Journal of the KSQC
Vol. 17, No. 2, 1989

재분배를 고려한 병렬형 재고시스템
Optimal Stock Lovels for Parallel-Type Inventory System with Redistribution

권 희 철*
김 만 식**

ABSTRACT

A one-upper warehouse n-lower retailer inventory model is discussed. The probability distribution of demand for a given perod is independent. The inventory holding cost is proportional to the number of unsold units and the cost of shortages is proportional to the number of shortages. In the event of a shortage, units are redistributed with a cost proportional to the number of units from the retailers which are a surplus at the end of the period. The optimum stock levels are obtained and the effects of redistribution are analized.

1. 개 요

다활동 시스템(multi-activity system)에서 재고를 할당 또는 분배하는 문제는 제한된 형태로 그 문제가 진행되어 왔다[2]. 분배모형이 각 활동에서 현존 재고상태를 포함하면 이러한 문제는 시스템 비용 또는 다른 실행목적을 만족하기 위하여 재분배(redistribution)를 결정하는 것으로 된다. 즉 이런 재분배를 고려해야 되는 경우는 여러 재고점에서 재고보유 상태가 수요의 랜덤특성, 경우에 따라서는 수요패턴의 알려지지 않은 변위 때문에 불균형을 이룰때 본질적인 적용의 뜻이 존재하는 것이다.

* 경원공업전문대학 공업경영과
** 한양대학교 산업공학과

Allen[1]은 규칙적인 재고조사 기간중에는 재보충이나 추가적 재분배를 허용하지 않고 다음 조달때까지 재분배비용과 품절비용이 최소로 되는 재분배단위를 얻는 모델을 개발했으며, 계산의 단순성을 위해 매우 낮은 수준의 수요를 갖는 품목을 전제로 한 연구들이 있는데 Love[7]와 Hadley[5] 등은 재분배시간이 다음 분배시간보다 크면 재분배는 고려되지 않는 모형을 수립했다. 이때 발생된 수요는 부재고로 처리하고 다음 분배가 이루어질때 우선적으로 할당되며 그러한 시간동안 다른 사후주문은 허용하지 않는다는 가정을 두고 있다. Gross[4]는 주문량을 정책변수로 고려하였는데 2지역 문제의 해법이 계산적으로 매우 복잡하여 반복법으로 n지역 문제를 개발했으나 계산량은 크게 줄지는 않았다. 그리고 Das[3]는 재분배의 동기를 단지 품절비용을 줄이는 효과를 척도로 단일 기간분석을 하고 있는데 재분배와 주문은 동시에 발생하지 못한다는 가정을 주었으며 재분배시기를 미리 결정해두고 있는점이 특별하다. Hoadley와 Heyman[6]은 하위시스템에서 품절시 중앙으로부터 얼마만큼 추가로 보충 받을 수 있느냐는 경우를 고려했으나 재분배모델과는 독립적으로 고찰되었는데, 재분배에서의 관심은 수요를 사전에 예견하고 수행한 재분배는 시스템에 경제적이라는 것이다.

또 최근의 다지역 병렬형 재고관리 모형으로 Schultz[8]의 하위지역 수요에 대한 중첩문제와 Schwarz와 Badinelli등[9]의 고객서비스 수준을 전제로한 안전재고문제등 시스템의 수요특성과 서비스수준을 고려한 연구도 있다.

