

지반가속도의 시뮬레이션과 剛基盤上에 설치된 회전축-베어링계의 지진해석

Simulation of Seismic Ground Accelerations and Seismic Analysis of Flexible
Rotor-Bearing System Housed on the Rigid Base

김 기 봉*
Kim, Ki Bong

Abstract

The classical spectral analysis of random vibration is not applicable to the random vibration of nonlinear structures or the dynamic response of active mechanical systems whose governing equations contain random parametric and inhomogeneous excitations. If the random load is simulated, dynamic responses can be obtained with the application of numerical integration schemes to the governing equations of above problems. Thus, in this paper, efficient and practical methods of simulating nonstationary random seismic ground accelerations are presented by using the fast Fourier transform technique. Typical applications of the simulated ground accelerations are the simulations of the dynamic response of rotor-bearing systems under earthquake excitations. The study of accuracy is presented to determine the applicability and practicality of methods of simulation.

要 旨

비선형 거동을 일으키는 구조물의 불규칙 진동해석이나 운동방정식이 매개여기와 비제차 여기를 포함하는 능동장비의 동적해석에는 불규칙 진동분야에서 보편적으로 사용되는 스펙트럼해법의 적용이 불가능하다. 만약 불규칙 입력하중을 인공적으로 시뮬레이션 할 수 있다면 이러한 문제들은 운동방정식에 직접적분법을 적용하여 동적응답을 얻을 수 있다. 본 논문에서는 FFT기법을 이용하여 비정상 불규칙 지반가속도를 시뮬레이션하는 효과적이고 실제적인 방법을 제시하며, 이렇게 얻은 인공지진을 응용하는 문제로서 지진하중을 받는 회전축-베어링계의 동적응답을 시뮬레이션하였다. 또한 시뮬레이션 기법의 적용성 및 실용성을 검토하기 위한 민감도에 대한 연구도 제시하였다.

*정희원 · 중앙대학교 건설대학 조교수, 토목공학과

1. 서 론

지진에 대한 구조해석은 그 구조물의 설치 장소에서 발생가능한 여러개의 지진기록을 바탕으로한 통계학적 분석을 통해서 구해져야 한다. 지금까지 지반의 병진가속도에 대한 시력이력곡선의 기록은 미국이나 일본 그리고 국내에서도 어느정도 보유하고 있지만 회전가속도에 대한 시간이력곡선의 기록은 전무한 상태이다⁽¹⁾.

대부분의 구조해석시 사용되는 지진하중은 해석의 편이상 한방향 또는 두 방향의 병진거동만 고려되어 왔다. 하지만 지진에 의한 지반거동은 병진거동과 회전거동을 포함한 여섯성분의 거동을 일으키기 때문에 실제 구조해석에서는 이 여섯성분의 지반거동을 모두 고려해야 한다는 사실이 크게 부각되고 있다⁽²⁾.

특히 원동기나 냉각펌프등과 같은 회전기계는 지진작용하에서 상당히 복잡한 운동방정식을 형성할 뿐만 아니라, 지반의 회전거동에 대해 대단히 민감한 반응을 보임으로 이러한 회전기계의 동적해석에 있어서는 여섯성분의 지반가속도를 모두 고려하여야 함이 필수적이다.

본 논문에서는 지반병진가속도의 스펙트럼을 이용하여 우선 서로 직교하는 세방향의 병진가속도 시간이력곡선을 시뮬레이션한 다음, Newmark⁽³⁾가 제시한 방법에 의해 위의 세성분의 병진가속도로부터 각 방향에 대한 지반의 회전가속도 시간이력곡선을 시뮬레이션하는 방법을 제시한다. 그리고 지반의 회전가속도에 대해 특히 민감한 회전축-베어링 시스템에 대한 운동방정식은 매개여기(parametric excitations)를 포함하게 되는데, 위에서 시뮬레이션한 여섯성분 지반가속도 시간이력곡선을 입력하여 이러한 회전축-베어링 시스템의 동적해석에 응용해 보기로 한다.

2. 지진에 의한 지반가속도의 시뮬레이션

지진에 의한 지반병진가속도와 지반회전가속도를 시뮬레이션하기 위해서는 우선 평균이 0인 비정상 정규 실수과정(nonstationary Gaussian real process)의 시뮬레이션 방법을 알아야 한다.

2.1 비정상 정규 실수과정(Nonstationary Gaussian Real Process)의 시뮬레이션

평균이 0인 비정상 정규 실수과정 $Y_0(t)$ 를 일률변조불규칙과정(uniformly modulated random process)으로 생각하면 다음과 같다.

$$Y_0(t) = A(t) \cdot X_0(t) \quad (1)$$

여기서 $X_0(t)$ 는 평균이 0이고 스펙트럼 밀도함수가 $S(\omega)$ 인 정상불규칙과정(stationary random process)이며, $A(t)$ 는 포락선함수(envelope function)이며 시간의 함수이다.

$Y_0(t)$ 는 실수과정(real process)이므로 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다⁽⁴⁾.

$$Y_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cdot \{ \cos \omega t \cdot dU(\omega) + \sin \omega t \cdot dV(\omega) \} \quad (2)$$

여기서 $dU(\omega)$ 와 $dV(\omega)$ 는 서로 직교이며 평균값이 0인 실수 직교성 증분으로서

$$E[dU(\omega)^2] = E[dV(\omega)^2] = G(\omega) \cdot d\omega \quad (3)$$

이며 $\omega \geq 0$ 일 때 $G(\omega) = 2S(\omega)$ 이고 $E[\]$ 는 기대값(expected value)을 뜻한다. 식 (3)을 만족하기 위해서는 $dU(\omega)$ 와 $dV(\omega)$ 를 다음과 같이 정의하면 된다⁽⁵⁾.

$$dU(\alpha_k) = [2G(\alpha_k) \cdot \Delta\alpha_k]^{1/2} \cdot \cos \Psi_k$$

$$dV(\alpha_k) = -[2G(\alpha_k) \cdot \Delta\alpha_k]^{1/2} \cdot \sin \Psi_k \quad (4)$$

여기서 $\Psi_k (K=1, 2, 3, \dots)$ 는 $[0, 2\pi]$ 구간에서 등밀도함수(uniform density function) $\frac{1}{2\pi}$ 을 가지는 독립임의위상각(independent random phase angle)이며, $\Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$ 이다.

