

# 다공성 물질의 환형수직원통내에서의 자연대류 열전달 수치해석

## Numerical Study on Convective Heat Transfer within a Vertical Annular Porous Material

차 기 업\*, 김 종 보\*\*  
Ki Up Cha, Chong Bo Kim

### ABSTRACT

Numerical solutions for two-dimensional, steady, free convection are presented for a cylinder filled with saturated porous media. An annulus is bounded by inner wall with constant heat flux and two adiabatic horizontal walls with outer wall isothermally cooled.

Governing equations are numerically solved for the range of Aspect Ratio 1 to 20, Radius Ratio, 1 to 20, and Rayleigh number, 50 to  $10^4$  by Finite Difference method utilizing upwind scheme.

Results are presented in terms of stream lines and isotherms, temperature distributions and local Nusselt numbers at the heated wall. Average Nusselt numbers are also presented for the comparisons.

### 기 호 설 명

$A$ : 종횡비 ( $H/D$ ), m	$K$ : 다공성 물질의 침투율, $m^2$
$A_b$ : 면적, $m^2$	$k_m$ : 유체로 충전된 다공성 물질에서의 열전달 계수, $W/m^2-K$
$C$ : 일정 압력하의 유체의 비열, $J/kg-K$	$H$ : 환형 다공성 물질의 높이, m
$D$ : 다공성물질의 폭 ( $r_o - r_i$ ), m	$\overline{Nu}$ : 평균 Nusselt 수, $\overline{h}D/k_m$
$d$ : 평균입자 직경, m	$P$ : 압력 Pa
$g$ : 중력가속도, $m/s^2$	$q$ : 내벽에서의 열유속, $W/m^2$
$h_1, h_2$ : 피에조메타 수두, m	$Ra$ : Rayleigh 수, $(\rho g \beta K q D^2) / (\mu \alpha k_m)$
$h$ : 열전달 계수, $w/m^2-k$	$T$ : 온도, $^{\circ}K$
$\overline{h}$ : 내부벽에서의 평균 열전달 계수, $W/m^2-K$	$T_o$ : 외부벽의 온도, $^{\circ}K$
	$T$ : 일정온도의 환형벽의 온도차, $^{\circ}K$
	$V$ : 유체의 평균유속

\* 해연료주식회사

\*\* 인하대학교 공과대학 기계공학과

- $\bar{V}$  : 속도 벡터
- $r, z$  : 원통 좌표계, m
- $RD$  : 반경비( $r_o/r_i$ )
- $R$  :  $r$ 축에 대해 무차원화한 거리( $(r-r_i)/D$ )
- $Z$  :  $z$ 축에 대해 무차원화한 거리( $z/H$ )
- 〈그리스문자〉
- $\alpha$  : 다공성 물질의 열전도계수,  $k_m/\rho c$
- $\beta$  : 유체의 열팽창계수,  $K^{-1}$
- $\gamma$  : 반경비 파라메타( $D/r$ )
- $\epsilon$  : 공극율
- $\epsilon$  : 수렴조건
- $\theta$  : 무차원화된 온도,  $(T-T_o)/(qD/k_m)$
- $\mu$  : 유체의 점성계수,  $kg/m \cdot s$
- $\nu$  : 유체의 동점성계수,  $m^2/s$
- $\rho$  : 유체의 밀도,  $kg/m^3$
- $\Psi'$  : 유동함수
- $\Psi$  : 무차원화된 유동함수,  $(D/\alpha r_i H)\Psi'$
- 〈하첨자〉
- $i$  : 내부벽
- $o$  : 외부벽
- $p$  : 중심점

## 1. 서 론

유체로 충전된 다공성 물질내에서, 온도차로 인하여 발생하는 밀도 변화에 의한 자연 대류 현상은, 지표내부로의 오염물질의 확산, 건물의 단열, 열파이프 및 전자설비의 냉각등의 분야에서 응용되는 중요한 물리적 현상이다.

따라서 다공성 물질내에서의 자연대류에 대한 기본적인 연구가 실험 및 분석적 방법을 통해 진행되고 있으며, 특히 최근에는 다공성 물질로 된 밀폐공간 일부에 열유속을 가진 경우와 환형수직원통형의 경우에 관한 연구가 활발해지고 있다.

Bau와 Torrance<sup>1)</sup>는 아랫면에 열원을 가지고, 수직벽은 단열되어 있는 다공성 물질로 된 원통내에서의 유동 및 온도분포를 실험적 방

법으로 규명하였다.

