Journal of the KSQC
Vol. 17, No. 1 1989

代替案의 純現在價値 評價와 內部收益率 誘導에 대한 硏究

The Evaluation of the Net Present Value and the Derivation of the Internal Rate of Return with the Alternatives

朴 商 敏*
李 根 熙**

ABSTRACT

This paper has provided a systematic technique, the evaluation of the distribution with the NPV and the derivation of the IRR in the investment alternatives, for the cost estimating analysts. The proposals of investment alternatives are included the venture capital under risk and probabilities at each events, within the cash inflows are occuring at random timing.

Therefore, we have considered the followings ;

1) the first cash outflow is deterministic.

2) the cash inflows are random variables with known distributions.

3) the lengths of the time intervals between the cash inflows are independently distributed and independent of the cash inflows.

In this paper, the first two moments of the distribution, the Laplace Transforms and the convolutions are computed for both independent cash inflows and mutually exclusive alternatives as in the case of quite correlated cash inflows.

* 仁川大學校 產業工學科 助敎授
** 漢陽大學校 產業工學科 敎授

I. 序 論

投資代替案의 選定은 特定한 目的達成을 위한 投資의 機會를 選擇하는 데에 관한 原則 또는 節次인 意思決定基準이 確立되어야 한다. 그러나 일반적으로 投資代替案은 不確實하거나 危險性을 수반하는 將來의 狀況을 內在하고 있기 때문에 時間의 經過와 함께 發生하는 不確實한 條件들을 考慮하여야만 한다.

따라서 代替案을 검토하는 경우에는 資本코스트의 變動과 收入과 支出등 現金흐름과 長期的인 未來의 不確實한 狀況을 가능한 한 正確하게 豫測하여 合理的인 意思決定을 해야 한다. 그러나 投資代替案의 選定을 위한 投資決定에 있어서 將來의 現金흐름의 分布와 確率을 客觀的으로 正確하게 豫測하기는 어렵다.[7]

投資決定에 있어서의 不確實性 問題는 主로 現金흐름에 관한 不確實性과 危險性을 如何히 測定할 것인가 하는 問題이다.[10]

本 硏究는 危險條件이 수반되는 投資代替案에 대하여 랜덤時點에서 現金流入이 形成되는 投資의 純現在價値(Net Present Value)의 分布에 대한 評價와 內部收益率(Internal Rates of Return)의 誘導에 대한 것으로 投資代替案(Investment Alternatives)의 選定을 위한 意思決定에 관한 것이다.

II. 現金의 流入과 流出

代替案分析의 結果로 부터 代替案의 現金흐름에 대한 純現在價値의 期待値와 分散, 共分散行列과 平均値 등으로 구성되는 代替案의 評價에 대한 硏究는 1965年 Hiller에 의해 발표된 바 있다.[3]

이제 모든 現金의 流入과 流出은 離散的으로 同一한 時期에 發生되며, 投資는 一定한 期間後에는 終了된다고 假定하고, 純現在價値는 正規의 確率變數일 경우에만 適用되는 것으로 한다.

即, 中心極限定理에 따라서 純現在價値가 n 確率變數의 加重値의 合이 되는 條件들에 대해서만 다루기로 한다.[1]

現金흐름은 一般的으로 離散的으로 同一한 時期에 發生된다고 假定한다. 이러한 사실은 財務諸表의 結果와도 一致되지만, 그러나 이러한 假定이 成立되는 경우에도 때로는 保證되지 않을 수도 있게 된다. 따라서 本 硏究에서는 純現在價値의 分布를 求하기 위한 算出方法을 公式化하기 위한 假定아래 代替案의 모델을 設定하고자 한다.

또한 現金流入은 랜덤하게 發生하고 現金流入의 時間 間隔은 旣知의 確率分布로서 랜덤하다고 할 경우에 주어진 問題에서 모든 現金流出은 確定的이며 $t=0$(現在)에서 發生한다고 假定한다. 割引率은 各目利子率 r로서 주어지고 時間은 連續變數로 한다.

따라서 모든 現金流入은 初期投資와 一致되게 現在價値로 割引되어 질 수 있으므로 代替案의 一定 期間에 주어진 時間이거나 $t=0$에서 現金流出이 發生된다고 할 수 있다.

