

反復的 逆算法에 의한 重力資料의 解析에 關한 研究

魯哲換*, 梁承珍*, 申昌秀*

A Study on Interpretation of Gravity Data by using Iterative Inversion Methods

Cheol-Hwan Roh*, Sung-Jin Yang* and Chang-Soo Shin*

Abstract: This paper presents results of interpretation of gravity data by iterative nonlinear inversion methods.

The gravity data are obtained by a theoretical formula for two-dimensional 2-layer structure. Depths to the basement of the structure are determined from the gravity data by four iterative inversion methods. The four inversion methods used here are the Gradient, Gauss-Newton, Newton-Raphson, and Full Newton methods.

Inversions are performed by using different initial guesses of depth for the over-determined, even-determined, and under-determined cases. This study shows that the depth can be determined well by all of the methods and most efficiently by the Newton-Raphson method.

序 論

重力資料의 解析은 堆積層 또는 地殼의 層厚變化 등 廣域의인 地下構造를 糾明하는 데에 利用된다.

重力資料에서 基盤岩 深度를 計算하기 爲해 Talwani等 (1959)은 多角形의 2次元 角柱로 부터 重力異常을 求하는 方法을 樹立하고 試行錯誤法을 適用하여 解析하였는데, 이 方法은 많은 時間이 所要된다. Tanner(1967), Negi와 Garde (1969), Dyrelius와 Vogel(1972) 등은 最小自乘法을 使用하여 解析을 遂行하였고, Oldenberg(1974)는 普遍的인 最小自乘法에 比해 收斂速度가 빠른 푸리에 變換을 利用하였다. Lanczos(1961), Jackson(1961), Aki와 Richards(1980)는 새로운 行列逆算의 理論的 基礎를 樹立하였고, Pedersen (1977) 및 申昌秀(1980)는 이를 重磁力資料의 逆算에 利用하였다. Lines와 Treitel(1984)은 Marquardt-Levenberg의 最適化法과 特異值分解를 利用하여 重力資料의 逆算을 遂行하였고, 李鎬永등(1985)도 이 方法을 重磁力資料의 逆算에 利用한 바 있다.

本 研究에서는 Gradient法, Gauss-Newton法, Newton-Raphson法 및 Full Newton法 等の 非線形 逆算法을 利用하여 重力資料로부터 基盤岩深度를 計算하는 逆算을 施行해 보기로 한다. 2次元의 2層構造인 地層模型을 假定하고, 이 地層을 m個의 四角柱로 區分하여 地表上의 n個의 測點에

서 重力異常值를 計算한 後, 이 異常值에서 m개의 深度를 求해 보기로 한다.

$n > m$, $n = m$, $n < m$ 인 境遇에 深度에 初期假定值를 여러 가지로 假定하였을 時, 各 逆算法의 正確性 및 反復回數別 收斂度를 觀察해 본다.

重力值計算式

Fig.1의 (a)와 같은 重力測定值를 야기시킨 (b)와 같은 2次元 地層構造에 對하여 重力異常值를 計算할 時, 上部 地戶와 下部地戶의 重力效果를 各各 計算하는 代身에, 上部 地戶이 下部 地戶의 深度를 가질 時를 基準로 하여 Fig. 2에서와 같이 密度差 $\Delta\rho$ 에 依한 上部 地戶의 減少된 重力效果만을 計算하면 上部 地戶의 構造變化에 따른 重力異常值를 얻을 수 있다. Fig. 3의 密度 ρ 인 하나의 角柱에 對한 重力值는 다음과 같다. (Heiland, 1940, Dobrin, 1976)

$$\Delta g(x) = 2G\rho \{ (x_2 - x) \ln (r_2 / r_1) - (x_1 - x) \ln (r_4 / r_3) + z_2 \phi_1 - z_1 \phi_2 \}. \quad (1)$$

Fig. 2의 一定한 密度差 $\Delta\rho$ 를 갖는 깊이가 서로 다른 m個의 2次元 角柱에 依한, 한 測點($x_i, 0$)에서의 重力值는 다음과 같다.

$$\Delta g(x_i) = -G\Delta\rho \sum_{l=1}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \ln \frac{z_l^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}{z_l^2 + (x_i - x_i)^2}$$

*漢陽大學校 資源工學科 (Dept. of Mineral resources Eng., Hanyang Univ., Seoul 133, Korea)

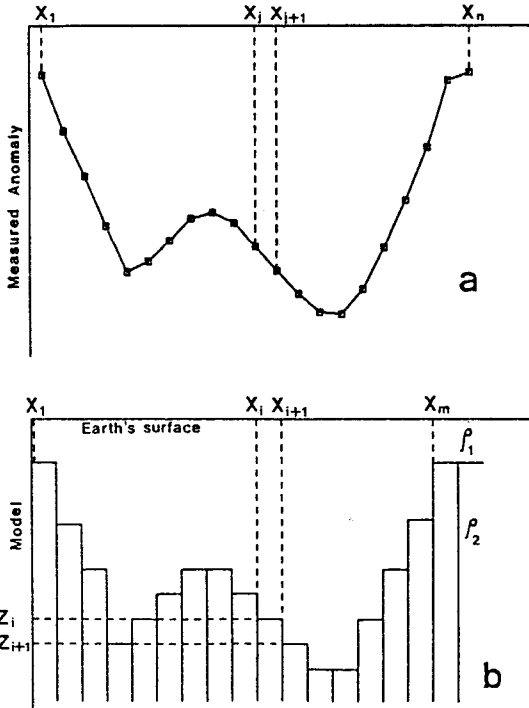


Fig. 1. (a) Gravity anomaly at n observation points. (b) Subsurface Structure causing the gravity anomaly in (a) in represented by m prisms.