식 (4)를 식 (2)에 대입하여 얻는 다음식과 같은 근사적분값 $Y(t)$ 에 의해 비정상 불규칙과정(nonstationary random process) $Y_0(t)$ 를 시뮬레이션할 수 있다.

$$Y(t) = \sum_{K=1}^N [2G(\alpha_k) \cdot \Delta\alpha_k]^{1/2} \cdot A(t) \cdot \cos[\alpha_k t + \Psi_k] \quad (5)$$

여기서 $G(\alpha_k)$ 는 $\omega = \alpha_k$ 일 때 $G(\omega)$ 의 값이고 $G(\omega)$ 와 Ψ_k 에 대해서는 앞에서 정의되었다.

시뮬레이션의 효율을 높이기 위해 등간격 진동수 구간을 이용해 식 (5)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$Y(t) = \sqrt{\Delta\omega} \cdot \text{Re} [y(t)]$$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \dots = \Delta\omega_N \quad (6)$$

여기서 $\text{Re}[\]$ 은 $[\]$ 의 실수부분을 뜻하며 $y(t)$ 는 다음과 같은 유한복소수 Fourier 변환이다.

$$y(t) = \sum_{K=1}^N [\sqrt{2G(\alpha_k)} \cdot e^{i\Psi_k}] e^{i\alpha_k t} A(t) \quad (7)$$

식 (7)을 사용하는 장점은 $y(t)$ 를 계산함에 있어서 FFT(fast Fourier transform)기법⁽⁶⁾을 적용할 수 있는 점이다.

식 (6)을 이용하여 비정상 정규불규칙과정(non-stationary Gaussian random process)을 시물레이션하기 위해서는 등분포함수를 가지는 N 개의 임의 위상각(random phase angle) $\varphi_k (k=1, 2, \dots, N)$ 를 시물레이션하여야 하는데 이를 위한 전산프로그램은 많이 개발되어 있다. 또한 N 은 $\omega \leq \omega_k$ 그리고 $\omega \geq \omega_k$ 의 구간에서 앞에서 정의한 $G(\omega)$ 의 값이 무시될 수 있을 정도의 작은 값이 되도록 선택되어야 한다.

2.2 지반가속도의 시물레이션

지진에 의한 지반병진가속도는 일률변조 비정상 불규칙과정(uniformly modulated nonstationary random process)으로 볼 수 있기 때문에⁽⁷⁾ 앞에서 설명한 방법에 의해 포락선함수와 적절한 스펙트럼밀도함수(spectral density function)를 결정하면 쉽게 시물레이션 할 수 있다.

구조물이 놓여있는 지반상의 한점을 원점으로 하는 직각좌표계를 (x_0, y_0, z_0) 라 하고 x_0^- , y_0^- 및 z_0^- 축 방향으로 작용하는 지반의 병진가속도를 각각 \ddot{X}_0 , \ddot{Y}_0 그리고 \ddot{Z}_0 라 하면 이들은 평균함수가 0인 정상불규칙과정(stationary random process) $\ddot{X}_0(t)$, $\ddot{Y}_0(t)$ 및 $\ddot{Z}_0(t)$ 에 포락선함수 $A(t)$ 를 각각 곱해서 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{X}_b(t) &= A(t) \cdot \ddot{X}_0(t) \\ \ddot{Y}_b(t) &= A(t) \cdot \ddot{Y}_0(t) \\ \ddot{Z}_b(t) &= A(t) \cdot \ddot{Z}_0(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 포락선함수 $A(t)$ 는 다음과 같이 선택하였다.

$$A(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ (t/t_1)^2 & , 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 & , t_1 \leq t \leq t_2 \\ e^{-c(t-t_2)} & , t_2 \leq t \end{cases} \quad (9)$$

위에서 t_1 , t_2 및 c 는 지진의 형태와 작용시간에 따라 결정되는 매개변수들이다.

정상불규칙과정(stationary random process) $\ddot{X}_0(t)$, $\ddot{Y}_0(t)$ 및 $\ddot{Z}_0(t)$ 를 정의하기 위해서는 Kanai⁽⁸⁾가 제시한 다음과 같은 형태의 스펙트럼 밀도함수를 사용하였다.

$$\begin{aligned} S_{x_0 x_0}(\omega) &= \frac{\left[1 + 4\xi_x^2 \left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2\right] S_x^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2\right]^2 + 4\xi_x^2 \left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2} \\ S_{y_0 y_0}(\omega) &= \frac{\left[1 + 4\xi_y^2 \left(\frac{\omega}{\omega_y}\right)^2\right] S_y^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_y}\right)^2\right]^2 + 4\xi_y^2 \left(\frac{\omega}{\omega_y}\right)^2} \\ S_{z_0 z_0}(\omega) &= \frac{\left[1 + 4\xi_z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2\right] S_z^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2\right]^2 + 4\xi_z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 ω_x , ω_y 및 ω_z 는 각각 x_0^- , y_0^- 및 z_0^- 축 방향으로 작용하는 지반가속도의 주진동수이며, ξ_x , ξ_y 및 ξ_z 는 등가 감쇠비이고, S_x^2 , S_y^2 및 S_z^2 은 각각의 축 방향으로 작용하는 지반가속도 스펙트럼의 강도(intensity)이다.