본 연구는 개별적 재고관리에서처럼 각 지역마다 따로 주문정책을 쓰고 오로지 자신들의 편의에만 관심을 갖는 경우가 아니라, 모든 지역(location)에 동시적으로 재고 결정을 해야하는 중앙통제적 재고관리 문제로서 기간중에 품절이 발생했을때 이의 보충을 중앙의 상위재고점으로 사후주문이나 취소를 결정하기전에 잉여(surplus)가 있는 지역의 재고를 먼저 재분배(redistribution)를 통해 만족시키는 경우를 고려한 것이다(Figure 1). 특히 기대품절이 예상되는 기간에서 재분배를 허용하는 것이 아니라 실제로

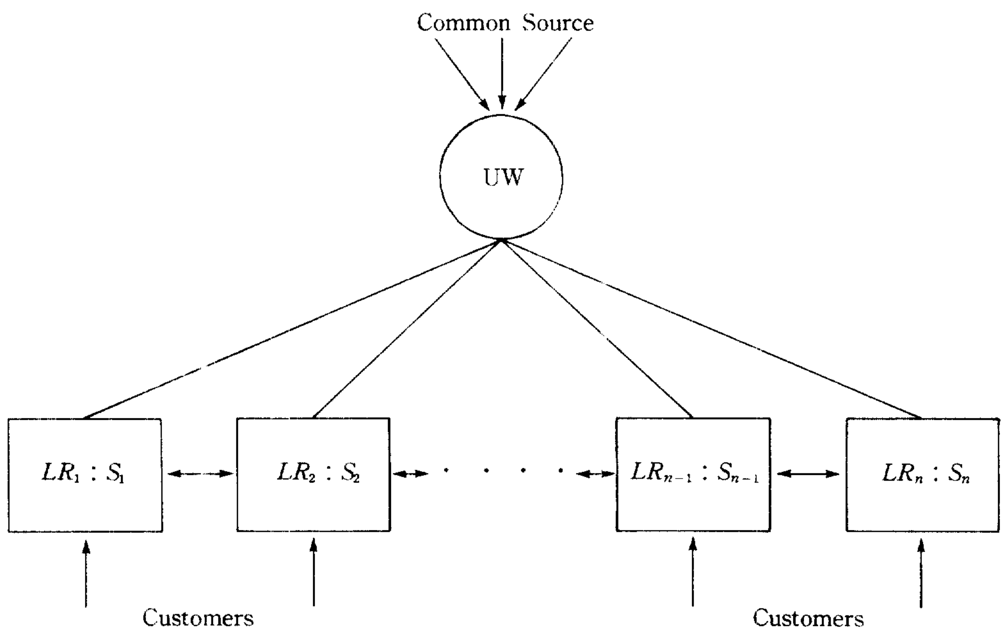

Figure 1. Two Level Structure with Redistribution

기간말에서 나타나는 재고부족은 잉여가 있는 다른 지역에서의 재고로 직접 충족시키는 것이 현실적이다. 다시말해 시스템 보충간에는 시간이 경과함에 따라 하위재고점에서 수요의 랜덤성에 의해 재고수준에 불균형문제가 생긴다는 것이다. 이때 하위재고점들간의 재분배는 재분배에 드는 비용이 작을수록 일부지역의 재고부족시 재분배의 효과가 증가하므로 재고보유량을 줄일 수 있게된다. 이러한 최적재고정책을 전제하여 설정하고 최적재고량을 발견하는 방법을 제시하며 재분배 효과를 분석한다.

2. 문제의 설정 및 분석(두개지역 경우)

먼저 두개지역 LR_1, LR_2만 있는 경우를 고려한다. 공급원으로부터의 조달은 기간초에 이루어지고 LR_1에는 S_1, LR_2에는 S_2양 만큼 보충된다. 계획기간 동안의 두 지역의 수요는 독립적이며 확율밀도함수는 LR_1에서는 $f(x_1)$이고 LR_2에서는 $f(x_2)$이다.

기간말에서 팔리지 않은 품목단위당 재고유지비용은 h이고, 품질비용 p, 기간말의 한곳에서의 재고부족은 가능하면 다른 곳에서 보충할 수 있다. 이 재분배는 잉여단위가 있는 곳에서 수요부족이 일어난 곳으로 이루어지며 단위이전당 재분배비용은 r이고, 총기대비용을 최소화하는 각 기간초에서 두지역의 최적 보유량을 얻고자 한다. 문제는 두곳의 수요와 보유량간에 하위재고점에서의 실제적인 불균형을 재분배로서 조정할 때 존재가능한 모든 조합을 적절히 고려해야 한다는 점이다.