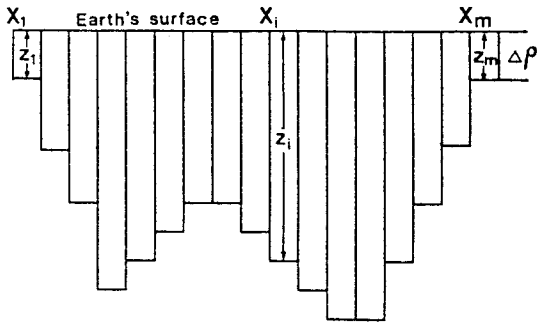


Fig. 2. The model used for calculation of gravity anomaly.

$$\begin{aligned}
 & -(x_i - x_j) \ln \frac{z_i^2 + (x_i - x_j)^2}{z_s^2 + (x_i - x_j)^2} + 2z_i \tan^{-1} \frac{x_{i+1} - x_j}{z_i} \\
 & - 2z_i \tan^{-1} \frac{x_i - x_j}{z_i} - 2z_s \tan^{-1} \frac{x_{i+1} - x_j}{z_s} \\
 & + 2z_i \tan^{-1} \frac{x_i - x_j}{z_i}, j=1, 2, \dots, n. \tag{2}
 \end{aligned}$$

여기서 i는 角柱의 番號, j는 測點의 番號, z_s는 地表의 高度, 그리고 G는 萬有引力常數이다.

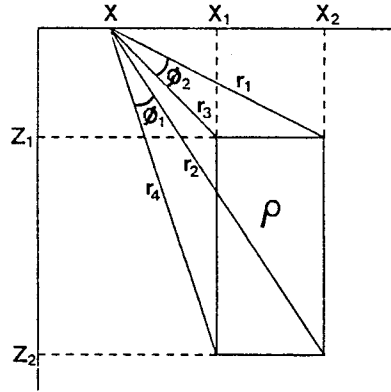


Fig. 3. The geometry of a two-dimensional rectangular block.

逆算式

測定值 d_j와 地戶模型에 對한 反應值 u_j의 誤差를

$$e_j = d_j - u_j, j=1, 2, \dots, n \tag{3}$$

로 表示하고,

$$E(z) = e^T e = \sum_{j=1}^n (d_j - u_j)^2 \tag{4}$$

를 目的函數로 定義할 때, 이 目的函數를 最小化하는 深度를 구하는 것이 본 연구에서의 逆算이다. u_j는 深度 z_i의 非線形 函數이므로 反復的 非線形 逆算法으로 解 z_i를 구할 수 있다. 이와 같은 逆算에 利用되는 여러 方法들중, 본 연구에서 使用한 네가지 方法을 요약하면 다음과 같다.

Gradient法

目的函數가 常數인 等價線上에서 陰의 Gradient벡터는 等價線에 垂直한 最大減少方向(Steepest descent direction)을 갖는다(Simth and Shanno 1971).

Gradient벡터 δ_g는

$$\delta_g = -\nabla E(z) = 2J^T e \tag{5}$$

이다. 여기서 J는 媒介變數에 對한 反應值의 1次 偏微分 函數로 이루어진 Jacobian行列이며 그 各各의 要素는 式(2)로부터

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_j}{\partial z_i} = & -2G\Delta\rho \left(\tan^{-1} \frac{x_{i+1} - x_j}{z_i} - \tan^{-1} \frac{x_i - x_j}{z_i} \right), \\
 & j=1, 2, \dots, n, \quad i=1, 2, \dots, m \tag{6}
 \end{aligned}$$

이다. 深度는 아래의 反復計算式을 利用하여 決定한다.

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \alpha^{(k)} \delta_g \quad (7)$$

여기서 k는 k번째 反復計算임을 나타내며 α 는 充分히 작은 陽數이다.

Gauss-Newton法

z_0 를 媒介變數의 初期假定値라고 할때 z_0 에 對한 反應値의 變量(Perturbation)은 Taylor級數로 1次項까지 展開시킨 것으로 나타낼 수 있고 이를 行列式으로 나타내면

$$u = u_0 + J \delta \quad (8)$$

이다. 여기서 u_0 는 z_0 에 對한 反應値이고 δ 는 媒介變數變化벡터이다. 이 式을 式(4)에 代入하고 最少化하면 다음과 正規方程式이 얻어진다. (Lines와 Treitel, 1984).

$$J^T J \delta = J^T e \quad (9)$$

이 方程式의 解 δ 를 아래의 反復計算式에 代入하여 深度를 求한다.

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \delta \quad (10)$$

Newton - Raphson法

Gauss-Newton方程式의 解는 $J^T J$ 와 $J^T e$ 의 行列곱에 依하여 얻어진다. 그러나 이들 行列곱의 計算은 數値의 不正確性을 內包한다. 더우기 n과 m이 클때에는 큰 誤差를 惹起한다. Golub와 Reinsch(1970)는 이 點을 認識하여 Gauss-Newton方程式을 利用하는 代身에 다음의 Newton-Raphson方程式을 利用하는 것이 더 낫다는 것을 提案하였다.

$$J \delta = e \quad (11)$$

Full Newton法

Gauss-Newton法에서 目的函數의 最少를 얻기 위해 $E(z)$ 의 δ 에 對한 偏微分값을 0으로 놓아 式(9)를 얻었다. 그러나 이 條件은 必要條件은 되지만 充分條件은 아니다. 이를 補完하기 爲한 方法이 Full Newton法이다. 目的函數 $E(z)$ 는 Taylor級數로 2次項까지 展開할 수 있고(Bertsekas, 1982, Dennis와 Schnabel, 1983), 이로부터 다음의 正規方程式이 求해진다. (Shin, 1988).

$$[J^T J + R] \delta = -J^T e \quad (12)$$

여기서 R行列의 各要素는

$$R_{ki} = - \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_k \partial z_i} \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_k \partial z_i} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial z_k \partial z_i} \right] \begin{pmatrix} d_1 - u_1 \\ d_2 - u_2 \\ \vdots \\ d_n - u_n \end{pmatrix} \quad (13)$$

$k_i = 1, 2, \dots, m$

이며, 模型反應値의 2次 偏微分函數는 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial z_k \partial z_i} = \begin{cases} 2G \Delta \rho \left\{ \frac{x_{i+1} - x_j}{z_i^2 + (x_{j+1} - x_j)^2} - \frac{x_i - x_j}{z_i^2 + (x_j - x_i)^2} \right\}; k=i \\ 0; k \neq i \end{cases} \quad (14)$$

反復計算은 式(10)을 利用한다. 但, Hessian 行列 $[J^T J + R]$ 이 Positive-definite 일때만 이 方法에 依해 最小가 될 수 있다. (Beveridge 와 Schechter, 1970).