또한 現金流入은 投資에 대한 結果로서 랜덤間隔에서 랜덤하게 發生하는 收入이 된다. 現金流入의 確率分布와 現金流入間 時間間隔의 分布에 대하여는 推計的方法을 適用한다.[5] 即, 現金流入의 到着의 時間을 推定하기 위해 β-分布에서 樂觀値, 悲觀値, 最頻値를 구하는 方法과 같이 統計的 分布를 使用한다.[6]

III. 獨立的 現金흐름

時點 t_1, $t_2, \cdots$, t_n에서 現金流入이 $x_1, x_2, \cdots x_n$으로 發生된다고 하자.

$\tau_i = t_i - t_{i-1} (i=1, 2, \cdots n, \ t_0 = n)$는 各已 獨立이며, $x_i (i=1, 2, \cdots n)$로 부터 獨立이라 하고, 連續確率分布 $F_i(t)$와 確率密度函數 $f_i(t)$를 갖는다고 假定하자. 但, 모든 x_i에 대하여 여러 分布的 假定을 할 수 있다.

주어진 整數 n으로 $n \geq 1$에서 n 現金流入이 있는 代替案의 投資 終了 모델에서 純現在價値의 分布를 誘導하기 위하여 現金流入의 現在價値를 구하기 위해서는 確率密度函數 $f_i(t)$의 Laplace 變換의 過程에서 算出할 수 있다. 卽, 이 變換들은 分布의 n次 모멘트에서 직접 구해지게 된다. 函數와 函數사이에는 1 : 1의 관계가 성립되고 函數의 Laplace 變換이 數理的인 節次의 手順이므로 解를 얻기 위해서는 實領域으로 逆變換하여 주어진 問題의 解를 구할 수가 있다.[5)]

구하고자 하는 現在價値의 分布에서 確率變數를 $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{1}{e^{r\tau i}}$이라 하자. 여기에서 $\left[\frac{1}{e^{r\tau i}}\right]$는 一括支拂 連續複利 現價係數이다. M_n는 Fig.와 같이 推計的 過程이 되게 되며, $t=0$에서 始作해서 間隔사이에 指數下向 傾向으로 確率 變化를 갖는다.[2)] 이러한 過程은 在庫問題에 관련한 確率問題에 자주 引用되며, n이 ∞로 가는 過程에 거의 集中된다. 그러나 모든 代替案들은 限定된 數의 現金回收 後에 終了된다고 假定되기 때문에 實際의 問題에 適用하는 데에는 制限이 따르게 된다.

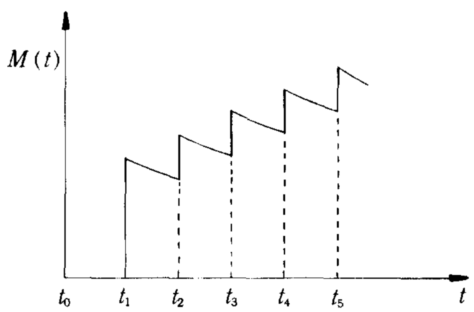

Fig. 確率變數 M_n의 推計的過程

i번째 變化 후의 過程을 A_i라고 假定하면 다음과 같은 循環關係를 갖는다.

$$A_1 = X_1$$

$$A_2 = A_1 [P/F \ r, \tau_1] + X_2$$

$$\vdots$$

$$A_{i+1} = A_i [P/F \ r, \tau_i] + X_{i+1}$$

$$(i = 1, 2, \cdots n-1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

단, $[P/F \ r, \tau_i] = e^{-r\tau i}$이다.[註)]

또한,

$$M_n = A_n e^{-r\tau n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$P\{A_i \leq x\} = G_i(x)$에서 $G_i(x) = G(x)$라 하자. τ_i는 各已 獨立이며, 또한 X_i와 獨立이므로

$$P\{A_i e^{-r\tau i} \leq x\}$$

$$= \int_0^{\infty} P\{A_i e^{-r\tau i} \leq x | \tau_i = t\} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} G_i(x e^{rt}) f(t)\, dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

X_i가 獨立이므로 式(3)에서

$$P\{A_{i+1} \leq x\} = G_{i+1}(x)$$

$$= \int_0^{x} [\int_0^{\infty} G_i\{(x-u) e^{rt}\} f(t)\, dt]$$

$$dG(u) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

註) Single-Payment Present-worth factor (Continuous Compounding)