이상과 같은 가정과 정의는 6가지 경우로 표현됨을 알 수 있고 다음과 같다.

1. $s_1 > x_1$, $s_2 > x_2$
   $(s_1 - x_1) + (s_2 - x_2)$ 잉여재고
2. $s_1 < x_1$, $s_2 < x_2$이고 $s_1 + s_2 > x_1 + x_2$
   $LR_2 \rightarrow LR_1$ 재분배 $(x_1 - s_1)$, $(s_1 + s_2) - (x_1 + x_2)$ 시스템 잉여재고
3. $s_1 < x_1$, $s_2 > x_2$이고 $s_1 + s_2 < x_1 - x_2$
   $LR_2 \rightarrow LR_1$ 재분배 $(s_2 - x_2)$, $(x_1 + x_2) - (s_1 + s_2)$ 시스템 초과수요
4. $x_1 > s_1$, $x_2 > s_2$
   $(x_1 - s_1) + (x_2 - s_2)$ 초과수요
5. $x_1 < s_1$, $x_2 > s_2$이고 $x_1 + x_2 < x_1 + s_2$
   $LR_1 \rightarrow LR_2$ 재분배 $(x_2 - s_2)$, $(s_1 + s_2) - (x_1 + x_2)$ 시스템 잉여재고
6. $x_1 < s_1$, $x_2 > s_2$이고 $x_1 + x_2 > s_1 + s_2$
   $LR_1 \rightarrow LR_2$ 재분배 $(s_1 - x_1)$, $(x_1 + x_2) - (s_1 + s_2)$ 시스템 초과수요

기대유지비용은 $s_1 + s_2 > x_1 + x_2$인 경우이며 1, 2, 5일 때이므로
유지비용은 다음과 같다.

$$\text{유지비용}(1,\ 2,\ 5) = h\int_{1,2,5} (s_1 + s_2 - x_1 - x_2)\, f(x_1) f(x_2)\, dx_1 dx_2 \quad (1)$$

재분배 발생은 4가지 경우이므로 다음과 같다.

1) 경우 2의 기대재분배비용

$$r\int_{x_2=0}^{s_2}\int_{x_1=s_1}^{s_1+s_2-x_2} (x_1 - s_1) f(x_1) f(x_2)\, dx_1 dx_2 \quad (2)$$

2) 경우 3의 기대재분배 비용

$$r\int_{x_2=0}^{s_2}\int_{x_1=s_1+s_2-x_2}^{\infty} (s_2 - x_2) f(x_1) f(x_2)\, dx_1 dx_2 \quad (3)$$

3) 경우 5의 기대재분배 비용

$$r\int_{x_1=0}^{s_1}\int_{x_2=s_2}^{s_1+s_2-x_1} (x_2 - s_2) f(x_2) f(x_1)\, dx_2 dx_1 \quad (4)$$

4) 경우 6의 기대재분배 비용

$$r\int_{x_1=0}^{s_1}\int_{x_2=s_1+s_2-x_1}^{\infty}$$

$$(s_1-x_1)f(x_2)f(x_1)\,dx_2dx_1 \qquad (5)$$

한편 품절비용은 $s_1+s_2<x_1+x_2$인 경우이며 3, 4, 6일때 이므로 다음과 같다.