일단 지반병진가속도를 시물레이션한 후에는 Newmark가 제시한 다음과 같은 지반의 회전가속도와 병진가속도의 관계⁽³⁾로 부터 지반회전가속도를 시물레이션할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_{xb}(t) \\ \ddot{\theta}_{yb}(t) \\ \ddot{\theta}_{zb}(t) \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2\bar{C}} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_b(t) \\ \ddot{Y}_b(t) \\ \ddot{Z}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기서 $\ddot{\theta}_{xb}(t)$, $\ddot{\theta}_{yb}(t)$ 및 $\ddot{\theta}_{zb}(t)$ 는 각각 x_0^- , y_0^- 및 z_0^- 축에 대한 지반회전가속도이며 \bar{C} 는 지진이 전파되는 전단파속도(shear wave velocity)이고, $\frac{d}{dt}$ 는 시간에 대한 일차도함수를 뜻한다.

3. 회전축-베어링 시스템의 동적거동

그림 1과 같이 가속도(angular velocity) ω_R 로 회전하는 회전축-베어링 시스템을 고려하자. 회전축

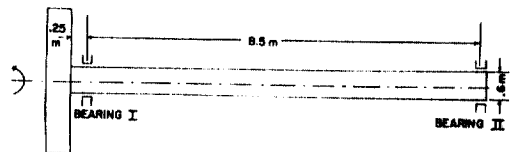


그림 1. Rotor-bearing system

은 유연한 원형 굴대(circular flexible shaft)와 몇 개의 원판(discs)으로 구성된 것으로 이상화한다. 이 원형굴대는 Timoshenko보로 생각하고, 그림 2와 3에서 보여지는 길이 dS 인 미소요소를 고려하여 운동방정식을 유도하기로 한다. 이들 그림에서 (XYZ)는 미소요소의 질량중심 G를 원점으로 하는 공간에 고정된 직각 좌표계이며, (xyz)는 회전축의 축방향을 z-축으로하고 미소요소의 질량중심 G를

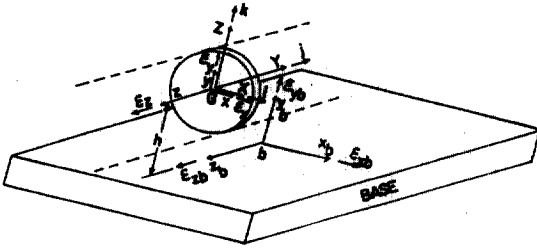


그림 2. Beam element and base reference frames.

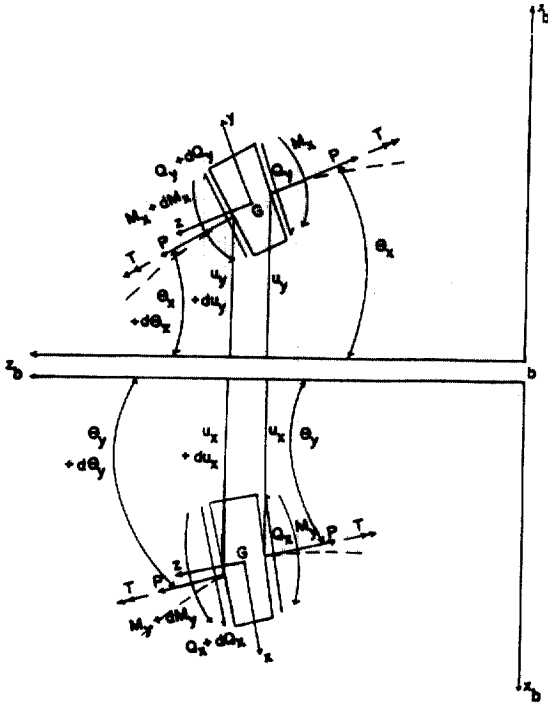


그림 3. A beam element in $y_b z_b$ and $x_b z_b$ planes.

원점으로 하며 축과 함께 회전하는 직각 좌표계이다. (x_b, y_b, z_b) 는 베어링이 놓여있는 강체상의 한 점 b를 원점으로 하는 직각좌표계이며, 점 b는 편이상 정력학적 평형상태일 때 회전축이 z_b -축과 평행하며 그리고 $(y_b z_b)$ 평면내에 있도록 선택한다.

미소요소에 대한 질량중심 G의 절대가속도(absolute acceleration) \underline{a}_G 와 각 모멘텀 \underline{H}_G 와 같은 운동학적인 양들(Kinematic quantities)은 다음과 같다.⁽²⁾

$$\underline{a}_G = a_x \underline{\epsilon}_{xb} + a_y \underline{\epsilon}_{yb} + a_z \underline{\epsilon}_{zb} \quad (13)$$

$$\underline{H}_G = \rho \{ I_T (\ddot{\theta}_{xb} + \ddot{\theta}_x) + I_P \omega (\dot{\theta}_{yb} + \dot{\theta}_y) \} dS \cdot \underline{\epsilon}_{xb} + \rho \{ I_T (\ddot{\theta}_{yb} + \ddot{\theta}_y) - I_P \omega (\dot{\theta}_{xb} + \dot{\theta}_x) \} dS \cdot \underline{\epsilon}_{yb}$$