$P = F[\frac{1}{e^{rn}}]$

$= F[P/F_{r,n}]$

$$P\{M_n \le x\} = B_n(x)$$

$$= \int_0^\infty G_n(xe^{rt}) f(t)\,dt \quad \cdots\cdots (5)$$

$G(x)$가 微分 可能이면 $g_i(x)$와 $b_n(x)$가 存在하게 되고, $G_i(o)=0$이므로 다음의 式을 成立시킬 수 있다.[5)]

$$g_i(x) = g(x)$$

$$g_{i+1}(x) = \int_0^x \left[\int_0^\infty g_i\{(x-u)e^{rt}\} e^{rt} \cdot f(t)\,dt \right] g(u)\,du \quad \cdots\cdots (6)$$

$$b_n(x) = \int_0^\infty g_n(xe^{rt}) e^{rt} f(t)\,dt \quad \cdots\cdots (7)$$

Laplace 變換 $G_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG_i(x)$와 $B_n(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB_n(x)$를 구할 수 있도록 다음의 두 變換에 관한 두 整理를 適用한다.[5)]

(1) $h(x)$와 $u(x)$가 各各 $H(s)$와 $U(s)$의 逆變換이고 $|h(x)| \le Me^{rt}$의 假定을 만족한다면 곱 $K(s) = H(s) \cdot U(s)$의 逆變換 $k(x)$는 $h(x)$와 $u(x)$의 合成(Convolution)이고 $[h*u]$로 쓰며 다음과 같이 표시한다.

$$\int_0^\infty e^{-sx} [h*u]\,dx = H(s)\,U(s)$$

(2) 任意의 函數 $h(x)$와 常數 a에 대하여

$$\int_0^\infty e^{-sx} h\left(\frac{x}{a}\right) dx = aH(as)$$

위의 整理에 따라

$$G_1 = G(s)$$

$$G_{i+1}(s) = G(s) \int_0^\infty f(t) \cdot G_i(se^{-rt})\,dt,$$

$$(i = 1, 2, \cdots n-1) \quad \cdots\cdots (8)$$

$$B_n(s) = \int_0^\infty G_n(se^{-rt}) f(t)\,dt \quad \cdots\cdots (9)$$

의 두 基本 公式을 誘導할 수 있다.

適合한 形態로 이들을 代入하기 위하여 $G(0) = G_i(0) = B_n(0) = 1$ $(i = 1, 2, \cdots n)$을 取함으로써 Taylor Series의 變換을 擴張할 수 있다.[5)]

$$\left.\begin{aligned} G(s) &= \sum_{j=0}^\infty g_i s^j \\ G_i(s) &= \sum_{j=0}^\infty \phi_{ij} s^j, \ (i = 1, 2, \cdots n) \\ B_n(s) &= \sum_{j=0}^\infty \phi_j s^j \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (10)$$

여기에서 $g_0 = \phi_{i0} = \phi_0 = 1$이고 s^j의 係數는 同一한 分布의 j次 모멘트에 $(-1)^j / j!$의 積과 같다.

獨立的 現金흐름에서 Laplace 變換의 Taylor Series 의 展開(expansion)는 다음과 같다.[5)]

$$\left.\begin{aligned} \phi_{1j} &= g_j \\ \phi_{i+1,\,j} &= \sum_{m=0}^{j} g_m \phi_{i,\,j-m}, F\{(j-m)r\} \\ \phi_j &= \phi_{nj} F(rj) \end{aligned}\right\} \cdots (11)$$

다음에 式(8)과 式(9)의 變換에 의해 아래의 式을 誘導할 수 있다.

$$G_{i+1}(s) = G(s) \int_0^1 G_i(sy) f(y)\,dy \quad \cdots\cdots (12)$$

$$B_n(s) = \int_0^1 G_n(sy) f(y)\,dy \quad \cdots\cdots (13)$$

여기에서 $r.v.$ $Y = e^{-r\tau}$, $\tau \sim f(t)$이다.