품절비용(3, 4, 6)

$$=p\int_{3,4,6}(x_1+x_2-s_1-s_2)$$

$$f(x_1)f(x_2)\,dx_1dx_2$$

$$=p\int_{x_2=0}^{\infty}\int_{x_1=0}^{\infty}(x_1+x_2-s_1-s_2)f(x_1)f(x_2)$$

$$dx_1dx_2-p\int_{1,2,5}(x_1+x_2-s_1-s_2)$$

$$f(x_1)f(x_2)\,dx_1dx_2$$

$$=p\Big\{(\bar{x}_1+\bar{x}_2-s_1-s_2)+\int_{1,2,5}(s_1+s_2$$

$$-x_1-x_2)f(x_1)f(x_2)\,dx_1dx_2\Big\} \qquad (6)$$

이제 시스템 기대 총비용 $T(s_1,\ s_2)$는

$$T(s_1,\ s_2)=(h+p)\int_{x_1+x_2\leq s_1+s_2}$$

$$(s_1+s_2-x_1-x_2)f(x_1)f(x_2)\,dx_1dx_2$$

$$+p(\bar{x}_1+\bar{x}_2-s_1-s_2)$$

$$+r\int_{x_2=0}^{s_2}\Big\{\int_{x_1=s_1}^{s_1+s_2-x_2}$$

$$(x_1-s_1)f(x_1)\,dx_1$$

$$+\int_{x_1=s_1+s_2-x_2}^{\infty}$$

$$(s_2-x_2)f(x_1)\,dx_1\Big\}f(x_2)\,dx_2$$

$$+r\int_{x_1=0}^{s_1}\Big\{\int_{x_2=s_2}^{s_1-s_2-x_1}(x_2-s_2)$$

$$f(x_2)\,dx_2+\int_{x_2=s_1+s_2-x_1}^{\infty}$$

$$(s_1-x_1)f(x_2)\,dx_2\Big\}f(x_1)\,dx_1 \qquad (7)$$

최적 보유량을 얻기 위해 s_1, s_2에 대해 풀면

$$P(x_1+x_2<s_1+s_2)=\frac{p-rF(s_1)}{h+p-r}$$

$$=\frac{p-rF(s_2)}{h+p-r} \qquad (8)$$

으로 되며, 여기서 $F(s_1)=F(s_2)$임을 알 수 있고 (8)은

$$\frac{p-rF(s_1)}{h+p-r}\leq 1\text{이므로}$$

$$\frac{h}{1-F(s_1)}\Big(=\frac{h}{1-F(s_2)}\Big)>r \qquad (9)$$

이다.

3. 문제의 설정 및 분석(n개 지역)

두개 지역문제에서 얻은 결과를 이용하여 n개 지역문제를 설정할 수 있다. i번째 지역에서의 수요의 확률밀도함수를 $f(x_i)$라 하자. i번째 곳에서 j번째 곳으로 한단위 이전에 필요한 비용은 단위수에 비례한다고 가정하고 한곳의 품절은 다른곳의 잉여분으로 부분적 또는 완전하게 보충시키는 것으로 한다. 지역 1의 수요량을 x_1라 하고, 또한

$$X = x_2 + x_3 + x_4 - \cdots\cdots + x_n$$

$$S = s_2 + s_3 + s_4 + \cdots\cdots + s_n$$

이라 놓자. 이때 $X \leqq S$이면 지역 1을 제외한 모든 지역의 공급은 $(n-1)$개 지역들의 총수요에 충분히 대응할 수 있음을 알 수 있으며, 이것은 지역 1의 재고로 $(n-1)$개 창고로의 보충은 품절발생시 요구되지 않는다는 것이다. 만약 두 지역간의 재분배 비용이 다르게 되거나 $(n-1)$개 지역 자체적으로 충분한 보유를 못하고 있지만 않으면 성립된다.

이제 x_1과 X, s_1과 S로 이루어지는 조합을 열거하면 다음과 같다.

1) $s_1 > x_1$, $S > X$
 최소한 x_1에 의한 재분배 비용은 상관없게 되며 $x_2 \cdots\cdots x_n$사이에는 s_1과 독립적인 재분배비용이 존재할 수 있고 $s_i (i=2, 3, \cdots\cdots, n)$의 함수이다.

