Journal of the KSQC
Vol. 17, No. 2, 1989

Travel-Time 모델을 利用한 最適 서어비스 水準 決定에 관한 硏究

A Study on the Determination of the Optimal Service Level by the Travel-Time Models

朴 炳 基*
鄭 鍾 植**

ABSTRACT

In order to determine the level of service which minimizes the total of expected cost of service and the expected cost of waiting for that service, the important considerations are to evaluate the distance traveled to and from a service facility (D) and the expected number of mechanics in queueing system (L).

The travel-time moels are very useful when the servers must travel to the customer from the service facility.

Thus, in this paper we studied on the determintion of the optimal service level by the travel-time models.

In order to decide the optimal service level, (D) has been introduced as a uniform distribution and (L) has been introduced as $M/M/S$ model of queueing theory.

I. 序 論

企業體중 製造業體 內部의 서어비스 시스템은 여러가지로 分類할 수 있다. 즉 資材保管所에서 資材必要量을 生産라인에 拂出하는 資材取扱시스템, 修理할 機械를 修理工이 修理하는 整備시

* 全北大學校 工科大學 敎授
** 全州工業專門大學 工業經營科 助敎授

스템, QC要員과 調査品目과의 檢査시스템등이 있다.

따라서 위에 관련된 제반시스템들에 대한 最適意思決定을 위하여 待期行列시스템에서 發生되는 待期費用, 서어비스費用, travel 費用의 總費用을 最小化하는 最適 서어비스 水準決定에 대하여 硏究하였다.

本 論文에서는 이의 問題解決을 위하여 待期行列 model을 利用하였는데 여러 가지 model 중 λ와 s를 모르는 경우를 가정한 Queueing Model을 가지고 關係總費用이 最小인 서어비스 水準決定에 대한 事例硏究를 다루었으며 특히 서어비스 시스템에서 問題가 되나 Queueing Model로 해결이 않되는 travel 距離, travel 費用을 중심적으로 硏究하여 實用化를 期하였다.

II. 最適 서어비스 水準의 決定에 대한 考察

1. 一般 model의 $E(TC)$에 대한 考察

待期行列에 따른 費用關係를 살펴보면 서어비스 費用(cost of service)과 待期費用(cost of waiting)과 같이 서로 相反된 費用이 있다. 즉 待期現象에서 서어비스 施設을 增加시키면 서어비스 費用은 增加되고 反對로 待期費用은 減少한다. 또한 서어비스 施設을 減少하면 서어비스 費用은 減少되나 待期費用은 增加한다.

따라서 이 두가지의 關係總費用 $E(TC)$을 最小化하는

$$\text{Minimize } E(TC) = E(SC) + E(WC)$$

인 점에서 서어비스 水準을 決定한다.

$E(WC)$는 製造業體 內部의 서어비스 시스템에서 待期費用을 顧客(機械工 및 修理機械 등)이 待期함으로써 잃는 生産額을 費用으로 換算한 것이다.

따라서 待期行列 시스템에서 待期하는 顧客수가 增加하면 그만큼 相對的으로 待期費用이 增加한다.

이를 式으로 表示하면

$$E(WC) = E\{g(N)\}$$

이다. 즉

$$E(WC) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) P_n$$

여기에서 $g(N)$이 一次式이면

$$g(N) = C_w N,$$

C_w는 各 顧客에 대한 單位時間當 待期費用이므로 이 경우

$$E(WC) = C_w \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = C_w L \quad \cdots\cdots(1)$$

이 된다.

2. λ와 s가 未知인 model의 $E(TC)$에 대한 考察

定義 : C_s = 單位 時間當 server의 限界費用

C_f = 單位時間當 서어비스 施設當의 서어비스 固定費

C_t = 各 顧客의 單位時間當 travel time cost (C_w)

λ_p = 母集團으로부터의 平均倒着率

n = 서어비스 施設의 數 $= \lambda_p/\lambda$

μ = 平均 서어비스率

s = 서어비스 施設內의 servers의 數

旣知 : μ, C_s, C_f, λ_p

味知 : λ, s

硏究對象 : Minimize $E(TC)$

여기에서 모든 서어비스 施設의 單位時間當 總費用은

$$E(TC)=n[(C_f+sC_s)+E(WC)] \quad (2)$$

이다.