Taylor 級數 展開의 係數로 現金流入의 現在價値 M_n의 分布의 Laplace 變換 $B_n(s)$를 직접 산출할 수 있으며, 또한 이들 分布의 모든 모멘트를 직접 구할 수 있다. m_j가 $B(s)$의 j次 모멘

트라고 가정하면

$$m_j = (-1)^j \frac{d_j[B_n(s)]}{ds^j}\Big|_{s=0}$$

$$= (-1)^j j!\, \phi_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

이 된다. 따라서 위의 式들에 의해 산출되는 M_n의 平均과 分散 間의 直接比較가 가능하다. 또한 現金流入 n의 數가 增加함으로써 增加되는 두 分散間은 明白히 다르게 된다.

이제 內部 收益率(Internal Rates of Return)을 R이라고 하면, 現金의 初期流出 a_0와 割引率 r에서 다음의 관계가 성립한다.[8)]

$$\{R \le r\} \leftrightarrow \{NPV \le 0\} \leftrightarrow \{M_n \le a_0\}$$

여기에서

$$F(r, a_0) = P\{R \le r\,;\, a_0\}$$

$$= P\{M_n \le a_0\,;\, r\}$$

$$= B_n(a_0\,;\, r) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

a_0에 대하여 Laplace 變換을 하여 H라 하면

$$Ha_0[F(r\,;\,a_0)] = Ha_0[B(a_0\,;\,r)]$$

$$= \frac{B_n(s\,;\,r)}{s}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(r) s^j/s \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

단, $B_n(x\,;\,r)$은 式(16)의 選變換 H^{-1}이다. 주어진 初期流出 a_0에 대한 內部收益率 R의 分布函數는 아래의 式으로 부터 直接 算出할 수 있다.

$$F(r\,;\,a_0) = H^{-1}[\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(r) s^j/s]|_{x=a_0} \quad \cdots (17)$$

IV. 從屬的 現金흐름

現金流入 X_i를 決定하는 確率變數 X에 대한 完全相關 現金흐름의 경우를 고려하면, $G(x)$는 X와 $X_i = a_i + k_i X$의 分布函數를 가정할 수 있다. 여기에서 $f(t)$대신 $f(y)$를 적용하고, $Y_i = e^{-r\tau i}$로 한다.

이 경우에

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k (\prod_{j=k}^{n} Y_j) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

가 되며, $X=y$라 놓으면, X_i는 常數가 된다.

$$P\{A_i \le x | X = y\} = G_i(x|y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

$$P\{M_n \le x | x = y\} = B_n(x|y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

$$H_x\left[\frac{dG_i(x|y)}{dx}\right] = G_i(s|y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

$$H_x\left[\frac{dB_n(x|y)}{dx}\right] = B_n(s|y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

條件附 分布函數와 Laplace 變換에서 다음의 式을 誘導할 수 있다.

$$B_n(x) = P\{M_n \le x\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

$$H_x\left[\frac{dB_n(x)}{dx}\right] = B_n(s)$$

$$= \int_0^{\infty} B_n(s|y)\, dG(y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

앞에서의 式(3), (4), (5), (6)및 (7)에 대하

여 다음의 관계가 성립될 수 있다.

$$G_2(x|y) = F\left(\frac{x - X_2}{X_1}\right) \cdots\cdots (25)$$

$$G_{i+1}(x|y) = \int_0^1 G_i\left\{\frac{x - X_{i+1}}{u}|y\right\} f(u)\, du \cdots\cdots (26)$$

$$B_n(x|y) = \int_0^1 G_n\left\{\frac{x}{u}|y\right\} f(u)\, du \cdots\cdots (27)$$

Laplace 變換을 하도록, $x<0$에서 $G_i(x|y)=0$으로 하면 위의 式으로 부터

$$G_2(s|y) = e^{-sX2} F(X_1 s) \cdots\cdots (28)$$

$$G_{i+1}(s|y) = \int_0^1 G_i(su|y)\, e^{-sX_{i+1}} f(u)\, du \cdots\cdots (29)$$

$$B_n(s|y) = \int_0^1 G_n(su|y) f(u)\, du \cdots\cdots (30)$$

이 誘導되어 진다.