Prasad와 Kulacki<sup>2)</sup>는, 두 수직벽이 각각 고온과 저온으로 등온으로 유지되고 상하 수평벽들이 단열되어 있는 경우를 다양한 종횡비와 Rayleigh 수에 대하여 환형수직원통형의 경우 수치적으로 해석하였고, Bejan<sup>3)</sup>은 양수 직벽에 일정한 열유속을 가지고 수평벽은 단열된 경우를 해석적 방법을 통해 규명하였다. 또한 Prasad와 Kulacki<sup>4)</sup>는 두 수직벽이 각각 고온과 저온으로 등온 유지되며, 수평벽은 단열된 다공성 물질로 된 사각형 단면의 경우를 수치적 방법을 통해 해석하였고, Reda<sup>5)</sup>는 내부벽에 열원을 가지고, 외부벽은 등온 유지되며, 윗면은 유체의 흐름이 자유로운 환형수직원통내에서, 반경비 23, 종횡비 1.3, 3.5에 대해 유동 및 온도분포를 실험 및 수치해석을 통해 규명하였다.

본 연구에서는 내부벽면에 일정한 열유속을 가지고, 외부벽은 등온 유지되며 나머지 벽은 단열된 다공성 물질로 된 환형수직원통내에서, 종횡비와 반경비를 각각 1에서 20까지, Ra를 50에서 10<sup>4</sup>까지 변화시키면서 이에 따른 충전유체의 유동, 온도분포 및 열전달량을 규명하기 위하여, 유한 차분법을 사용하여 수치적으로 해석하였다.

## 2. 수학적 모델링

### 2.1 Darcy의 법칙

Darcy의 법칙은, 다공성 물질내에서 유체의 흐름을 비압축성, 정상, 층류유동으로 가정하였을 때, 필터베드내를 흐르는 유체의 유량  $Q$ 는 단면적  $A_b$ 와 피에조미터 수두의 차 ( $h_1-h_2$ )에 비례하고, 길이  $l$ 에 반비례한다는 법칙이다. 정리하면,

$$Q = k_c \cdot A_b \cdot (h_1 - h_2) / l \dots\dots\dots (1)$$

여기서,

피에조수두는

$$h = p/\rho g + z \dots\dots\dots (2)$$

hydraulic conductivity

$$k_c = K\rho g/\mu \dots\dots\dots (3)$$

$K$ 는 침투율(Permeability)이다.

식(2), (3)을 식(1)에 대입하면,

$$Q = -\frac{K}{\mu} \cdot A_b \cdot \frac{d}{dl} (P + \rho g z) \dots\dots\dots (4)$$

이때 평균속도  $V$ 를 3차원 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{V} = -\frac{K}{\mu} (\nabla P - \rho \bar{g}) \dots\dots\dots (5)$$

2.2 Darcy법칙의 제한영역<sup>6)</sup>

다공성 물질의 평균 입자직경,  $d$ 에 대한 Reynolds 수는

$$Re = Vd/\nu \dots\dots\dots (6)$$

라 정의한다.  $V$ 는 다공성 물질내의 유체평균 속도이다.

Darcy-Weibach friction factor에 대한 정의를 다공성 물질내의 평균속도  $V$ 로 대치한 Fanning friction factor는

$$f = 2d(\Delta h/l)(g/V^2) \dots\dots\dots (7)$$

이 된다.

$f$ 와  $\frac{1}{Re}$ 이 선형적 관계를 갖는다고 가정하면,

$$f = c_1/(Vd) \dots\dots\dots (8)$$

로 표시되며  $c_1$ 는 비례상수이다.

식(8)을 식(7)에 대입하여  $V$ 에 대해 정리하면,

$$V = \frac{2dg}{c_1V}(\Delta h/l) \dots\dots\dots (9)$$

$$= c_2(\Delta h/l) \dots\dots\dots (10)$$

가 되며  $c_2 = \frac{2dg}{c_1}$ 이다.

식(10)은 비례관계를 만족하므로 선형적 관계를 갖는 낮은 Reynolds 수의 범위에서 Darcy의 비례관계식을 만족하며 Fig.1에 그 정당한 영역이 나타나 있다. 즉 식(6)의  $Re$ 가 10보다 적을 때 만족한다.

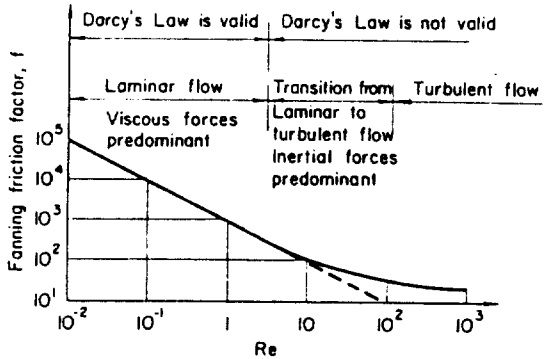


Fig.1 Schematic classification of flow through porous media

2.3 지배방정식

Fig.2는 본 연구에서 사용한 밀폐공간의 모형이다.