模型實驗

簡單한 地質構造에 對한 逆算法들의 效率性을 考察해 보기 위해 Fig. 4(a)에 주어진 重力異常值, 即 本圖의(b)와 같은 2個의 角柱($z_1=9\text{km}$, $z_2=12\text{km}$)로 이루어진 模型에 對하여 얻어진 5個 測點에서의 重力異常值를 앞에서 言及한 4가지 逆算法로 解析하였다. 本圖의 (c)는 初期假定値를 3km로 하였을 때, 各方法의 反復回數別 誤差를 보여준다. 本圖에서 보듯이 收斂速度는 Newton-Raphson(G-R)法, Gauss-Newton(G-N)法, Full Newton(F-N)法, Gradient(GRD)法의 順으로 빠르다.

또한 이들 네가지 方法의 收斂過程은 深度를 나타내는 媒介變數에 對한 目的函數의 等價線(一定한 目的函數값을 갖는 媒介變數雙을 서로 連結한 曲線)上에서도 考察할 수 있다. Fig. 5는 初期假定値 z_1, z_2 를 3.0km로 하고 2回의 反復計算을 遂行하였을 때 各方法에 依한 等價線上에서의 收檢過程을 나타낸다. Gradient法의 벡터들은 等價線에 垂直한 方向을 取하고 있으며 他 方法에 비해 더 많은 反復計算을 해야할 必要가 있음을 알수 있다. Newton-Raphson法은 첫 段階가 Gauss-Newton法과 一致하나 그 以後의 段階에서는 보다 正確한 方向으로 가장 빠른 收斂을 한다.

Full Newton法은 이들 두 方法보다 못한 結果를 보인

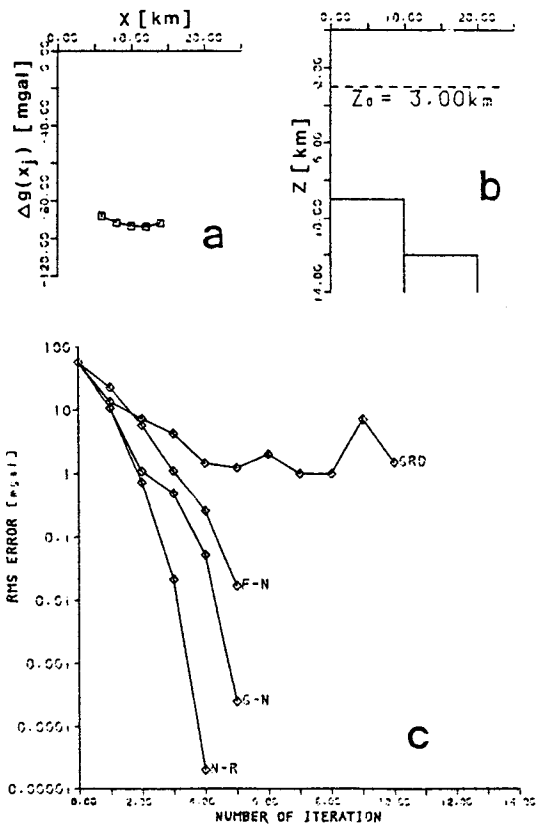


Fig. 4. (a) Gravity anomaly at 5 positions. (b) Two-parameter model with depth $Z_1 = 9.0\text{km}$ and $Z_2 = 12.0\text{km}$ which causes the gravity anomaly in (a). (c) RMS error at each iteration of four inversion methods.

다.

이와 같은 사실들은 앞의 RMS 誤差曲線의 結果와 符合된다.

다음은 좀더 많은 角柱로 構成된 地戶模型에 對한 逆算에 있어서 測點數(資料數, n)와 角柱數(深度數, m)에 對한 各 方法의 逆算의 正確性을 살펴 보기로 한다.

測點數가 角柱數보다 많은 境遇(over-determined case)

Fig. 6의 (a)는 (b)와 같은 $m = 17$ 인 地下構造 上의 $n = 21$ 개 測點에서의 重力測定值인바, 이 測定值는 理論的으로 얻은 重力異常值(點線)에 5% Gauss 雜音을 더한 것(實線)이다. 이 資料에 對하여 初期假定值를 2.4km 및 7.0km로 하

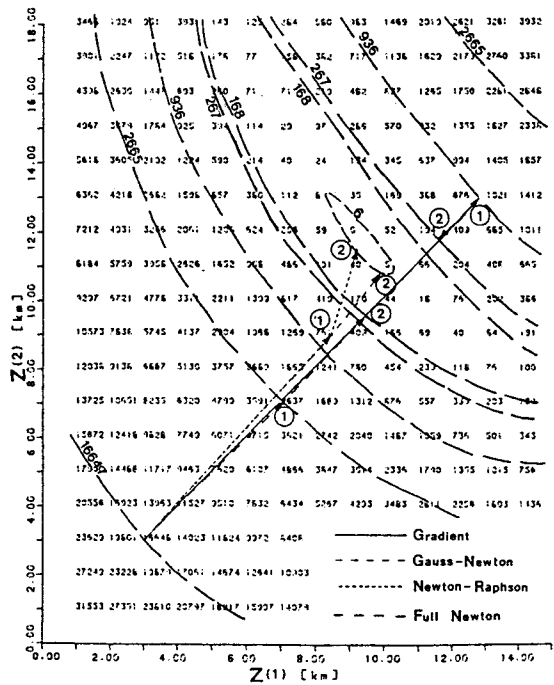


Fig. 5. The geometric relation between the four inversion methods for a two-parameter model in Fig. 4.

여 네가지 逆算法을 遂行時, 反復計算回數에 따른 RMS 誤差는 Fig. 7과 같다. 本 圖에서 보듯이 Newton-Raphson 法의 收斂速度가 가장 빠르고 Gradient 法에 依한 逆算이 他 方法에 比해 그 速度가 훨씬 느리다.