2) $s_1 < x_1$, $S > X$, $s_1 + S < x_1 + X$
 LR_1으로 재분배 $(x_1 - s_1)$, $(s_1 + S) - (x_1 + X)$시스템 잉여재고

3) $s_1 < x_1$, $S > X$, $s_1 - S < x_1 + X$
 LR_1으로 재분배 $(S - X)$, $(x_1 + X) - (s_1 + S)$시스템 초과수요

4) $x_1 > s_1$, $X > S$
 초과수요 $(x_1 - s_1) + (X - S)$

5) $x_1 < s_1$, $X > S$, $x_1 + X < s_1 + S$
 LR_i로 재분배 $(X - S)$, $(s_1 + S) - (x_1 + X)$ 시스템 잉여재고

6) $x_1 < s_1$, $X > S$, $x_1 + X > s_1 + S$
 LR_i로 재분배 $(s_1 - x_1)$, $(x_1 + X) - (s_1 + S)$ 시스템 초과수요

결국 x_1과 X는 두개의 독립적인 관계를 갖는 문제와 유사하게 전개됨을 알 수 있고 시스템 기대 총비용 $T(s_1, S)$는 지역 2에서 N사이의 기대재분배비용 $g(s_2, \cdots, s_n)$을 고려하면

$$T(s_1, S) = (h+p) \int_{x_1 + X \leqq s_1 + S} (s_1 + S - x_1 - X) f_1(x_1) f(X)\, dx_1 dX$$

$$+ p(\bar{x}_1 + \bar{X} - s_1 - S)$$

$$+ r \int_{X=0}^{S} \left\{ \int_{x=0}^{s_1 + S - X} (x_1 - s_1) f(x_1)\, dx_1 + \int_{x_1 = s_1 + S - X}^{\infty} (S - X) f(x_1)\, dx_1 \right\} f(X)\, dX$$

$$+ r \int_{x_1=0}^{s_1} \left\{ \int_{X=0}^{s_1 + S - x} (X - S) f(X)\, dX + \int_{X = s_1 + S - x_1}^{\infty} (s_1 - x_1) f(X)\, dX \right\}$$

$$f(x_1)\, dx_1 + g(s_2, \cdots, s_n) \qquad (10)$$

으로 나타낼 수 있으며 s_1에 관해 풀고 모든 $F_i(s_i)$가 동일함을 고려하면

$$P(x_1 + X \leqq s_1 + S)$$

$$= P(x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq s_1 + s_2 + \cdots + s_n)$$

$$= \frac{p - rF(s_1)}{h + p - r} \qquad (11)$$

$$P(x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq s_1 + s_2 + \cdots + s_n)$$

$$= \frac{p - rF_i(s_i)}{h + p - r} \qquad (12)$$

$$\frac{h}{1 - F_i(s_i)} \geqq r \qquad (13)$$

또 (12)의 결과로 개개의 기초최적보유량에 대한 확률의 상한에 관한 정리를 수립할 수 있다.

<정리> 기초 최적보유량을 결정하기 위한 확률의 상한은 모든 $s_i (s_i \geqq 0)$에 대해 $F_i(s_i) \leqq$

$p/(h+p)$이다.

(증명)

$$P(x_1+X \leq s_1+S)=P(r)=\frac{p-rF_i(s_i)}{h+p-r}$$

이므로

$$\frac{d}{dr}P(x_1+X \leq s_1+S)=P'(r)$$

$$=\frac{p-(h+p)F_i(s_i)}{(h+p-r)^2}$$

만일 $P'(r)>0$이면 $p/(h+p)>F_i(s_i)$이고, $P'(r)<0$이면 $p/(h+p)<F_i(s_i)$이다.

이제 $p/(h+p)<F_i(s_i)$ 일때 $P'(r)<0$이므로 $P(r)$은 r의 감소 함수임을 알 수 있다.