다공성 물질로 된 환형수직원통내에서의 자연대류에 대해, 중력항의 밀도를 제외한 유체의 물성치가 일정하며, 점성소산(viscous dissipation), 압축성 효과(compressibility effect) 및 복사열전달(radiation heat transfer)을 무시한다는 조건하에서 Darcy의 법칙을 기초로 한 2차원, 정상 유동에 대한 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

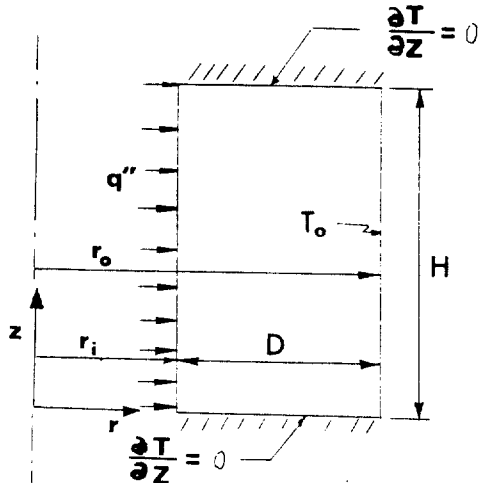


Fig.2 Vertical annulus, coordinate system, and thermal boundary

i) 연속 방정식

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rv)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

ii) 운동량 방정식

$$\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\mu}{K} u = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{K} v + \rho g = 0 \dots\dots\dots (13)$$

iii) 에너지 방정식

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \dots\dots\dots (14)$$

iv) 밀도 변화

$$\rho = \rho_r [1 - \beta(T - T_r)] \dots\dots\dots (15)$$

v) 경계 조건

경계면에서의 velocity slip을 허용한다.

$$r = r_i \text{에서 } q = -k_m \frac{\partial T}{\partial r} |_{r=r_i}, u = 0$$

$$r = r_o \text{에서 } T = T_o, u = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$z = 0, H \text{에서 } \frac{\partial T}{\partial z} = 0, v = 0$$

### 2.4 침투율(permeability)

침투율은 유체가 다공성 물질에 침투하는 정도를 나타내며, 유체의 특성과는 무관하고, 다공성 물질의 구조에 의해서만 결정된다. 침투율  $K$ 는 Kozeng-Carman<sup>7)</sup>의 식에 의하면

$$K = \frac{d^2}{180} \cdot \frac{\epsilon^3}{(1-\epsilon^2)} \dots\dots\dots (17)$$

이며  $d$ 는 다공성 물질의 평균입자직경이고,  $\epsilon$ 는 공극율(porosity)를 나타낸다.

### 2.5 열전도율

유체로 충전된 다공성 물질의 열전도율  $k_m$ 은 Kaffo와 Masuoka<sup>8)</sup>의 보정식을 통해 계산된다.

$$k_m = \epsilon k_f + (1-\epsilon) k_s \dots\dots\dots (18)$$

여기서  $k_f$ 는 유체,  $k_s$ 는 다공성 물질의 열전도율이다.

### 2.6 무차원 방정식

지배 방정식을 무차원 방정식으로 표현하기 위하여 다음과 같은 무차원변수 및 무차원수를 정의한다.

$$Z = \frac{z}{H}, R = \frac{r - r_i}{D}$$

$$Ra = \frac{\rho g \beta K q D^2}{\mu \alpha k_m}, \theta = (T - T_o) / \left( \frac{qD}{k_m} \right)$$

$$A = \frac{H}{D}, RD = \frac{r_o - r_i}{r_i}, \gamma = RD - 1 \dots\dots\dots (19)$$

여기서 유동함수  $\Psi'$ 은

$$u = -\frac{\partial \Psi'}{\partial z}, v = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial r} \dots\dots\dots (20)$$

로 정의하였으며,  $\Psi = (D/\alpha r_i H) \Psi'$ 로 무차원화 하였다.

위 무차원 변수 및 수를 사용하여 지배 방정식을 무차원화하여 정리하면 다음과 같다.

운동량 방정식은 다음과 같고

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{(\gamma R + 1)} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) + A^2 \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{(\gamma R + 1)} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) = Ra \cdot A \cdot \frac{\partial \theta}{\partial R} \dots\dots\dots (21)$$

에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Z} \left( \theta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left( \theta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial R} \left[ (\gamma R + 1) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{1}{A^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[ (\gamma R + 1) \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

경계 조건은

$$R = 0 \text{에서 } \frac{\partial \theta}{\partial R} = -1, \Psi = 0$$

$$R = 1 \text{에서 } \theta = 0, \Psi = 0 \dots\dots\dots (23)$$

$$Z = 0, 1 \text{에서 } \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0, \Psi = 0$$

### 3. 수치해석

Fig. 3은 무차원 방정식을 유한차분방정식으로 바꾸기 위해 사용한 검사체적(control

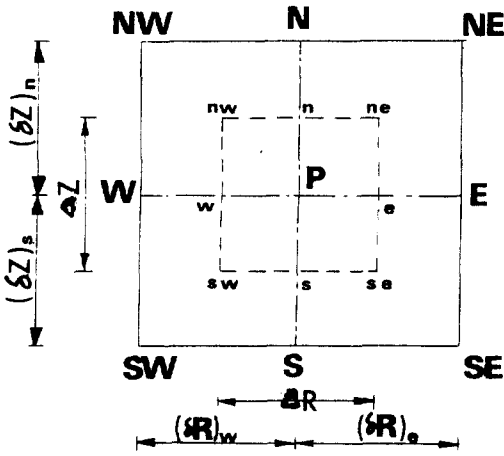


Fig.3 Control Volume for the two dimensional situation

volume)이다.