여기서

$$a_x = \ddot{u}_x - 2\dot{\theta}_{zb}u_y + 2\dot{\theta}_{yb}\dot{u}_z - (\dot{\theta}_{yb}^2 + \dot{\theta}_{zb}^2)u_x + (\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_{yb} - \ddot{\theta}_{zb})u_y + (\dot{\theta}_{zb}\dot{\theta}_{xb} + \ddot{\theta}_{yb})u_z + \ddot{X}_b + h(\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_{yb} - \ddot{\theta}_{zb}) + S(\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_{yb} + \ddot{\theta}_{zb})$$

$$a_y = \ddot{u}_y + 2\dot{\theta}_{zb}\dot{u}_z - 2\dot{\theta}_{xb}\dot{u}_z + (\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_{yb} + \ddot{\theta}_{zb})u_x - (\dot{\theta}_{zb}^2 + \dot{\theta}_{xb}^2)u_y + (\dot{\theta}_{yb}\dot{\theta}_{zb} - \ddot{\theta}_{xb})u_z + \ddot{Y}_b - h(\dot{\theta}_{zb}^2 + \dot{\theta}_{xb}^2) + S(\dot{\theta}_{yb}\dot{\theta}_{zb} - \ddot{\theta}_{xb})$$

$$a_z = \ddot{u}_z - 2\dot{\theta}_{yb}\dot{u}_x + 2\dot{\theta}_{xb}\dot{u}_z + (\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_{xb} - \ddot{\theta}_{yb})u_x + (\dot{\theta}_{yb}\dot{\theta}_{zb} + \ddot{\theta}_{xb})u_y - (\dot{\theta}_{xb}^2 + \dot{\theta}_{yb}^2)u_z + \ddot{Z}_b + h(\dot{\theta}_{yb}\dot{\theta}_{zb} + \ddot{\theta}_{xb}) - S(\dot{\theta}_{xb}^2 + \dot{\theta}_{yb}^2) \quad (13)$$

위 식에서 ρ 는 굴대(shaft)재료의 단위질량이며, I_T 는 굴대단면의 x- 또는 y-축에 대한 2차 모멘트이고, I_P 는 굴대단면의 z-축에 대한 2차 모멘트이다. X_b , Y_b 및 Z_b 는 각각 지면에 의한 지반의 x_b , y_b 그리고 z_b -축방향의 병진저동이며, $\dot{\theta}_{xb}$, $\dot{\theta}_{yb}$ 그리고 $\dot{\theta}_{zb}$ 는 각각 지반의 x_b , y_b 및 z_b -축에 대한 회전저동이다. u_x , u_y 및 u_z 는 각각 질량중심 G의 x_b , y_b 및 z_b -축방향의 병진변위이며, θ_x 와 θ_y 는 회전축의 x_b 및 y_b -축에 대한 회전변위이다. $\underline{\epsilon}_{xb}$, $\underline{\epsilon}_{yb}$ 그리고 $\underline{\epsilon}_{zb}$ 는 각각 x_b , y_b 및 z_b -축방향의 단위벡터들이며 S는 미소요소의 질량중심 G의 z좌표이고 h는 지반과 질량중심 G사이의 수직거리이다.

다음으로 전단력 Q_x 와 Q_y , 휨모멘트 M_x 와 M_y , 초기 축방향력 P, 그리고 초기 축방향 토크 T들의 효과를 포함하는 미소요소에 대한 동력학적 관계식(Kinetic relations)은 그림 3에서 보여지는 자유물체도로부터 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\underline{F}^* = \left(\frac{\partial Q_x}{\partial S} + P \frac{\partial \theta_y}{\partial S} + f_x \right) dS \cdot \underline{\epsilon}_x$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial S} - P \frac{\partial \theta_x}{\partial S} + f_y \right) dS \cdot \varepsilon_y \\
 \underline{M}_G = & \left\{ \frac{\partial M_x}{\partial S} - Q_y + P \left(\frac{\partial u_y}{\partial S} + \theta_x \right) + T \frac{\partial \theta_y}{\partial S} \right\} dS \cdot \varepsilon_x \\
 & + \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial S} + Q_x - P \left(\frac{\partial u_x}{\partial S} - \theta_y \right) - T \frac{\partial \theta_x}{\partial S} \right\} \\
 & dS \cdot \varepsilon_y \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서 \underline{F}^* 는 미소요소에 작용하는 합력이며, \underline{M}_G 는 미소요소의 질량중심 G에 대한 외력들의 모멘트이고, f_x 와 f_y 는 각각 x_b 및 y_b 방향으로 굴대(shaft)에 분포된 단위길이당 작용하는 외력들이다. 특히 f_x 와 f_y 는 베어링이 위치한 점에서만 회전축에 작용한다. ε_x 와 ε_y 는 각각 x 및 y -축방향의 단위벡터인데 지반의 회전거동은 실제로 미소한 크기이므로 다음과 같은 근사식을 사용하여도 무방하다.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xb} & \sim \varepsilon_x \\
 \varepsilon_{yb} & \sim \varepsilon_y \quad (15)
 \end{aligned}$$

미소요소에 대한 Newton의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \underline{F}^* & = m \cdot \underline{a}_G \\
 \underline{M}_G & = \underline{H}_G \quad (16)
 \end{aligned}$$

위의 (16)식에 지금까지 유도한 식들을 대입하면 미소요소에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q_x}{\partial S} + P \frac{\partial \theta_y}{\partial S} + f_x & = \rho A a_x \\
 \frac{\partial Q_y}{\partial S} - P \frac{\partial \theta_x}{\partial S} + f_y & = \rho A a_y \\
 \frac{\partial M_x}{\partial S} - Q_y + P \left(\frac{\partial u_y}{\partial S} + \theta_x \right) + T \frac{\partial \theta_y}{\partial S} \\
 & = \rho \{ I_T (\ddot{\theta}_{xb} + \ddot{\theta}_x) + I_P \omega (\dot{\theta}_{yb} + \dot{\theta}_y) \} \\
 \frac{\partial M_y}{\partial S} + Q_x - P \left(\frac{\partial u_x}{\partial S} + \theta_y \right) - T \frac{\partial \theta_x}{\partial S} \\
 & = \rho \{ I_T (\ddot{\theta}_{yb} + \ddot{\theta}_y) - I_P \omega (\dot{\theta}_{xb} + \dot{\theta}_x) \} \quad (17)
 \end{aligned}$$