그러나 이 式은 하나의 重要한 缺陷을 갖고 있는데, 이것은 서어비스 施設에서 待期費用과 서어비스 費用만을 考慮한 것이지 待期行列 시스템(母集團)內에서의 顧客이 서어비스 施設까지의 往復에 所要된 時間(travel time)에 대한 費用을 無視했다는 점이다. 그리고 待期行列 시스템內에 단 하나의 서어비스 施設만을 갖는 것은 travel time이 많이 所要되므로 合理的인 水準까지 travel time을 줄이기 위해 서어비스 시스템에 充分한 여러개의 서어비스 施設을 設置하여야 한다.

따라서 顧客이 서어비스 施設에 倒着하여 서어비스를 받고 다시 원래 位置로 되돌아 갈때까지의 總待期時間은 $(W+T)$이다. (단, W= 各 顧客이 서어비스 시스템에서의 待期時間)

그러므로 $E(TC)$는 W에 따른 待期時間 費用과 travel time (T)에 따른 travel time 費用의 合이 된다. 따라서 W는 式(2)에서의 $E(WC)$이며 또한 travel time cost가 T에 比例하고 travel time cost를 C_t라고 하면

$$E(TC)=n[(C_f+sC_s)+E(WC)+\lambda C_t E(T)] \cdots\cdots\cdots(3)$$

이 된다.

3. $E(T)$에 대한 考察

$E(T)$는 母集團으로부터 주어진 서어비스 施設까지 往復에 所要된 平均時間이며 이 問題를 解決하기 위하여 다음 몇가지를 假定한다.

i) 서어비스 施設은 母集團에 均一하게 配置한다.

ii) 顧客은 서어비스를 받은 후 원래 位置로 되돌아간다.

iii) Travel의 平均速度는 travel의 距離와 無關하다.

iv) 모든 travel은 直線으로 하고 母集團地域의 側面은 平行이다.

基本的 travel time의 model

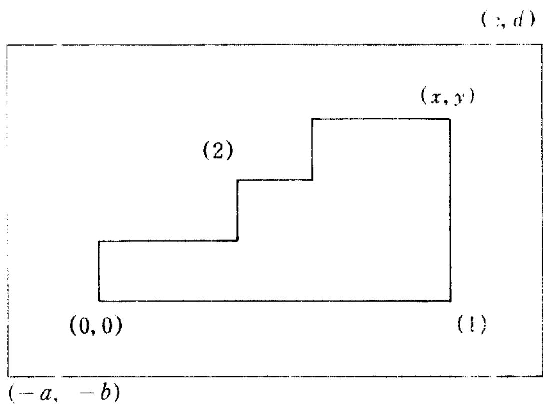
定義 : T=travel time

v=travel의 平均速度

a, b, c, d=[그림 1]에서와 같이 서어비스 施設이 割當된 그 施設로부터 地域境界까지의 각각의 距離

既知 : v, a, b, c, d

未知 : $E(T)$



[그림 1] 基本的인 travel time model에 있어서의 位置表示

[그림 1]에서 (x, y)는 顧客의 原位置를 나타내고, $(0, 0)$은 서어비스 施設의 位置를 나타내며, 선은 顧客이 travel하는 過程을 나타낸다. 이때 1, 2의 travel 距離는 같다.

또한 (x, y)의 座標값은 確率變數 X, Y이다. 여기에서 X의 範圍는 $-a$에서 c까지이고 Y의 範圍는 $-b$에서 d까지이다.

任意의 顧客(x, y)이 서어비스施設 $(0, 0)$까지의 總 travel 距離는

$$D=2(|x|+|Y|)$$

이고

$$T=\frac{D}{v}$$

이기 때문에

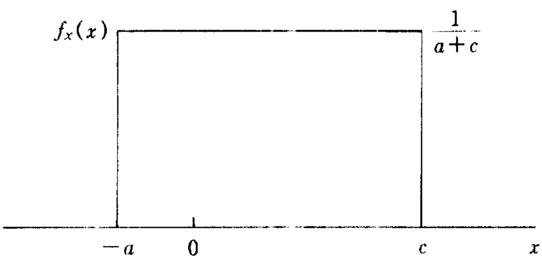
$$E(T)=\frac{2}{v}(E\{|X|\}+E\{|Y|\}) \quad \cdots\cdots(4)$$

이다.