3.1 수치해석 방법

본 연구에서는 point iteration method를 사용하였으며 빠른 수렴을 위해 Rayleigh 수가 작을 때는 온도항에 overrelaxation factor (1.5-1.9)를 사용하였고, Rayleigh 수가 클 때에는 유동함수항에 underrelaxation factor (0.6-1.0)를 사용하였다.

수렴조건은 다음과 같다.

$$\left(1 - \frac{\phi^{n-1}}{\phi^n}\right)_{max} \leq \epsilon \dots\dots\dots (24)$$

여기서  $\phi$ 는 온도 및 유동함수이며  $\epsilon$ 는 두항에 공히  $5 \times 10^{-4}$ 을 사용하였다. 또한 각 식의 대류항(convection term)에 대해서는 up-wind scheme<sup>9)</sup>을 사용하였고 계산에 쓰인 격자배열은 양 수직 벽면에 조밀하게 배열하였고, 종횡비에 따라  $21 \times 21 - 41 \times 41$ 가지 변형시켰다.

3.2 열전달량의 계산

3.2.1 평균 Nusselt 수

계의 평균 Nusselt 수는 다음과 같이 계산된다.

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} \cdot D}{k_m} = \left(\frac{q}{\Delta T} \cdot D\right) / k_m \dots\dots\dots (25)$$

여기서  $\Delta T = T_{mean} - T_o$ 이다.  
무차원 변수의 정의로부터

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\bar{\theta}_i} \dots\dots\dots (26)$$

이 된다.

여기서  $\bar{\theta}_i$ 는 내부 벽면의 평균온도가 된다.

3.3 Flow-chart

Fig. 4는 본 연구에서 사용한 Program의 flow chart이다.