3回의 反復計算後 두 初期假定值에 對한 逆算 結果를 Fig. 8과 9에 나타내었다. 이들 두 그림에서 보면 初期假定值를 달리하여도 逆算 結果는 別差異가 나타나지 않는다. 但, Gradient 法과 Full Newton 法에 依한 逆解는 $z_0 = 7.0\text{km}$ 일 때 若干 더 向上되었다. 이는 $z_0 = 7.0\text{km}$ 일 때 初期의 RMS 誤差가 $z_0 = 2.4\text{km}$ 일 때 보다 더 작은 것과 符合된다.

測點數와 角柱數가 같은 境遇(even-determined case)

測點數와 角柱數가 모두 17개인 境遇로, 5% Gauss 雜音이 加算된 測定值에 對하여 逆算을 하였다 (Fig. 10). Fig. 11의 (a) 및 (b)는 初期值를 12.0km 및 7.0km로 하였을 때 各 方法의 反復回數別 誤差減少를 보여준다. 여기서도 Newton-Raphson 法이 가장 빨리 收斂한다. 但, Gauss-Newton 法과 Newton-Raphson 法에 依한 誤差減少가 거의 一致하는데, 이는 n과 m이 같을 때 이 두 方法의 正規方程

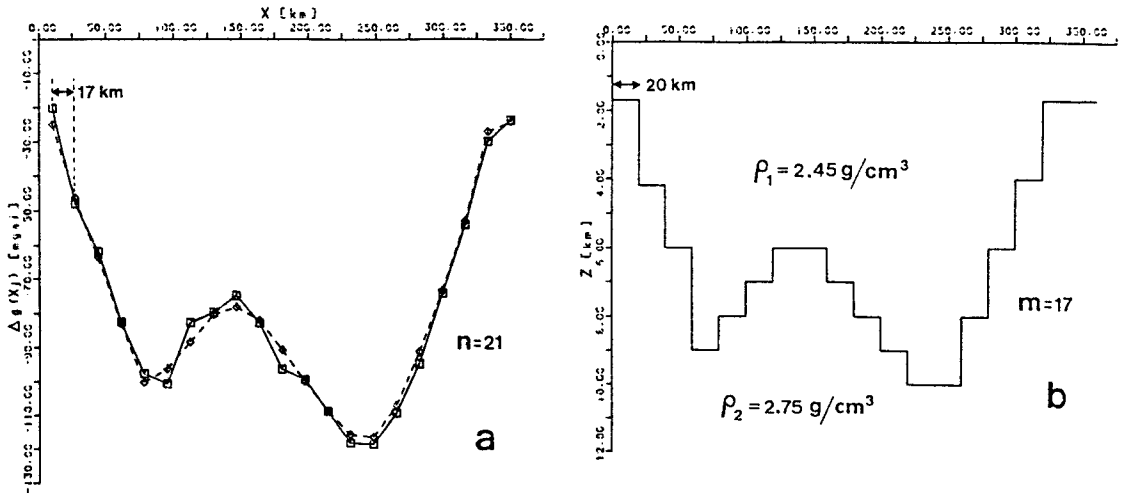


Fig. 6. Over-determined case ; gravity anomaly(a) on model(b).

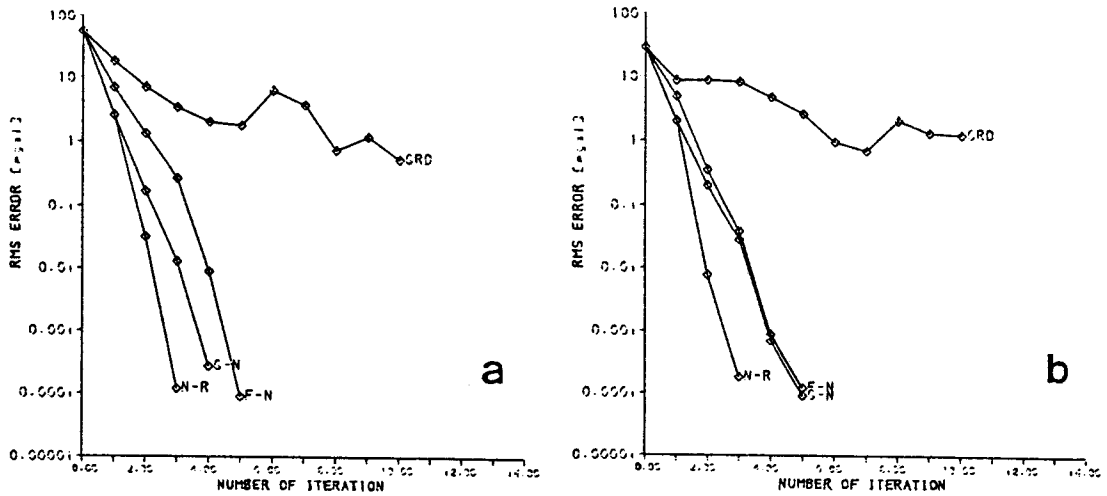


Fig. 7. RMS error at each iteration of four inversion methods applied to gravity anomaly (a) in Fig. 6. (a) for $Z_0=2.4km$ and (b) for $Z_0=7.0km$.

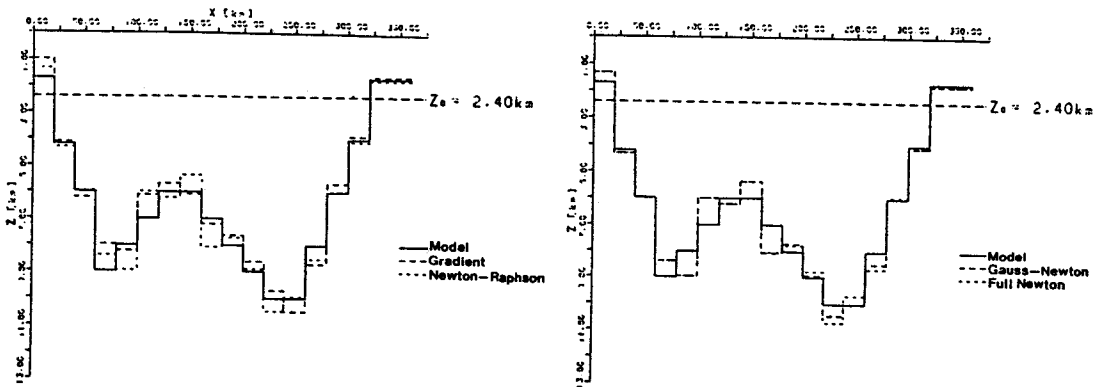


Fig. 8. The assumed model(solid line) and inverted results (dotted lines) after 3 iterations when $Z_0 = 2.4K m$ for the over-determined case in Fig. 6.

