 製品에 한정하였다.

참고문헌

1. Doll, C.L. and Whybark, B.C., "An Interrative Procedure for the Single Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem", Manage. Sci., Vol. 20, No. 1, pp.14-21.
2. Parsons, J.A., "Multi-Product Lost Size Determination when Certain Restrictions Are Active", J. Ind. Eng., pp.360-365, July.
3. Madigam, J.G., "Scheduling a Multi-Product Single Machine System for an Infinite Planning Period", Manage. Sco. Vol. 14, No. 11, pp.713-719.
4. Gass, S.I., Linear Programming, 4th ed. Ch, 6, McGraw-HillBook, New York 1975.
5. 千住鎭雄, "經營科學を 生かして 使うには(2)", オハレ-ションズ. リサチ, Vol. 23, No. 4, pp.250-255.
6. 村松林太郎: "生產管理", 朝倉書店(1976).
7. Magee, J.F. 著, 松田武彥, 千住鎭雄譯, "生產計劃と 在庫管理", 紀伊國室書店(1961).