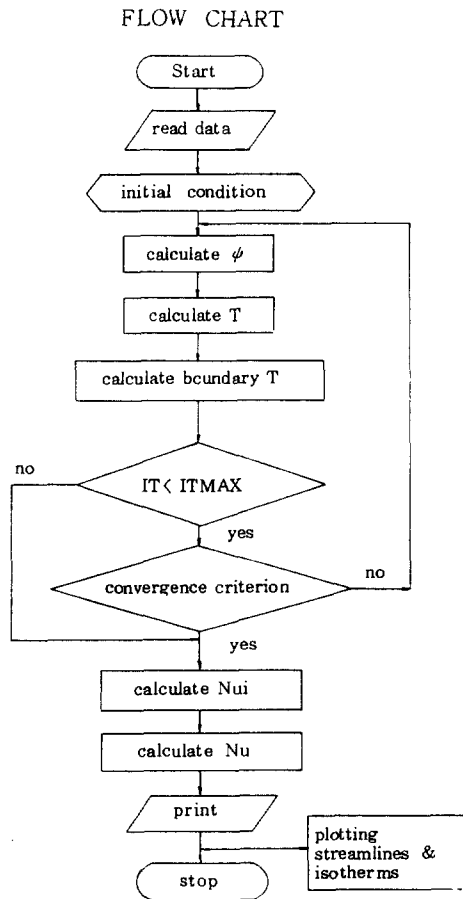


Fig. 4 Flow chart

4. 결과 및 고찰

4.1 등온선과 유선

Fig. 5~6은  $A=2, RD=2$ 로 고정하고 Ra

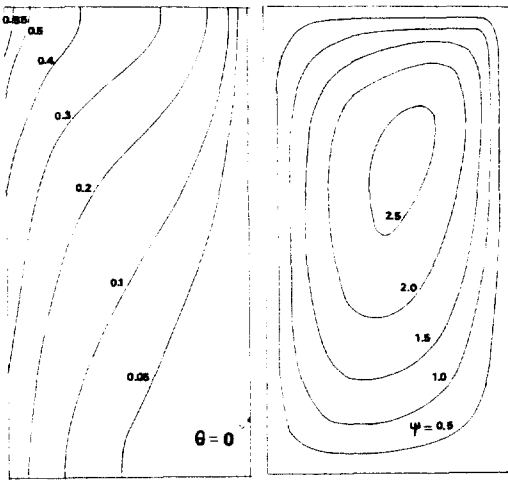


Fig.5 Isotherms and Streamlines for  $A=2$ ,  $RD=2$  and  $Ra=100$

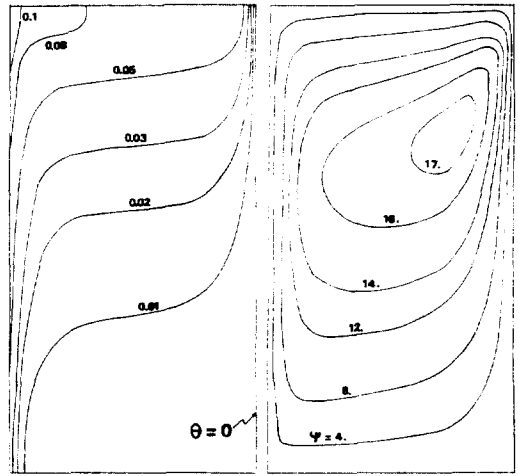


Fig.7 Isotherms and Streamlines for  $A=2$ ,  $RD=2$  and  $Ra=10,000$

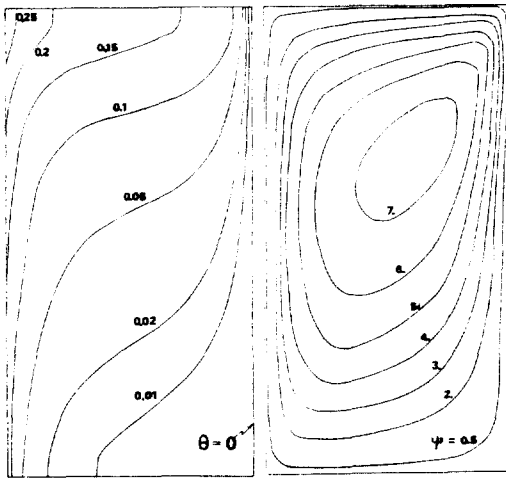


Fig.6 Isotherms and Streamlines for  $A=2$ ,  $RD=2$  and  $Ra=1,000$

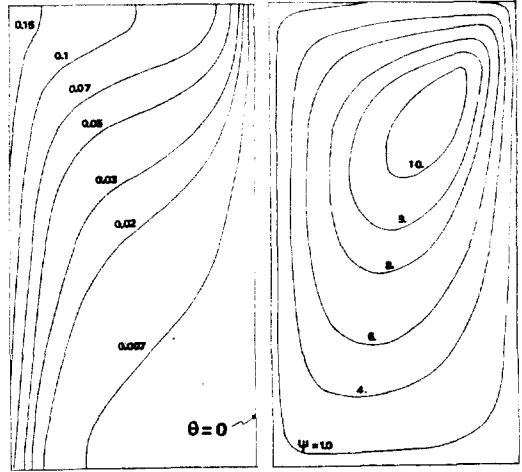


Fig.8 Isotherms and Streamlines for  $A=2$ ,  $RD=5$  and  $Ra=1,000$

를 100, 1,000, 10,000으로 변화시켰을 때, 이에 따른 등온선과 유선의 변화를 나타낸 것이다. 등온선은,  $Ra$ 가 커짐에 따라 대류 열전달 효과의 증대로 열원을 가진 내부벽 상측으로 침투하게 되며, 밀폐공간 중앙부에서는 점차로 수평적 분포를 나타낸다.

또한 양 수직벽에서의 온도구배가 커지고 있으며, 등온 유지되는 외부벽 상측의 온도 분포가 조밀해 지면서, 외부벽 상측에서의 열전달이 활발해지고 있다. 이에 따라, 유선은 등

온 유지되는 외부벽 상측으로 침투하게 됨을 알 수 있다.

Fig.6와 Fig.8은  $A=2$ ,  $Ra=1,000$ 으로 하여  $RD$ 를 2와 5로 변화시켰으며 이는 고정된  $D$ 에서 반경비인  $RD$ 를 변화시킨 경우이다.

등온선은  $RD$ 가 커짐에 따라 내벽과 외벽의 면적비의 증가로 열전달 증대에 의한 결과로 열원을 가진 내부 벽면으로 끌려 당겨지며,  $Ra$ 에 따른 변화하는 다른 양상을 보이고 있다. 즉, 내부 벽면에서의 온도 구배가