식 (17)은 공간변수 S와 시간변수 t에 대한 편미분방정식이므로 이를 수치해석적인 방법으로 풀기 위하여 그림 4와 같은 길이가 $(S_2 - S_1)$ 인 유한보요소(finite beam element)를 생각하자. 가상일의 원리와 Galerkin의 방법 및 보요소의 절점변위와 회전각에 대해 간단한 선형보간법을 적용하면 식 (17)로부터 다음과 같은 보요소에 대한 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\underline{M}_e \ddot{\underline{q}}_e + \underline{C}_e \dot{\underline{q}}_e + \underline{K}_e \underline{q}_e = \underline{Q}_e \quad (18)$$

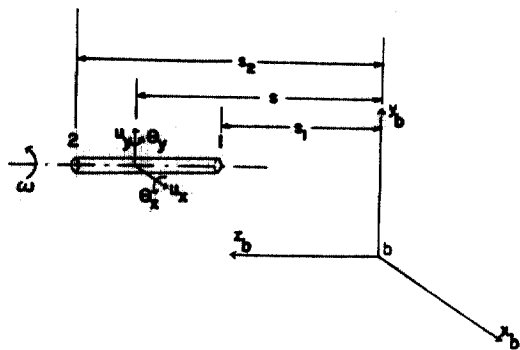


그림 4. A Finite beam element.

여기서 \underline{q}_e 는 보요소의 절점1과 2의 절점변위 및 절점회전각으로 표시되는 벡터이며 다음과 같다.

$$\underline{q}_e^T = [U_{x,1} \ U_{y,1} \ \theta_{x,1} \ \theta_{y,1} \ U_{x,2} \ U_{y,2} \ \theta_{x,2} \ \theta_{y,2}] \quad (19)$$

\underline{M}_e 는 보요소의 질량행렬이며, \underline{C}_e 는 보요소의 감쇠행렬이고 다음과 같다.

$$\underline{C}_e = \underline{C}_e^G + \underline{C}_e^C + \underline{C}_e^D \quad (20)$$

여기서 \underline{C}_e^G 는 회전축의 회전각속도 ω 에 기인하는 행렬이며, \underline{C}_e^C 는 지반의 회전거동 (θ_{xb} , θ_{yb} , θ_{zb})에 기인하는 행렬이고, \underline{C}_e^D 는 베어링내의 윤활유막이 갖는 감쇠값에 기인하는 행렬이다. 그리고 \underline{K}_e 는 보요소의 강성행렬인데 다음과 같다.

$$\underline{K}_e = \underline{K}_e^C + \underline{K}_e^P + \underline{K}_e^R + \underline{K}_e^T + \underline{K}_e^B \quad (21)$$

여기서 \underline{K}_e^C 는 보요소가 가지고 있는 강성에 의한 강성행렬이고, \underline{K}_e^P 는 초기축력 P에 의한 행렬, \underline{K}_e^T 는 초기 축방향 토크 T에 의한 행렬, \underline{K}_e^R 는 지반의 회전거동에 기인하는 행렬이며, \underline{K}_e^B 는 베어링내의 윤활유막이 갖는 강성값에 기인하는 행렬이다. 마지막으로 \underline{Q}_e 는 지진에 의한 지반의 병진거동 및 회전거동에 기인하는 절점력벡터이다. 식 (18)에 사용된 여러가지의 벡터와 행렬들은 부록 I에서 주어진다.

원판(discs)의 영향은 이를 3차원공간에서 회전하는 강체원판(rigid discs)으로 생각하여 회전축-베어링 시스템의 지진해석에 포함할 수 있다. 회전축의 i번째 절점에 원판이 위치한다면 이때 이 원판에 대한 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽²⁾.

$$\underline{M}_d \ddot{\underline{q}}_i + \underline{C}_d \dot{\underline{q}}_i + \underline{K}_d \underline{q}_i = \underline{Q}_i \quad (22)$$

여기서 \underline{q}_i 는 i번째 절점의 변위와 회전각으로 구성되

는 벡터이며, M_d 는 원판에 대한 질량행렬, C_d 는 원판에 대한 감쇠행렬이고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C_d = C_d^c + C_d^c \quad (23)$$

여기서 C_d^c 는 회전축의 회전속도 ω 에 기인하는 행렬이며, C_d^c 는 지진에 의한 지반의 회전거동에 기인하는 행렬이다. 식 (22)에서 K_d 는 원판에 대한 강성행렬이며 지반의 회전거동에 기인하는 행렬이다. Q 는 지반의 회전 및 병진거동에 기인하는 절점력벡터이며, 위의 모든 행렬과 벡터는 부록 II에서 주어진다.

전체 회전축-베어링 시스템에 대한 운동방정식은 지금까지 유도한 보요소와 원판요소에 대한 행렬들과 벡터들을 적절히 조합하여 다음과 같은 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F \quad (24)$$

여기서 M 은 시스템 질량행렬이고, C 는 지반의 회전거동함수를 포함하는 시스템 감쇠행렬이며, K 는 마찬가지로 지반의 회전거동을 포함하는 강성행렬이다. F 는 지반의 회전 및 병진거동을 모두 포함하는 시스템 하중벡터이고, X 는 전체 회전축-베어링 시스템에 대한 미지 절점변위벡터이다. 만약 m 개의 유한 보요소를 전체 회전축을 나타내기 위해 사용한다면, M , C 및 K 는 $4(m+1) \times 4(m+1)$ 행렬들이며, 벡터 F 와 X 의 차수는 $4(m+1)$ 이다.