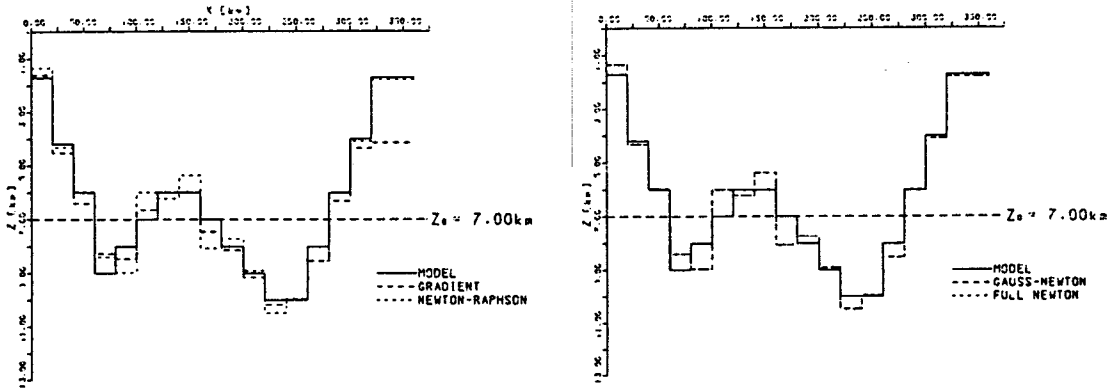


Fig. 9. The assumed model(solid line) and intersersed results (dotted lines) after 3 iterations when $Z_0 = 7.00\text{Km}$ for the over-determined case in Fig. 6.

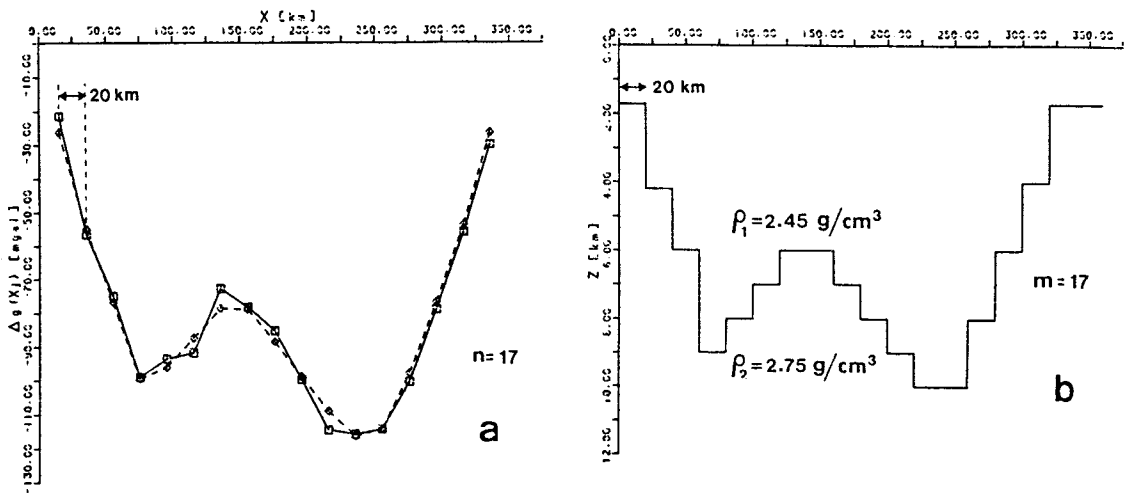


Fig. 10. Even-determined case ; gravity anomaly (a) on model (b).

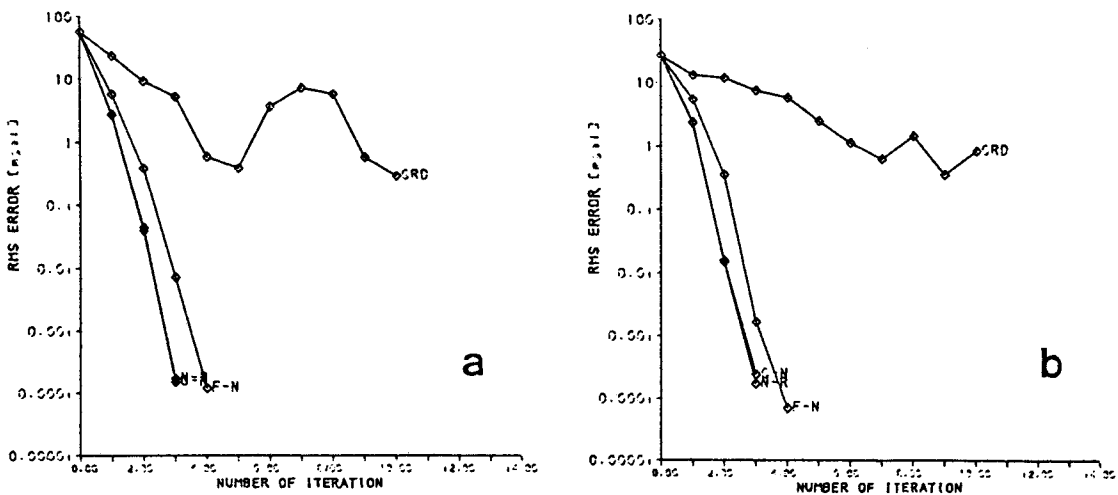


Fig. 11. RMS error at each iteration of four inversion methods applied to gravity anomaly (a) in Fig. 10 (a) for $Z_0 = \text{Km}$ and (b) for $Z_0 = 7.0\text{Km}$.