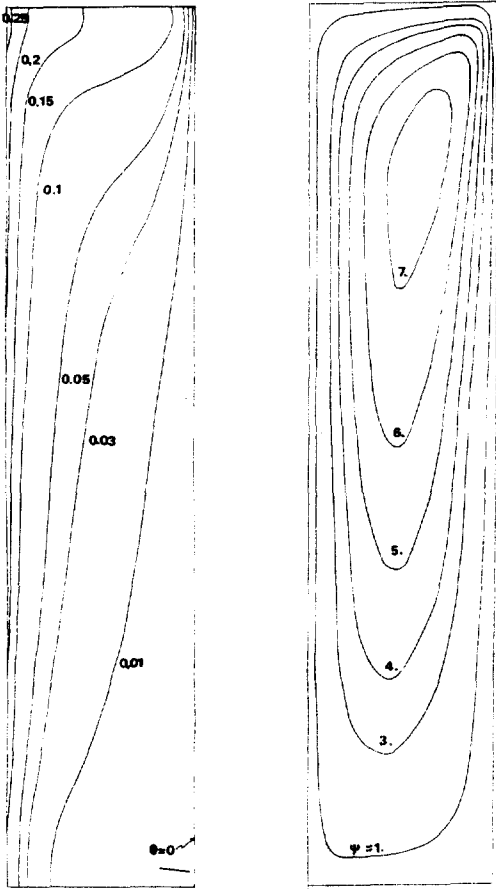


Fig.9 Isotherms and Streamlines for  $A=5$ ,  $RD=5$  and  $Ra=1,000$

커지는 반면, 외부벽에서의 온도 구배는 반대  
의 현상을 보이고 있다.

Fig.6와 Fig.9는  $RD=2$ ,  $Ra=1,000$  으로  
고정하여  $A$ 를 2와 5로 변화시켰으며 반경  
비인  $RD$ 가 고정되고  $D$ 를 변화시킨 경우이다.

등온선은 양 수직벽에서의 온도 구배가 커  
지고 있으며 특히 유선이 양 수직벽에 거의  
평행하게 위치하게 된다.

#### 4.2 평균 열전달

Fig.10~16은 종횡비, 반경비 및  $Ra$ 의 영  
향에 따른 평균 Nusselt 수의 변화를 나타내었  
다. Fig.10과 Fig.11을 통해  $Ra$ 와  $RD$  증가  
에 따라 평균 Nusselt 수는 증가한다. Fig.12

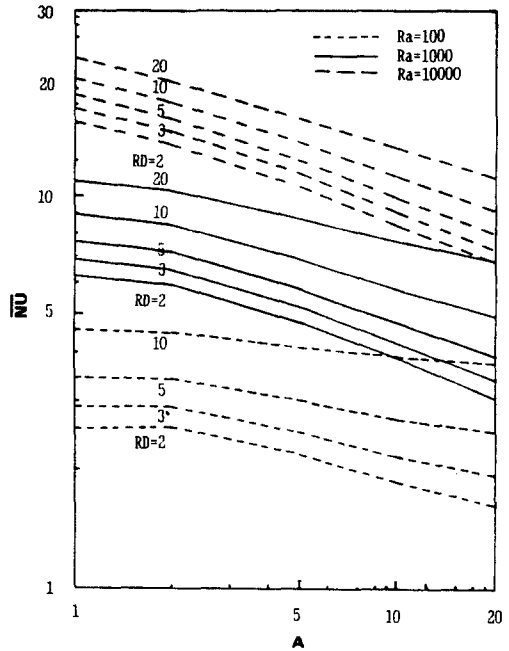


Fig.10 Effect of ratio,  $RD$  and aspect ratio,  
 $A$  over average Nusselt number,  $NU$ ,  
for  $Ra=100, 1,000$  and  $10,000$

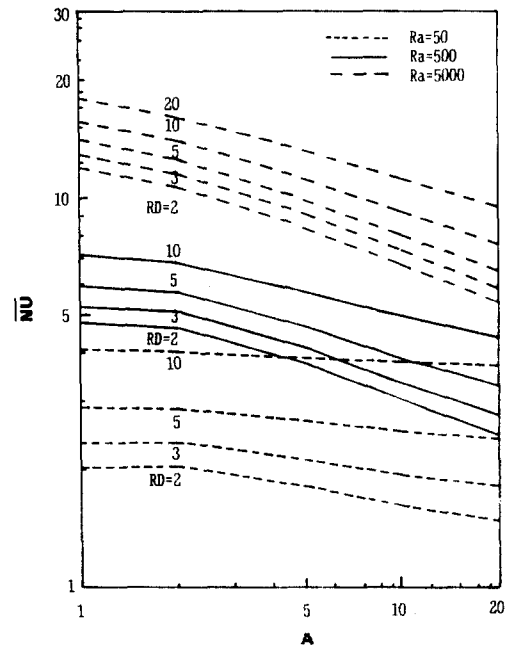


Fig.11 Effect of ratio,  $RD$  and aspect ratio,  
 $A$  over average Nusselt number,  $NU$ ,  
for  $Ra=50, 500$  and  $5,000$