앞에서 유도한 운동방정식 (24)는 파라미터릭 및 비제차여기(parameteric and inhomogeneous excitations)를 포함하고 있는데 이는 좌변의 강성행렬 K 와 감쇠행렬 C 가 지반의 회전거동함수를 포함하고 그리고 우변의 힘 벡터 F 가 회전거동과 병진거동함수를 포함하고 있음을 뜻한다. 이러한 운동방정식의 해법에는 불규칙진동(random vibration) 분야에서 널리 사용되는 스펙트럼 해법(spectral analysis)을 적용할 수가 없다. 본 논문에서는 우선 2절에서 설명한 방법으로 여섯 성분의 지반가속도 시력이력함수를 시물레이션하고, 이를 입력데이터로 하여 회전축-베어링 시스템의 응답벡터 시간이력함수를 운동방정식 (24)에 직접적분법을 적용하여 얻었다. 충분한 세트의 지반가속도 시간이력함수를 시물레이션하고 각 세트에 대응하는 응답벡터들을 얻은 다음, 통계학 방법으로 응답벡터의 평균함수, 표준편차, 또는 r.m.s.(root mean square) 값들을 시간의 함수로 나타낼 수 있다.

4. 해석예제

그림 1과 같은 회전축-베어링 시스템에 대해 표 1과 2로 주어지는 데이터를 해석예제에서 사용하기로 한다.

시물레이션기법으로 얻은 지반 병진가속도 및 회전가속도에 대한 시간이력곡선이 그림 5와 6으

표 1. Input data for a rotor-bearing system.

$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$E = 20 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	$\nu = 0.3$
$\omega = 3000 \text{ rpm}$	$h = 1 \text{ m}$	$m = 5000 \text{ kg}$
$I = 2.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_0 = 1.267 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$K_{xx1} = 5.89 \times 10^8 \text{ N/m}$
$K_{yy1} = 5.1 \times 10^7 \text{ N/m}$	$K_{yy1} = -1.29 \times 10^8 \text{ N/m}$	$K_{yy1} = 1.87 \times 10^9 \text{ N/m}$
$K_{xx2} = 6.7 \times 10^8 \text{ N/m}$	$K_{yy2} = 2.16 \times 10^7 \text{ N/m}$	$K_{yy2} = -1.49 \times 10^8 \text{ N/m}$
$K_{yy2} = 2.27 \times 10^9 \text{ N/m}$	$C_{xx1} = 2.8 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{sec/m}$	$C_{yy1} = -4.1 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{sec/m}$
$C_{xx1} = -4.1 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{sec/m}$	$C_{yy1} = 1.17 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{sec/m}$	$C_{xx2} = 3.1 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{sec/m}$
$C_{yy2} = -5.0 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{sec/m}$	$C_{yy2} = -5.0 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{sec/m}$	$C_{yy2} = 1.37 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{sec/m}$

표 2. Parameters for the earthquake ground motions.

Envelope function	$t_1 = 3 \text{ sec}$	$t_2 = 13 \text{ sec}$	$c = 0.26$
Power spectral densities	$\omega_k = 18.85 \text{ rad/s}$	$\xi_x = 0.65$	$s_x^2 = 1.35 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{sec}^3$
	$\omega_k = 30.3 \text{ rad/s}$	$\xi_y = 0.65$	$s_y^2 = 3.70 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{sec}^3$
	$\omega_k = 304.8 \text{ m/s}$	$\xi_z = 0.65$	$s_z^2 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{sec}^3$

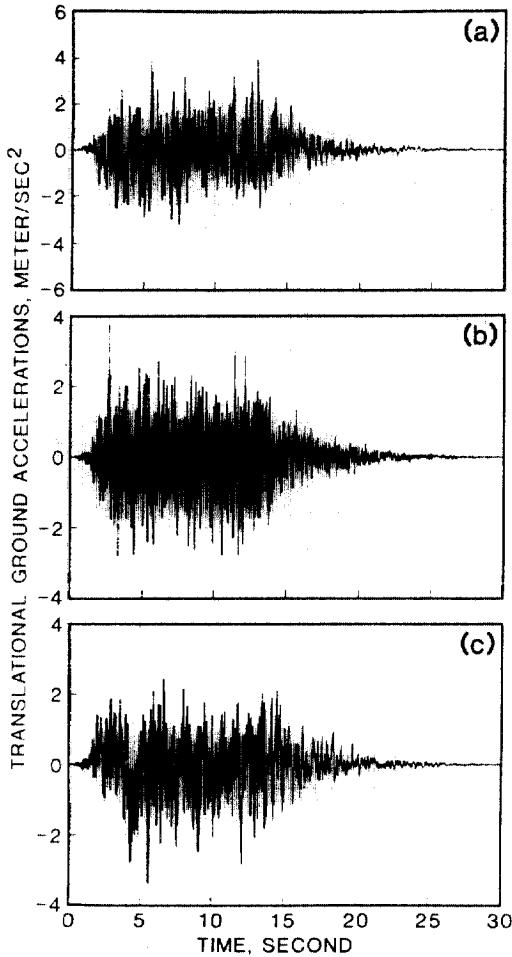


그림 5. Simulated sample functions of translational ground accelerations : (a) along x_b -direction, \ddot{X}_b ; (b) along y_b -direction, \ddot{Y}_b ; (c) along z_b -direction : \ddot{Z}_b .

으로 주어진다. 이들은 1940년 5월 미국 캘리포니아주의 El Centro에서 일어난 지진에 의한 지반거동을 시뮬레이션한 것들이다.