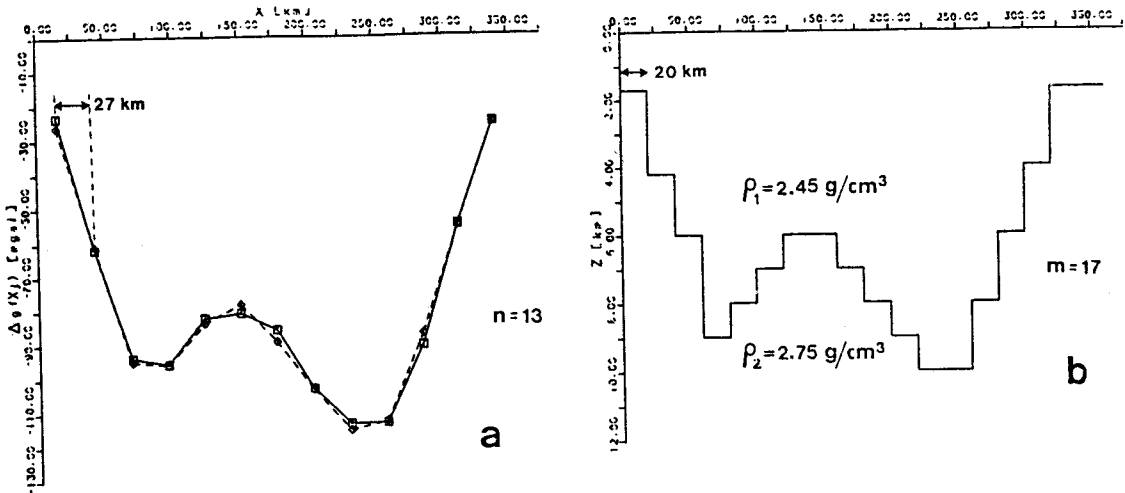


Fig. 12. Under-determined case ; gravity anomaly (a) on model (b).

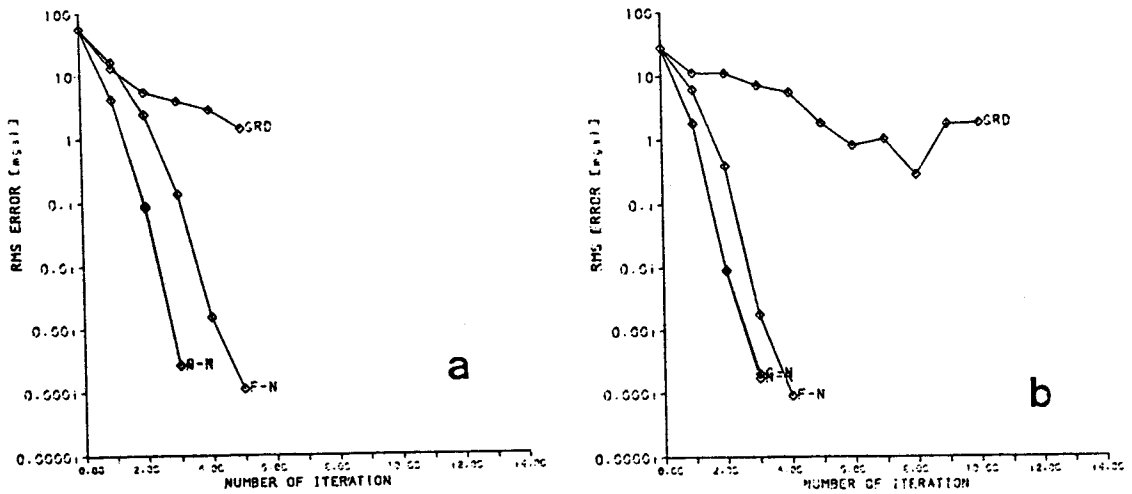


Fig. 13. RMS error at each iteration of four inversion methods applied to gravity anomaly (a) in fig. 12. (a) for $Z_0 = 2.4\text{km}$ and (b) for $Z_0 = 6.4\text{km}$.

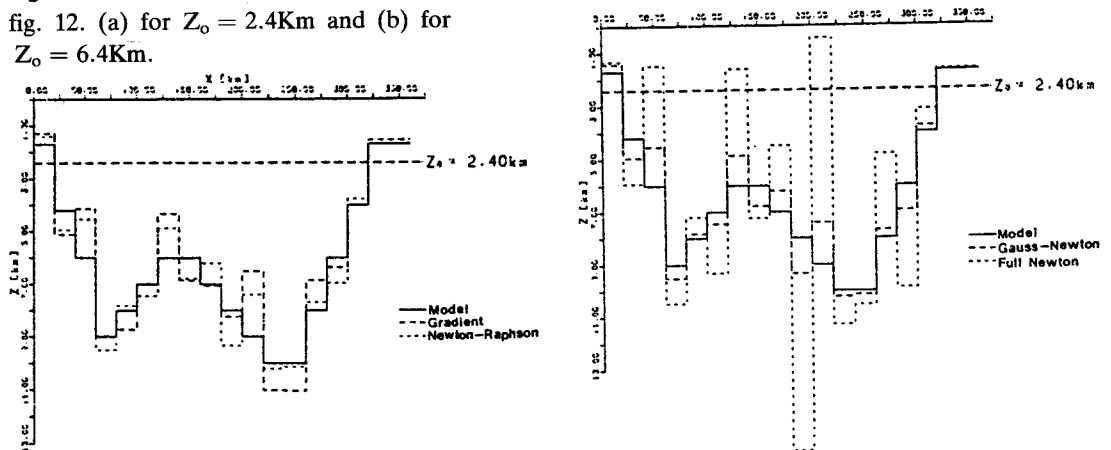


Fig. 14. The assumed model (solid line) and inverted results (dotted lines) after 3 iterations when $Z_0 = 2.4\text{km}$ for the under-determined case in Fig. 12.

式이 같아지기 때문이다.