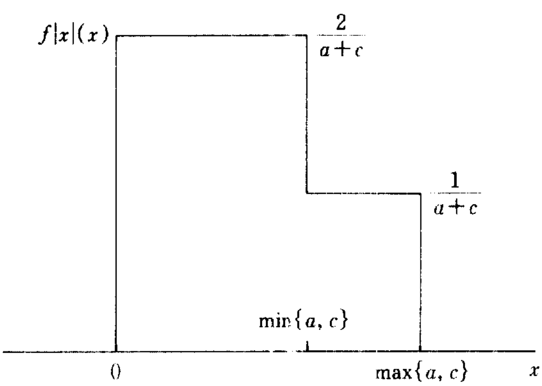
따라서 確率分布 $|X|$와 $|Y|$를 求하고 $E(T)$를 計算해 보기로 한다.

a) $E\{|X|\}$의 計算

$|X|$의 確率分布는 確率變數 X로부터 얻을 수 있다. 즉 顧客이 割當된 地域(母集團)의 도처에 分布되어 있고 直四角形의 높이는 $X=x$의 값에 대하여 항상 同一하다고 假定하였을 때 X는 [그림 2]에서와 같이 $-a$에서 c까지의 一樣分布가 된다.



[그림 2] X의 確率密度函數



[그림 3] $|X|$의 確率密度函數

또 x와 $-x$에 대한 確率密度函數(p, d, f)값은 $|x|=|-x|$이므로 [그림 3]과 같은 $|X|$의 確率分布를 가진다.

그러므로

$$E(X)=\int_{-a}^{c} xf_x(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{c+a}\int_{-a}^{c} xdx$$

$$=\frac{c-a}{2}$$

$$E(|x|)=\int_0^{\max\{a,c\}} xf_{|x|}(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\min\{a,c\}}\frac{2x}{a+c}dx$$

$$+\int_{\min\{a,c\}}^{\max\{a,c\}}\frac{x}{a+c}dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{a+c}\Big[(\min\{a,c\})^2$$

$$+(\max\{a,c\})^2\Big]$$

$$=\frac{a^2+c^2}{2(a+c)}$$

이다.

b) $E\{|Y|\}$의 計算

直四角形의 길이는 $Y=y$의 값에 대하여 항상 같다고 보았을 때 Y는 $-b$에서 d까지의 連續形 一樣分布가 된다. 또한 y와 $-y$에 대한 確率密度函數의 값은 $|y|=|-y|$이므로 다음과 같은 $|Y|$의 確率分布를 갖게 된다. 즉

$$E[|Y|]=\frac{b^2+d^2}{2(b+d)}$$

c) $E(T)$의 값

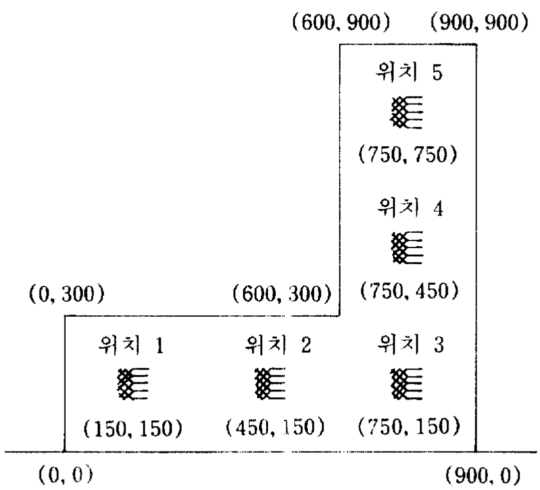
결과적으로

$$E(T)=\frac{1}{v}\left(\frac{a^2+c^2}{a+c}+\frac{b^2+d^2}{b+d}\right) \cdots\cdots(5)$$

이 된다.

III. 最適서어비스 水準의 實證的 考察

[그림 4]와 같이 工場에 工具 및 部品保管所(서어비스施設)를 均一히게 配置시킨다. 그리고 工場內에 있는 機械工들(顧客)은 [그림 4]의 工場地域 도처에 均一하게 分布되어 있고 이 機械工들은 作業에 필요한 工具 및 部品을 얻기 위해 그때그때 가장 가까운 工具 및 部品 保管所로 걸어서 찾아간다고 하자.