그림 5와 6으로 주어진 지반거동을 입력데이터로 하는 회전축-베어링 시스템의 응답벡터는 식 (24)에 직접적분법을 적용하여 얻는데, 이중 그림 1에서 보여지는 회전축-베어링 시스템의 베어링 I에서 x -축방향으로 따른 회전축과 베어링 사이의 상대변위 x_1 과 x -축방향으로 작용하는 회전축과 베어링 사이의 반작용력 F_{x1} 이 각각 그림 7(a)와 8(a)에 나타나 있다. 지반의 회전거동(θ_{ab} , θ_{yb} , θ_{zb})를 무시한 경우 이에 대응하는 응답치의 시간이력곡선

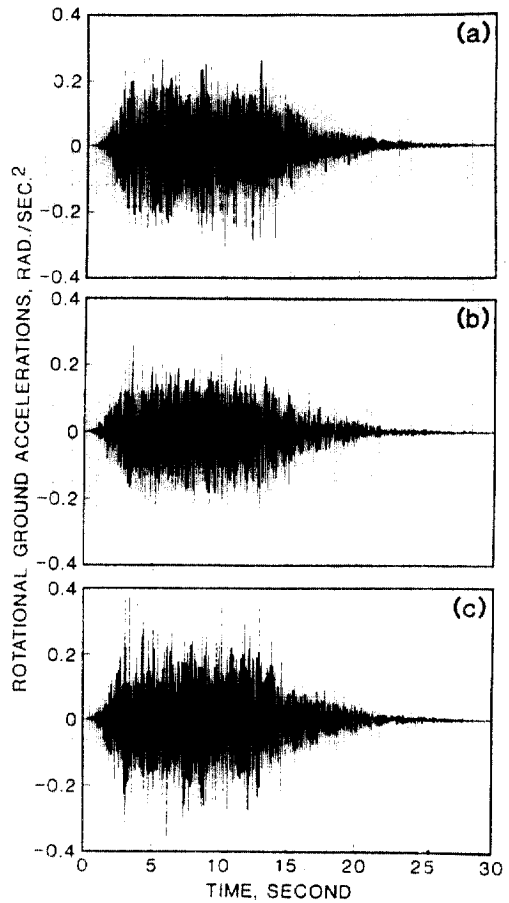


그림 6. Simulated sample functions of rotational ground accelerations : (a) about x_b -axis, $\ddot{\theta}_{ab}$; (b) about y_b -axis, $\ddot{\theta}_{yb}$; (c) about z_b -axis, $\ddot{\theta}_{zb}$.

은 그림 7(b)와 8(b)에 나타나 있다. 이 그림들에서 보는 바와 같이 지반의 회전거동은 회전축-베어링 시스템의 응답치의 진폭을 증가시킨다.

100세트의 여섯 성분 지반가속도 시간이력곡선들을 시뮬레이션 기법으로 얻고, 각 세트의 지반거동에 대한 회전축-베어링 시스템의 응답치를 구한 다음 일반적인 통계학을 이용하여 시간함수인 응답치의 평균함수, 표준편차 또는 r.m.s.값 등을 얻을 수 있다. 그림 9와 10에서 곡선 1은 x_1 및 F_{x1} 에 대한 r.m.s.값이 시간함수로써 나타나 있다.

지반의 회전거동을 고려하지 않는 일반적인 지진해석시에는 스펙트럼 해법을 적용할 수 있는데,

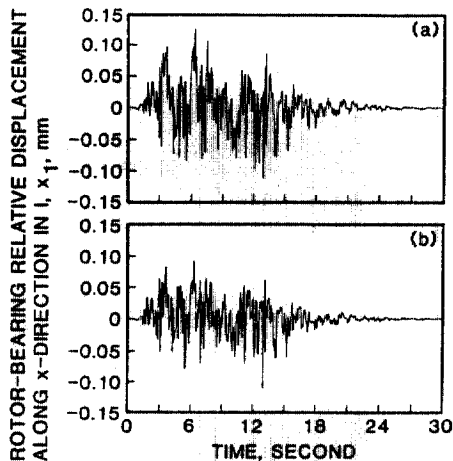


그림 7. Sample functions of rotor-bearing relative displacement along x-direction in bearing I : (a) Including base rotations, (b) Excluding base rotations.

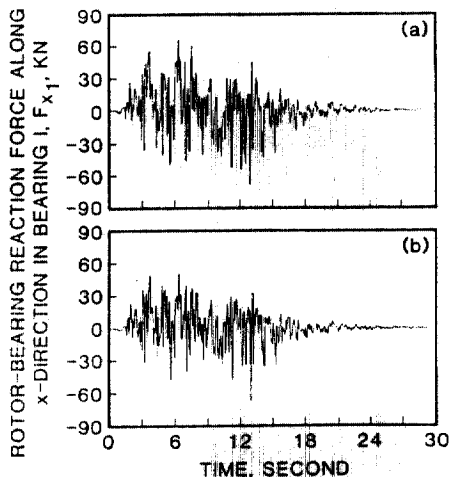


그림 8. Sample functions of rotor-bearing reaction force along x-direction in bearing I : (a) Including base rotations, (b) Excluding base rotations.

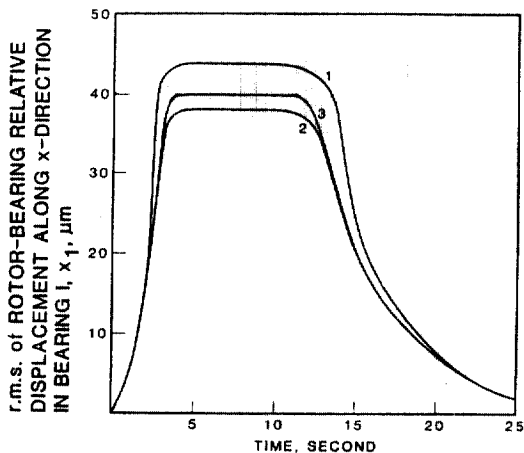


그림 9. Root mean square of rotor-bearing relative displacement along x-direction in bearing I : Curve 1=simulation results including base rotations ; Curve 2=simulation results excluding base rotations ; Curve 3=spectral analysis results ;