測点數가 角柱數보다 적은 境遇(under-determined case)

Fig. 12(a)는 (b)의 模型($m=17$)에 對한 13個 測点에서의 重力異常值에 3% Gauss 雜音이 加算된 重力資料이다. 初期假定值가 2.4km일때와 6.4km일때의 RMS 誤差曲線은

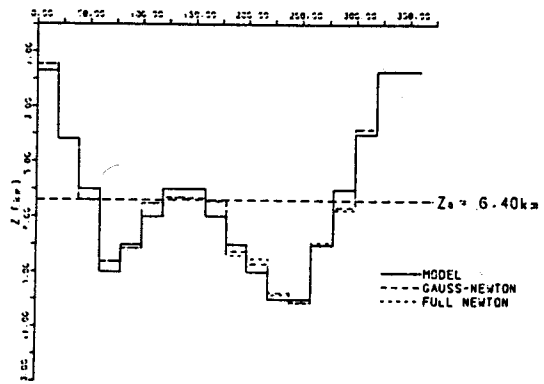
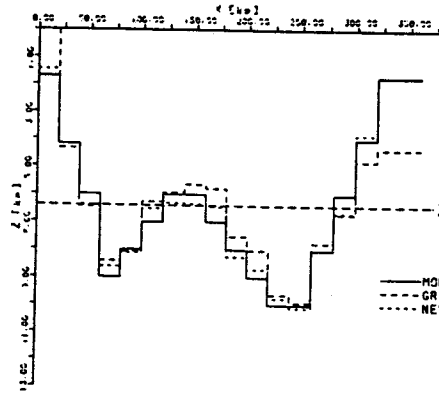


Fig. 15. The assumed model(solid line) and inversed results (dotted lines) after 3 iterations when $Z_0 = 6.4\text{Km}$ for the under-determined case in Fig. 12.

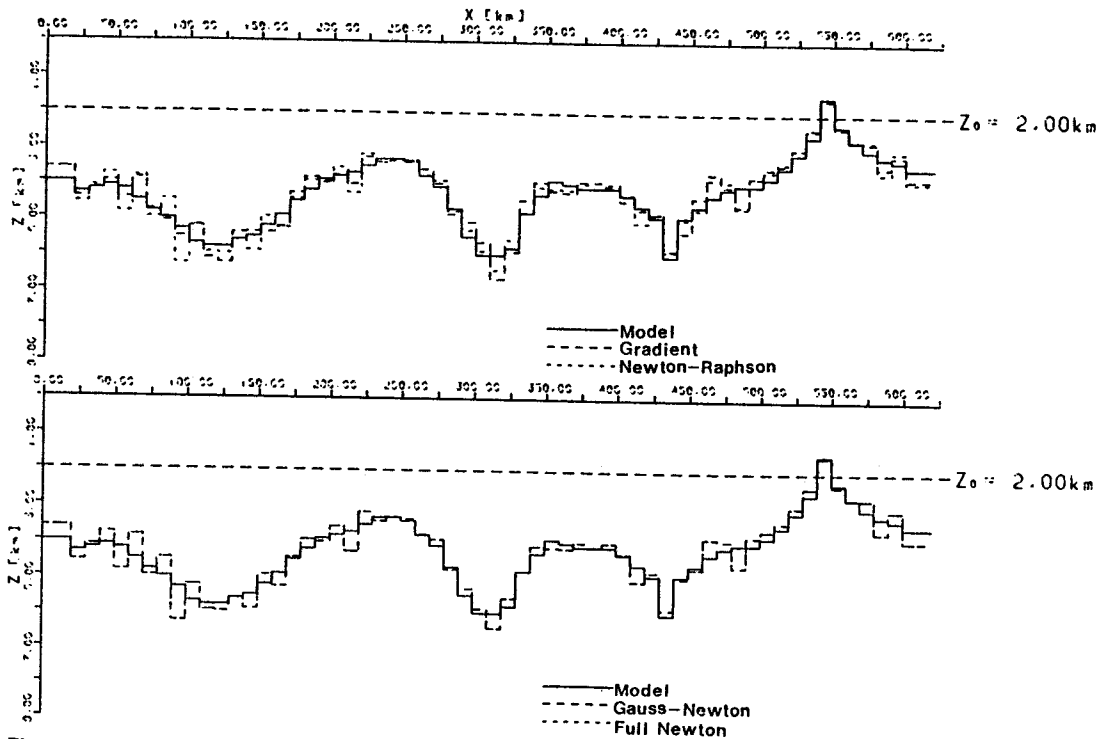


Fig. 16. The assumed model (solid line) and inversed results (dotted line) after 10 iterations for Gradient method, 3 for Newton-Raphson, 4 for Gauss-Newton, and 5 for Full Newton when $Z_0 = 2.0\text{Km}$.

Fig. 13(a) 및 (b)와 같고 그 各各의 逆算結果는 Fig. 14 및 15와 같다. $z_0=2.4\text{km}$ 일때 Full Newton法의 RMS誤差는 他方法과 마찬가지로 減少하지만 그 逆算結果는 Fig. 14와 같이 큰 誤差를 보인다. 이는 RMS誤差의 充分한 減少가 결코 滿足스러운 結果를 保障하지는 못함을 보여준다. 그러나 보다 작은 最初의 RMS誤差를 가지는 初期假定值, $z_0=6.4\text{km}$ 에 對하여 逆算을 遂行한 結果, Fig. 15와 같이 해석이

向上된다.

結 論

複雜한 模型의 境遇

角柱數가 60個인 複雜한 模型(Fig. 16의 實線)에 對한 重力異常值에 5%의 雜音을 加算한 重力資料에 對해 逆算을 遂行하였다. Fig. 16의 點線들은 初期假定值를 2.0km로 하였을 때의 逆算結果이고 Fig. 17은 Z_0 가 2.0 및 4.5km일때의 RMS誤差曲線이다. 誤差曲線에서 보듯이 그 減少가 앞에서 檢討한 簡單한 構造의 境遇에 비해 느리다. 이는 地下構造가 複雜하고 測定資料數가 많아질수록 逆算에 많은 時間이 所要됨을 意味한다. 그러나 逆算結果는 滿足할 만 하다.