[그림 4] 5個所의 保管所 配置案

여기에서 最高經營者가 決定해야 될 問題는 工具 및 部品保管所가 적음에 따라 機械工들이 工具 및 部品을 얻기 위해 所要되는 時間에 대한 費用의 增加와 反對로 工具및 部品保管所를 增加시키거나 工具및 部品保管所 職員을 增加시킴에 따라 工具 및 部品保管所의 固定費 및 職員의 人件費 增加에 따른 $E(TC)$가 最小가 되는 서어비스의 水準 즉 保管所의 數 및 保管所 職員數를 決定하는 일이다.

$E(TC)$算出을 위한 各 計數値

$v=15,000$ feet/hour

$\mu=120$/hr

$C_f=$ ₩1,000/hr

$C_s=$ ₩1,500/hr

$\lambda_p=120$/hr

$C_t=$ ₩5,000/hr

그리고 工具 및 部品保管所의 配置案은 다음 5가지의 경우로 한다.

(1) 1案 : 1개의 工具 및 部品保管所 (위치 3)

(2) 2案 : 2 〃 〃 (위치 2, 4)

(3) 3案 : 3 〃 〃 (위치1, 3, 5)

(4) 4案 : 4 〃 〃 (위치1, 2, 4, 5)

(5) 5案 : 5 〃 〃 (위치1, 2, 3, 4, 5)

여기에서 가장 經濟的인 工具 및 部品保管所 및 職員의 數를 決定하기 위하여 먼저 $E(TC)$를 求하여야 한다. 또한 $E(TC)$를 求하기 전에 $E(T)$를 求한 다음 $E(TC)$의 最小費用點인 서어비스 水準을 決定하기로 한다.

1. 各 案에 대한 $E(T)$算出

i) 1案($n=1$)

[그림 4]에서와 같이 (x, y)座標에 대한 (0, 0)을 위치 3으로 決定한다. 따라서 하나의 工具 및 部品保管所로부터 全 地域을 서어비스한다.

여기에서 確率密度函數 X는 $X=x$인 각 값의 높이를 全 地域의 面積으로 나누어주므로서 [그림 5]와 같은 一様分布가 된다. 또한 x와 $-x$에 대한 確率分布 $|x|$는 [그림 6]과 같다.

따라서 $E\{|X|\}=\int_0^{750} x f_{|x|}(x)\,dx$

$$=\int_0^{150} x\left(\frac{1}{250}\right)dx$$

$$+\int_{150}^{750} x\left(\frac{1}{1,500}\right)dx$$

$$=225$$

그리고 $E\{|Y|\}$의 計算은 $|X|$의 計算과 똑같은 接近方法으로 算出한다. 즉 $E\{|Y|\}=225$
그러므로

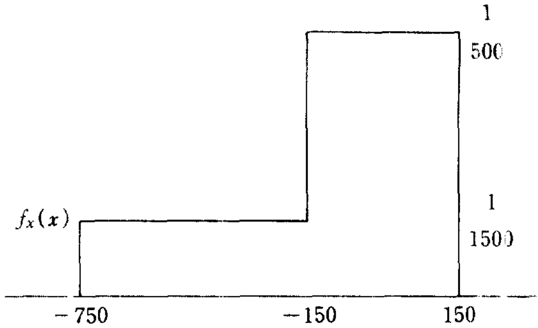
$$E(T)=\frac{2}{15,000\text{ft/hr}}(225+225)\,\text{ft}$$

$$=0.0667\text{hr}$$

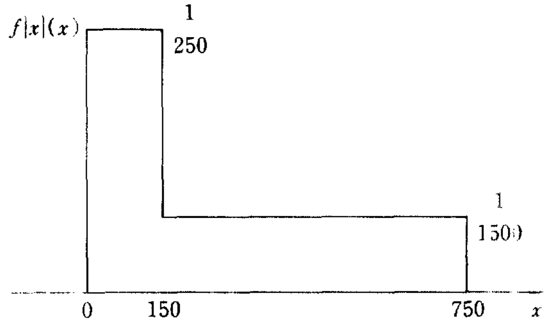
같은 方法으로 2案, 3案, 4案, 5案을 計算하면 <表 1-1>과 같다.

2. 各 案에 대한 $E(TC)$ 算出

여기에서 $E(TC)$는 式(3)과 式(1)을 利用한다.