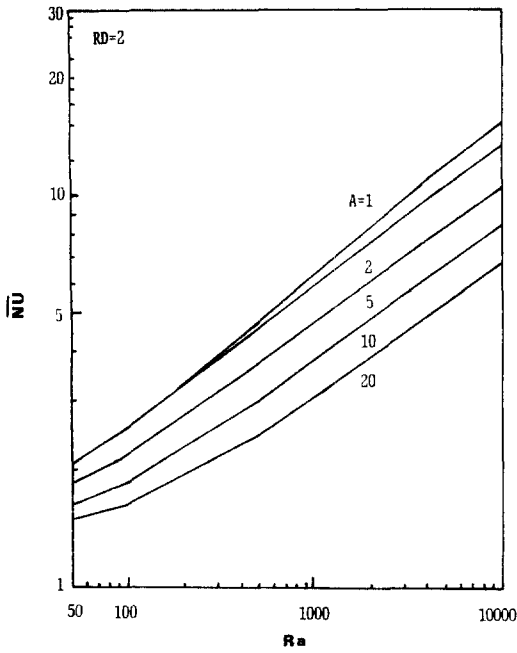


Fig. 12 Effect of Rayleigh number on the heat transfer rate for various aspect ratios at  $RD=2$

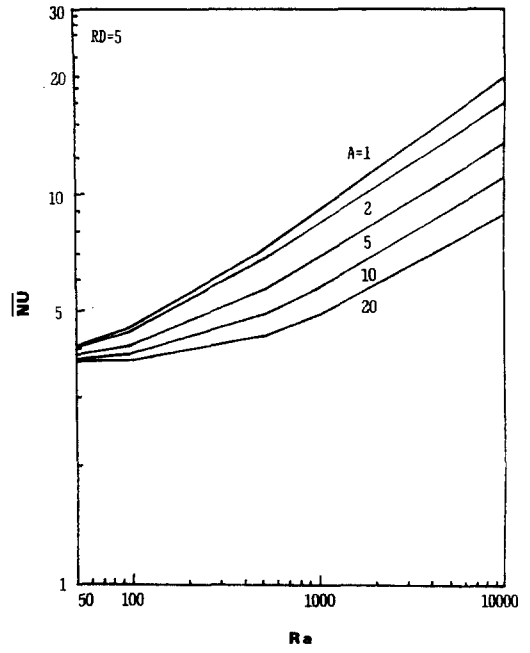


Fig. 14 Effect of Rayleigh number on the heat transfer rate for various aspect ratios at  $RD=5$

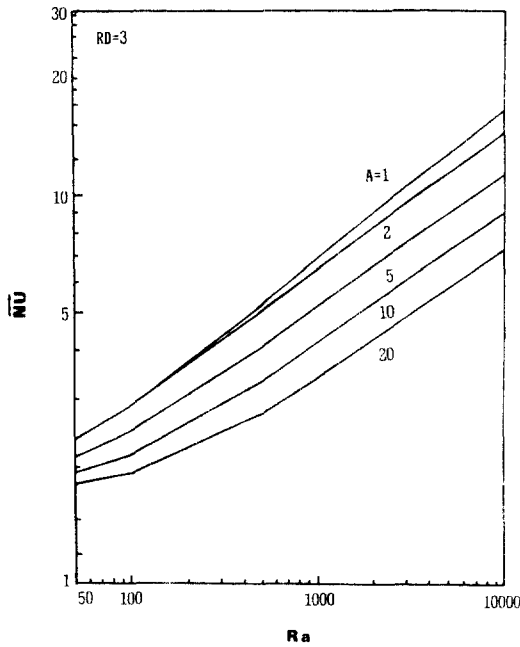


Fig. 13 Effect of Rayleigh number on the heat transfer rate for various aspect ratios at  $RD=3$

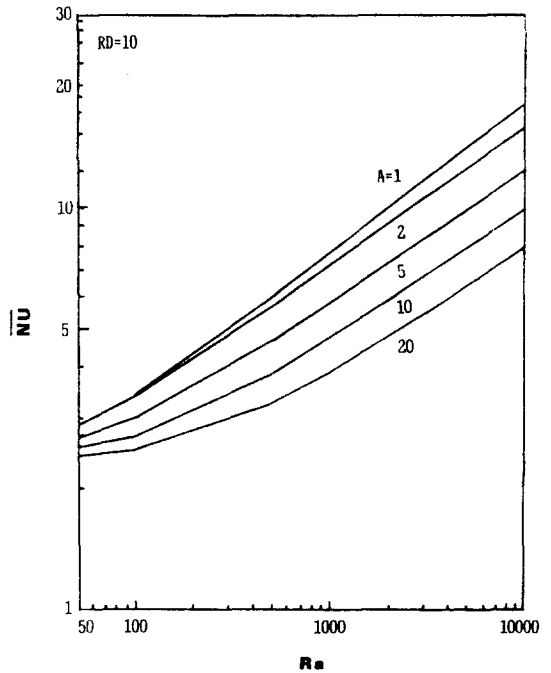


Fig. 15 Effect of Rayleigh number on the heat transfer rate for various aspect ratios at  $RD=10$