즉 $P(r) \geq P(r:\max)=1$ 또 (13)로부터 $(r:\max)=h/\{1-F_i(s_i)\}$이 된다. 이것은 모든 r에 대해 $P(r) \leq 1$이어야 하므로 성립될 수 없다.

즉 $P/(h+p) \geq F_i(s_i)$임을 알 수 있다.

4. 문제의 해법

최적조건 (12)와 <정리>를 이용하여 총비용을 최소로 하는 최적 보유량 정책을 결정하기 위한 알고리즘은 다음과 같고 그 순서도는 Figure 2이다.

<알고리즘>

단계 1 : <정리>를 이용하여 보유량 s_1에 대한 확률$F(s_1)$을 찾고 최적수준 $s_1^{(1)}$을 얻는다. 여기서 첨자 (n)은 각지역의 최적수준을 나타낸다.

단계 2 : 주어진 확률함수를 이용하여 $F_1(s_1)=F_2(s_2)$로 놓고 두지역에서의 s_1에 관한 관계식을 구성한다.

단계 3 : x_1++x_2에 대한 합의분포함수를 구한다.

단계 4 : 단계 3에서 구한 합의분포와 최적조건 (12) 그리고 단계 2에서 구한 관계식을 이용하여 s_1에 관한 방정식으로 유도한다.

단계 5 : 단계 4로부터 $s_1^{(2)}$를 얻고 단계 2로부터 $s_2^{(2)}$를 구한다.

단계 6 : 주어진 확률함수로부터 $F_1(s_1)=\cdots\cdots=F_i(s_i)$로 놓고 s_i에 대한 관계식을 구성한다.

단계 7 : 단계 3에서 단계 5에서처럼 규정된 s_i까지 반복 수행시킨다.

5. 수치예제

Figure 2의 알고리즘과 Table 1의 입력자료를 이용하여 얻은 결과가 Table 2에 나타나 있다.

3가지 서로 다른 재분배 비용과 6개의 하위지역에 대한 최적재고량이 구해졌다. 재분배 비용이 클수록 재고단위가 각 지역별에 따라 증가하고 있다. 이것은 재분배의 목적이 품절을 줄이려는 것이기 때문에 품절비용이 커지면 재고보유량을 늘이는 것과 동일한 의미를 갖는다. 다시말해 재분배비용이 너무 크게 되면 재분배량을 줄이는 것이 나으므로 재고보유량을 증가시키게 된다는 것과 일치한다.

지역에 따른 시설고정비용을 고려하지 않았으나 하위지역의 수가 크면 품절이 발생한 지역에 대해 재분배를 수행할 기회가 많다는 뜻이므로 K에 관계없이 재고보유량이 감소하고 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