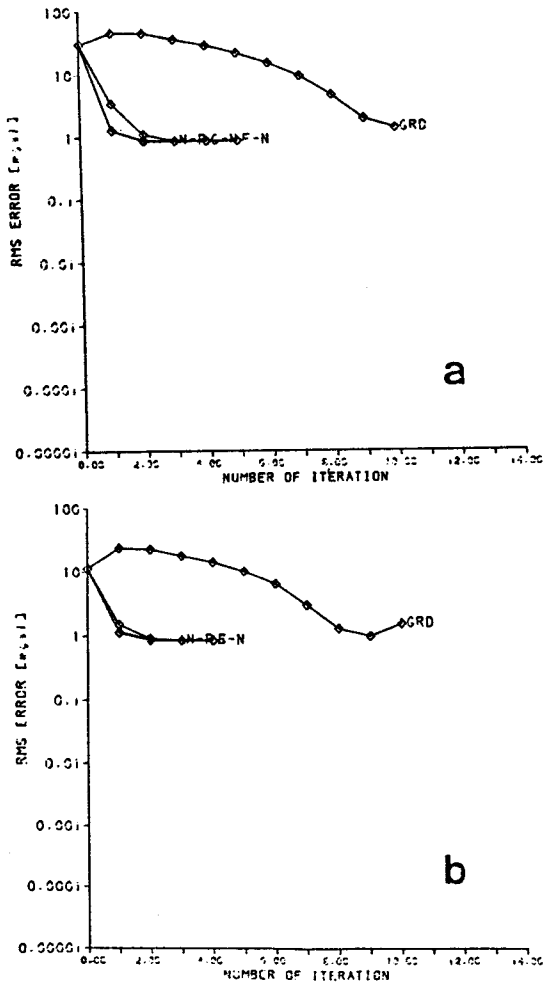


Fig. 17. RMS error at each iteration of iteration in Fig. 16 (a) for $Z_0 = 2.0\text{Km}$ and (b) for $Z_0 = 4.5\text{Km}$.

두 地尸으로 이루어진 2次元 地下構造의 基盤岩 深度變化를 糾明하기 위하여 Gradient法, Gauss-Newton法, Newton-Raphson法, Full Newton法의 反復的 非線形 逆算法을 適用한 結果 다음의 結論을 얻었다.

- 1) 測點數가 角柱數와 같거나 적을 때 Gauss-Newton法과 Newton-Raphson法에 依한 逆算法은 그 收斂速度와 解相度에 있어서 거의 같은 結果를 주었다. 그러나 測點數가 角柱數보다 많을 때에는 Newton-Raphson法에 依한 逆算이 더 나은 結果를 주었다.
- 2) 各 逆算法에 있어서 初期假定值의 選擇에 따라 解相度는 若干 向上될 수 있었다. 그 中에서도 Full Newton法에 依한 逆算이 가장 甚한 影響을 보였고 特別히 測點數가 角柱數보다 적을 때 影響이 컸다.
- 3) Gradient法에 依한 逆算은 他 方法에 比해서 뒤떨어지는 方法이기는 하나 模型과 近似한 解를 주었고 計算 Program의 길이와 計算時間이 훨씬 적게 所要되었다. 이는 이 方法이 正規方程式을 가지지 않음으로 特異值分解가 必要없기 때문이다.
- 4) Gauss雜音을 含有한 測定值는 解에 若干의 誤差를 惹起하였으나 滿足스러운 結果를 주었다.
- 5) 角柱數와 測點數에 따른 모든 境遇에 있어서 가장 正確하고 收斂速度가 빠른 逆算法은 Newton-Raphson法에 依한 逆算이었고, 그 다음은 Gauss-Newton法, Full Newton法, Gradient法の 順이다.

參考文獻

申昌秀, 1980, 一般的 線形逆解를 이용한 磁力 基盤深度 計算法, 漢陽大學校.
 李鎬永, 鄭承桓, 玄炳九, 1985, 反復的 非線形 逆解에 依한 重力 및 磁力探查資料의 解析과 그 應用, 大韓鑛山學會誌 22, 187-198
 Aki, K., and Richards, P., 1980, Quantitative seismology-theory and methods. Vol.2, W.H. Freeman Co.
 Bertsekas, D.P., 1982, Constrained optimization and Lagrange multiplier methods, Academic press.
 Beveridge, G.S.G., and Schechter, R.S., 1970, Optimization: theory and practice. McGraw-Hill.
 Dennis, J.E. and Schnabel, R.B., 1983, Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations, Pre-

- ntice-Hall.
- Dobrin, M.B., 1976, Introduction to geophysical prospecting, McGraw-Hill, pp.630.
- Dyrelus, D., and Vogel, A., 1972, Improvement of convergency in iterative gravity interpretation. *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 27, 195-205.
- Golub, G. H., and Reinsch, C., 1970, Singular value decomposition and least squares solutions: handbook for automatic computation, II, linear algebra, eds. J. Wilkinson and C. Reinsch, Springer-Verlag.
- Heiland, C.A., 1940, Geophysical exploration, Prentice-Hall.
- Jackson, D.D., 1972, Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data, *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 28, 97-109.
- Lanczos, C., 1961, Linear differential operators, D. van Nostrand.
- Lines, L.R., and Treitel, S., 1984, Tutorial-a review of least-squares inversion and its application to geophysical problems, *Geophys. Prospec.* 32, 159-186.
- Negi, J.G., and Garde, S.C., 1969, Symmetric matrix method for gravity interpretation, *J. Geophys. Res.* 74, 3804-3807.
- Oldenberg, D.W., 1974, The inversion and interpretation of gravity anomalies. *Geophysics* 39, 526-536.
- Pedersen, L.B., 1977, Interpretation of potential field data: a generalized inverse approach, *Geophys. Prospec.* 25, 199-230.
- Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 51, 406-413.
- Shin, C. S., 1988, Nonlinear elastic wave inversion by blocky parameterization, University of Tulsa.
- Smith, F.B., and Shanno, D.F., 1971, An improved Marquardt procedure for nonlinear regressions, *Technometrics* 13, 63-75.
- Talwani, M., Worzel, J.L., and Landisman, M., 1959, Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone, *J. Geophys. Res.* 64, 49-59.
- Tanner, J.G., 1967, An automated method of gravity interpretation, *Geophys. J.R. Astr. Soc.* 13, 339-347.