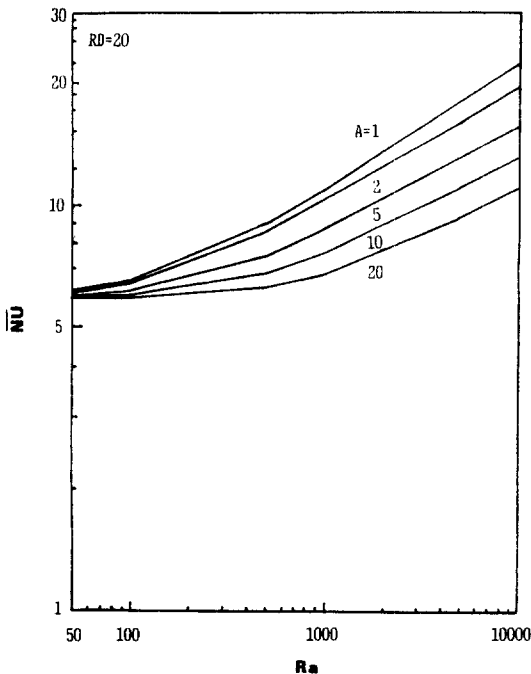


Fig. 16 Effect of Rayleigh number on the heat transfer rate for various aspect ratios at  $RD=20$

~16은 각각 반경비를 고정하고, 종횡비를 변화시킨 경우이며, 전반적으로 종횡비가 커지면 평균 Nusselt 수가 감소하게 된다. 이는 현 종횡비 2.0~5.0 범위에 대하여 종횡비가 커지면 전도 열전달 영향이 커지며 이에따라 대류 현상이 억제되는 결과를 의미한다.

그리고  $1 \leq RD < 5$ 인 경우에는, Ra의 영향에 따라 최대 Nusselt 수가 종횡비 1과 2 사이에 존재하게 되며,  $RD \geq 5$ 인 경우에는 최대 Nusselt 수가 항상 종횡비 1에서 존재하게 되어 반경비가 커질수록 열 확산이 활발해져 최대 Nusselt 수를 나타내는 종횡비는 반대로 적어짐을 알 수 있다.

## 5. 결 론

내부벽에 열원을 가지고, 외부벽은 등온으로 유지되며 두 수평면은 단열되어 있는 환형수직원통내의 다공성 물질내에서  $1 \leq A \leq 20$ ,

$1 \leq RD \leq 20$  및  $50 \leq Ra \leq 10,000$ 인 경우에서 일어나는 유동장 및 온도장에 대해서 유한차분법을 통한 수치해석에서 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 등온선은 종횡비와 Rayleigh 수가 증가할수록, 열원이 있는 내부벽 상측으로, 유선은 등온 유지되는 외부벽 상측으로 침투하게 된다.

2) 열원에서 전달된 열은 대부분, 등온 유지되는 외부벽의 상측에서 방출되며 종횡비, Rayleigh 수가 클수록, 반경비가 작을수록 외부벽 상측에서 방출되는 열은 증가하게 된다.

3) 평균 Nusselt 수는 반경비, Rayleigh 수가 증가할수록 향상된다.

4) 일반적으로, 종횡비가 증가하면 평균 Nusselt 수는 감소하게 되나 최대 Nusselt 수는,  $1 \leq RD \leq 5$ 인 경우에 종횡비, 1과 2 사이에서 나타나며,  $RD \geq 5$ 인 경우에는 최대 Nusselt 수가 항상 종횡비 1에서 존재하게 된다.

## REFERENCE

1. H.H. Bau and K.E. Torrance, 1982, "Low Rayleigh No. Thermal convection in a Vertical cylinder Filled with Porous Materials and Heated from Below", ASME Journal of Heat Transfer, Vol.104, pp. 166-172.
2. V. Prasad and F.A. Kulacki, 1985, "Natural convection in Porous Media Bounded by Short Concentric Vertical Cylinder", ASME Journal of Heat Transfer, Vol.107, pp.147-154.
3. A. Bejan, 1983, "The Boundary Layer Regime in a Porous Layer with Uniform Heat Flux from the side", Int. J. of Heat Mass Transfer, vol.26, No.9, pp.1339-1346.
4. V. Prasad and F.A. Kulacki, 1984, "Natural Convection in a Rectangular Porous Cavity with Constant Heat Flux on One

- Vertical Wall”, ASME Journal of Heat Transfer, Vol.106, pp.152-157.
5. D.C. Reda, 1986, “Natural Convection Experiment in a Stratified Liquid-Saturated Porous Medium”, ASME Journal of Heat Transfer, Vol.108, pp.660-666.
  6. F.A.L. Dullien, 1979, Porous Media-fluid Transport and Pore Structure, Academic press, New York.
  7. Bear, J. 1982, Dynamic of Fluids in porous media, Elsevier, New York.
  8. Y. Katto, and T. Mauoka, 1976, “Criterion for the Onset of convective Flow Fluid in a Porous Medium”, Int. J. of Heat Mass Transfer, Vol.10, pp.297-309.
  9. A.D. Gosman, W.M. Pun, A.K. Runchal, D.B. spalding, and M. wolfshtein, 1969, Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows, Academic Press, London.