또한 앞의 Taylor 급수 전개의 係數와 같은 의미를 갖도록 係數를 다시 놓으면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} G_i(s|y) &= \sum_{j=0}^{\infty} g_{ij}(y)\, s^j \\ B_n(s|y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{nj}(y)\, s^j \\ B_n(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j S^j \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (31)$$

위에서의 完全相關 現金흐름의 係數가 주어지기 위하여

$$g_{2j}(y) = \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i X_2{}^i}{i\,!} \phi_{j-i} X_1^{j-i}$$

$$(j=0, 1, 2, \cdots) \cdots\cdots (32)$$

$$g_{i+1,\,j}(y) = \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m X_{i+1}^m}{m\,!} g_{i,\,j-m} U_{j-m}$$

$$\begin{pmatrix} i=2, 3, \cdots\cdots n \\ j=0, 1, 2\cdots \end{pmatrix} \cdots\cdots (33)$$

$$\phi_{nj}(y) = g_{nj} U_j \cdots\cdots (34)$$

$$\phi_j = \sum_{k=0}^{j} C_k r_k \quad (j=0, 1, \cdots) \cdots\cdots (35)$$

여기에서 C_k는 y와 $\phi_{nj} = \sum_{k=0}^{j} C_k y^k$에서 ϕ_{nj}의 多項展開의 係數이다.

또한 $\phi_j = U_j/j\,!\,(-1)^j$를 $F(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j S^j$에 代入하여 이 관계와 $s=0$에서 Taylor Series의 e^{-sX2}의 展開를 式(28)에 代入하여 式(32)를 誘導한다. 여기에서 式 (32), (33), (34)로 부터 b_{ij}와 ϕ_{nj}는 自由度 j의 y에서 多項이 된다. 또한 여기에서 式(23), (24)에 $B_n(s|y)$의 展開를 代入하면 式(35)를 誘導할 수 있다.

또한 M_n의 平均과 分散을 산출하여 비교하면 앞의 獨立的 現金흐름에서와 마찬가지로 同一한 結果에 도달하게 되며, 內部收益率 R의 算出方法도 同一하게 된다.

V. 結 論

本 硏究에서는 初期의 現金流出은 確定的이며, 現金流入은 旣知 分布의 確率變數로 하고, 現金流入의 間隔은 現金流入과는 무관하게 獨立的인 分布로 假定하였다.

現金흐름의 純現在價値의 分布에 관한 결과를 誘導하기 위하여 Laplace 變換을 試圖하였으며, 또한 Laplace 變換에서 確率을 附加한 것은 分布의 모든 모멘트를 산출할 수 있는 利點이 있음을 指摘하였다. 또한 經驗的인 側面에서도 이것은 意思決定者의 立場에서는 도움이 된다.

그러나 이러한 結果를 算出하기 위한 많은 努力이 問題가 된다. 그러나 더 問題가 되는 것은 現金의 中間流入時期와 現金흐름間에 그리고 中間流入期間間이 獨立이라는 假定이다. 따라서 相互從屬的인 推計的 모델을 確立한 必要가 있다.

또한 現金流入時期에 대한 確率分布 모델의 擴張으로 一般的 特性의 最適解에 관한 硏究가 期待된다.

參 考 文 獻

1. Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R.A. (1977), "Statistics Concepts and Methods", John wiley & Sons, Inc., pp. 210–220.
2. Cinlar, E.(1975), *"Introduction to stochastic Processes,"* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, pp. 79–85.
3. Hiller, F.S. (Jan. 1965), *"Supplement to the Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risk Investment"*, Management Science, Vol. 11, No. 3, pp. 485–487.
4. Johnson, N.L. and Kotz, S.(1972), *"Distributions in Statistics"*, John Wiley & Sons, Inc., pp. 182–188.
5. Kreyszig, E.(1975), *"Advanced Engineering Mathematics"*, 4th ed., John wiley & Sons, Inc., pp. 200–218, pp. 223–235, pp. 692–699.
6. MacCrimmon, K.R. and Ryavec, C.A. (1964), *"An Analytical Study of the PERT Assumptions"*, Operations Research, Vol. 12, pp. 16–37.
7. Poterfield, J.T.(1765), *"Investment Decisions and Capital Costs"*, pp. 114–116
8. Teichroew, D., Robicheck, A. and Montalbano, M.(Jan. 1965), *"Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty"*, Management Science Vol. 11, No. 3, pp. 395–403.
9. _____, _____, and _____(Nov. 1965), *"An analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty"*, Management Science, Vol. 12, No. 3, pp. 151–179.
10. Weingartner, H.W.(Aug. 1969), *"Some New Views on the Payback period and Capital Budgeting Decisions"*, Management Science, Vol. 15, No. 12, pp. 594–607.