시스템 보충간에는 시간이 경과함에 따라 하위 재고점에서 수요의 랜덤성에 의해 재고수준에 불균형문제가 발생하는데, 이때 기대품절이

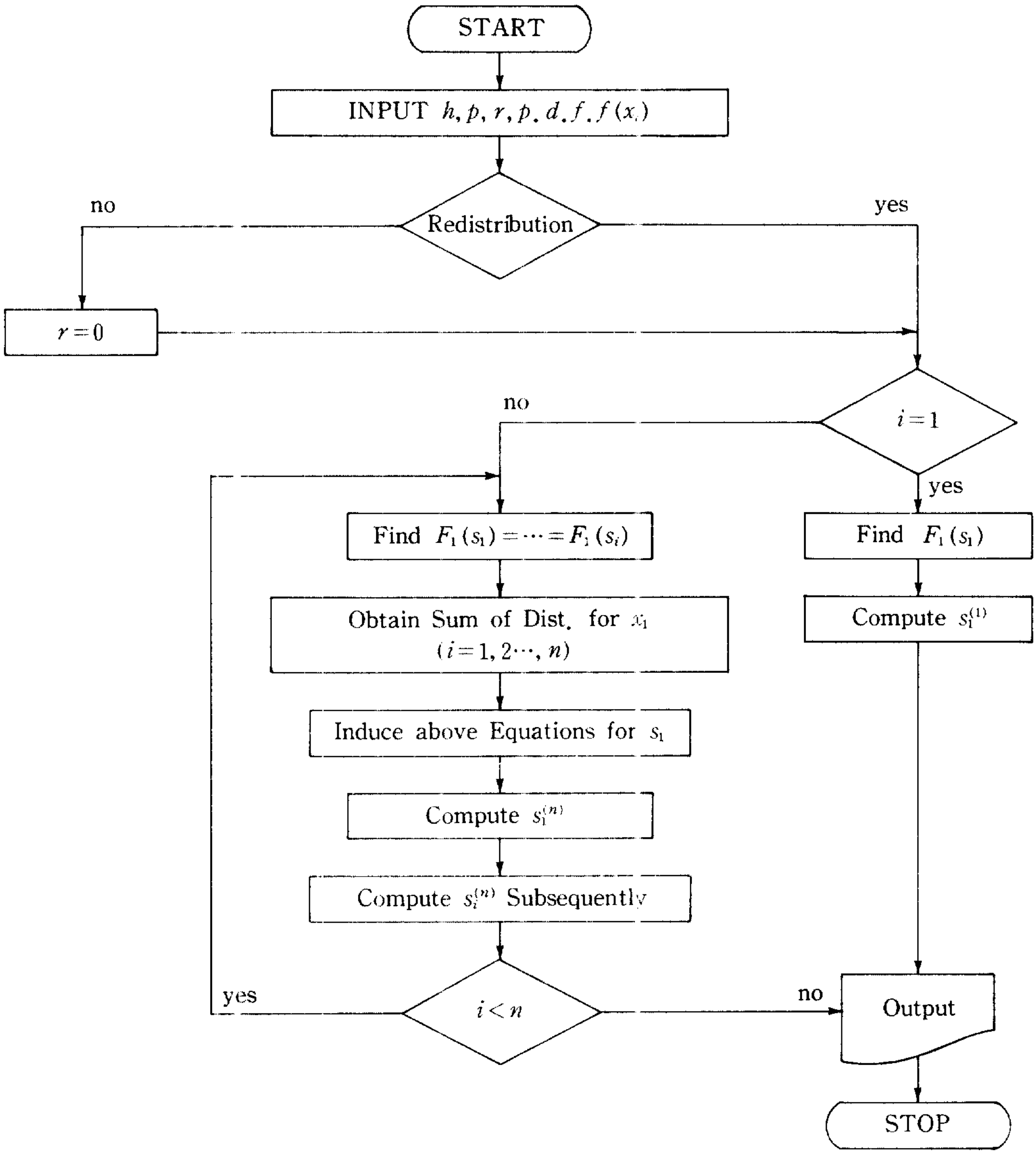

Figure 2. Flowchart of the Solution Procedure

Table 1. Input Data of Example

Dist. of Demand \ n	1	2	3	4	5	6
$N(\mu, \sigma)$	$N(200, 40)$	$N(400, 80)$	$N(300, 50)$	$N(350, 70)$	$N(400, 60)$	$N(350, 50)$
$h=1$ $p=5$ $r=0.1,\ 0.2,\ 0.3$						