[그림 5] 위치 3에서 x의 確率密度函數



[그림 6] 위치 3에서 $|x|$의 確率密度函數

<표 1-1> 各 案에 대한 $E(TC)$計算表

n		s	L	$E(T)$	C_f+sC_s	E(WC)	$C_tE(T)$	$E(TC)$
1	120	1	∞	0.6670	2,500	∞	40,020	∞
1	120	2	1.3333	0.667	4,000	6,667	40,020	50,687
1	120	3	1.0455	0.667	5,500	5,228	40,020	50,748
2	60	1	1.0000	0.0367	2,500	5,000	11,010	37,020
2	60	2	0.5333	0.0367	4,000	2,667	11,010	35,353
2	60	3	0.5030	0.0367	5,500	2,515	11,010	38,050
3	40	1	0.5000	0.0320	2,500	2,500	6,400	34,200
3	40	2	0.3428	0.0320	4,000	1,714	6,400	36,342
3	40	3	0.3340	0.0320	5,500	1,670	6,400	40,7[illegible]0
4	30	1	0.3333	0.0247	2,500	1,667	3,705	31,486
4	30	2	0.2540	0.0247	4,000	1,270	3,705	35,900
5	24	1	0.2500	0.0200	2,500	1,250	2,400	30,750
5	24	2	0.2020	0.0200	4,000	1,010	2,400	37,050

따라서

$$E(TC)=n[(1,000+1,500s)$$

$$+5,000L+\frac{120}{n}$$

$$\cdot 5,000E(T)]$$

가 된다.

그리고 L(工具 및 部品保管所에 있는 機械工의 數)은 待期行列 $M/M/S$의 모델로부터 L값을 求한다. 즉

$$L=\frac{s^2}{s\,!}\frac{\rho^{s+1}}{(1-\rho)^2}P_0+s\rho$$

$$P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(s\rho)^n}{n\,!}+\frac{(s\rho)^s}{(s-1)\,!\,(s-s\rho)}}$$

따라서 變數n(工具 및 部品保管所), s(工具 및 部品管理職員)에 대한 $E(TC)$算出 結果는 <表 1-1>과 같다.

<表 1-1>에서 알 수 있는 바와 같이 各各의 工具및 部品保管所에 1名의 職員을 배치하여 5個의 工具 및 部品保管所를 갖는 것이 最適 서어비스 水準이 된다.

IV. 結 論

本 論文은 關係總費用이 最小化가 되는 最適 서어비스 水準의 決定에 관하여 硏究하였다.

最適 서어비스 水準을 決定하는데 適用되는 $E(TC)$에 대해 特히 重要한 事項은 顧客이 서어비스 施設까지의 所要距離 (D)와 待期行列 시스템에서 待期하는 機械工의 平均數(L)의 計算이다.

여기에서 travel-time 모델은 서어비스를 받고자하는 顧客이 顧客으로부터 서어비스 施設까지 往復하여야 할때 매우 有用한 方法이기 때문에 travel-time 모델을 利用하여 서어비스 水準을 決定하였다.

이 最適서어비스 水準을 決定하기 위하여 D는 一樣分布를 利用하고, L은 待期行烈理論의 하나인 $M/M/S$ model을 利用하여 算出하였다.

이 硏究의 結果 그 機械會社에 있어 經濟的 서어비스 水準은 各各의 工具 및 部品保管所에 1人의 職員을 배치하여 5個의 工具 및 部品保管所를 갖게할 때 關係 總費用이 最小가 된다는 것을 알 수 있었다.

參 考 文 獻

1. Allen Arnold O., 1985, *"Probability, statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications"*, New York : Academic Press, pp. 211−213.
2. Frederick S. Hiller, Gerald J. Liebmann, 1980, *"Introduction to Operations Research. San Fransisco : Holden-Qay"*, Inc., pp. 467−480.
3. Kleinrock, Leonard, 1980, *"Queueing Systems"*, Vol. II : Computer Application, Wiley, New York,. pp. 23−30.
4. Newell, Gorden F., 1985, *"Applications of Queueing Theory"*, Chapman and Hall, London,. pp. 99−145.
5. Ralph M-Stair, Jr., Barry Render, 1978, *"Production and Operations Management"*, New York : Allyn and Bacon, Inc., pp. 324.
6. Richard C. Vaughn, 1977, *"Introdution to Industrial Engineering"*, Iowa State University Press, pp. 436.