Table 2 Optimal Stock with Redistribution

k \ n (Optimal Stock)		$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n)}$	$S_3^{(n)}$	$S_4^{(n)}$	$S_5^{(n)}$	$S_6^{(n)}$
0.1	1	238.8					
	2	230.7	461.4				
	3	224.6	449.2	330.7			
	4	221.8	443.5	327.2	388.1		
	5	218.8	437.6	323.5	382.9	428.2	
	6	217.1	434.3	321.4	379.9	425.7	371.4
0.2	1	238.8					
	2	231.7	463.4				
	3	225.7	451.5	332.2			
	4	222.1	444.3	327.7	388.8		
	5	219.7	439.4	324.7	384.5	429.6	
	6	218.0	436.0	322.5	381.5	427.0	372.5
0.3	1	238.8					
	2	233.3	466.6				
	3	227.1	454.2	333.9			
	4	223.4	446.7	329.2	390.9		
	5	220.8	441.6	326.0	386.4	431.2	
	6	219.0	438.0	323.8	383.3	428.5	373.8

예상되는 기간에서 재분배를 허용하는것이 아니라 실제로 기간말에서 나타나는 재고부족은 잉여가 있는 다른지역에서의 재고로 직접 충족 시키는 것이 현실적이다.

n개 지역에 동시적으로 재고결정을 해야하는 중앙통제 재고관리문제로서 기간중에 품절이 발생했을때 이의 보충을 중앙창고인 상위 재고점으로 사후주문이나 취소를 결정하기전에 잉여가 있는 지역의 재고를 먼저 재분배를 통해 만족시키는 경우 최적재고량을 설정하는 문제와 재분배 효과를 분석하고 있다.

수치예제에서 3가지 다른 재분배 비용과 6개의 하위지역에 대한 최적재고량을 구했고 (Table 2), 재분배의 목적이 품절을 줄이려는 것이기 때문에 품절비용이 커지면 재고보유량을 늘이는 것과 같은 의미를 갖는다. 재분배비용이 작게 유지될 수 있으면 재고 보유량을 줄일 수 있게된다. 또 지역에 따른 시설 고정비용을 고려하지 않았으나 하위지역의 수가 크면 품절이 발생한 지역에 대해 재분배를 수행할 기회가 많으므로 r에 관계없이 재고 보유량이 감소하고 있음을 알 수 있다.

끝으로 다른 재분배 비용과 최소 시스템 재고수준을 유지할 수 있는 n지역 설정문제가 기대된다.

REFERENCES

1. Allen, S. G. (1961), *"A Redistribution Model with Set-up Charge"*, MS, Vol. 8, No. 1, pp. 99-108.
2. Clark, A. J. (1972), *"An Informal Survey of Multi-Echelon on Inventory Theory"*, NRLQ, Vol. 19, No. 4, pp. 621-650.
3. Das, C. (1975), *"Supply and Redistribution Rules for Two-Location Inventory Systems : One-Period Analysis"*, MS, Vol. 21, No. 7, pp. 765-776.
4. Gross, D. (1963), *"Centralized Inventory Control in Multilocation Supply Systems"*, Chap. 3 in H. Scarf. D, Gilford, and M, Shelly (eds) : Multistage Inventory Models and Techniques (Stanford University Press, Stanford, Calif.).
5. Hadley, G. and Whitin, T. M. (1961), *"A Model for Procuremeut, Allocation, and Redistribution for Low Demand Items"*, NRLQ, Vol. 8, pp. 395-414.
6. Hoadley, B. and Heyman, D. P. (1980), *"A Two-Echelon Inventory Model with Purchases, Dispositions, Shipments, Returns and Transhipments"*, NRLQ, Vol. 24, No. 1, pp. 1-19.
7. Love, R. F. (1967), *"A Two-Station Stochastic Inventory Model with Exact Methods of Computing Optimal Policies"*, NRLQ, Vol. 14, No. 2, pp. 185-217.
8. Schultz, C. R. (1983), *"Computing Demand Properties at the Wholesale Warehouse Level"*, NRLQ, Vol. 30, No. 1, pp. 37-48.
9. Schwarz, L. B., Deuermeyer, B. L. and Badinelli, R. D. (1985), *"Fill-Rate Optimization in a One-Warehouse N-identical Retailer Distribution System"*, MS, Vol. 31, No. 4, pp. 448-498.