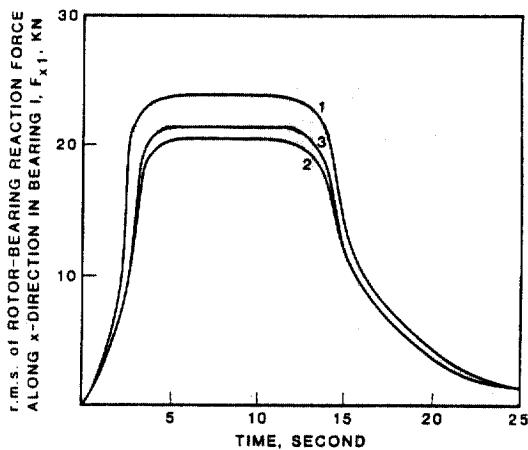


그림 10. Root mean square of rotor-bearing reaction force along x-direction in bearing I : Curve 1=simulation results including base rotations ; Curve 2=simulation results excluding base rotations ; Curve 3=spectral analysis results ;

이 경우에 얻은 r.m.s 값은⁽⁹⁾ 이들 그림에서 곡선 2로써 나타나 있고, 마찬가지로 지반의 회전거동을 무시했을 때 시뮬레이션 기법으로 얻은 값은 이들 그림에서 곡선 3으로 나타난다. 그림 9와 10에서 곡선 2와 곡선 3의 비교로부터, 지반의 회전거동을

무시한 경우, 스펙트럼 해법으로 얻은 결과와 시뮬레이션 기법으로 얻은 결과는 매우 근사함을 알 수 있다. 이는 100세트의 여섯성분 지반거동 시간 이력곡선을 사용하면 충분히 정확한 응답치를 얻을 수 있음을 보여준다.

시뮬레이션 기법으로 얻은 시간함수인 r.m.s.값은 실제로는 그림 9와 10에서 보여지는 곡선 1 및 3과 같은 유연한 곡선이 아니다. 여기서 나타낸 유연한 곡선은 시뮬레이션 기법으로 얻은 r.m.s.값의 최소자승회귀법(least square method)에 의한 곡선을 나타낸다.

5. 결 론

지반의 회전가속도에 대한 시간이력곡선의 기록은 극히 드물기 때문에, 지진해석시 특히 회전거동에 민감한 회전기계를 해석하기 위해서는 본 논문에서 제시한 방법으로 회전가속도를 시뮬레이션하여 사용할 수 밖에 없다. 한 세트의 지반거동 시간이력곡선을 산출하기 위해 약 20 sec의 CPU time (IBM370 기준)이 소요되므로 아주 경제적이라고 볼 수 있다.

예제에서 보는 바와 같이 지진에 의한 지반의 회전거동은 시스템의 응답벡터의 진폭을 증가시키므로 이러한 회전기계의 지진해석에 있어서는 지반의 회전거동이 필히 고려되어야 함을 보여준다.

한 세트의 지반거동을 시뮬레이션하고 이에 대응하는 회전축-베어링 시스템의 응답벡터를 산출하는데 소요되는 시간은 약 2분의 CPU time(IBM 370 기준)이었으며, 100세트의 응답벡터를 산출하기 위해서는 2시간 이상의 CPU time이 소요되었다. 하지만 식 (24)과 같은 파라미터릭 및 비제차여기를 포함하는 운동방정식을 풀기위한 해석학적 방법(analytical method)이 아직 불규칙 진동(random vibration)학 분야에서는 개발되지 못한 실정이므로 본 논문에서 제시한 방법이 유일한 방법임을 밝힌다. 그러나 이러한 파라미터릭여기를 포함하는 운동방정식에 대한 해석학적 방법이 개발되면 계산시간을 현저히 줄일 수 있으므로 이에 대한 꾸준한 연구가 필요할 것으로 생각된다.

감사의 말씀

본 연구는 문교부 학술연구조성비 지원으로 진행되었으며, 이에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Liu, S. C., and Jhaveri, D. P., "Spectral Simulation and Earthquake Site Properties," *Journal of the En-*

gineering Mechanics Division, ASCE, vol. 95, No. EM5 Oct. 1969, 1145-1168.

2. Soni, A. H., and Srinivasan, V., "Seismic Analysis of a Gyroscopic Mechanical System," *J. Vibration Acoustics, stress and Reliability Design, Trans. ASME*, Vol. 105, pp.449-455, 1983.
3. Newmark, N. M., "Torsion in symmetrical Builddings," *Proc. Fourth World Conf. Earthq. Engrg.*, Santiago, Chile, Vol. 2, No. A-3, 1969, pp.19-32.
4. Cramer, H., and Leadbetter, M. F., "Stationary and Related Stochastic Processes," John Wiley, New York, NY, 1967.
5. Shinozuka, M., and Jan, C. M., "Simulation of multivariate and Multidimensional processes II," *J. the Acoustical Society of America*, 1972.
6. Yang, J. N., and Shinozuka, M., "Numerical Fourier transform in Random Vibration," *J. Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 95, 1969, pp.731-746.
7. Liu, S. C., "Evolutionary Power Spectral Density of Strong Motion Earthquake," *Bulletin Seismological Society of America*, Vol. 60, No. 3, pp.891-900, 1970.
8. Kanai, K., "Seismic-empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground," *Univ. Tokyo Bull. Earthquake Res. Inst.*, Vol. 35, pp.309-325, 1957.
9. Kim, K. B., "Random Vibration of Rotating Mechines Under Earthquake Excitations," D. Sc. Dissertation, The George Washington University, Washington, D. C., 1986, pp.4-1~4-8.

<부록 I> 보요소에 대한 행렬들

$$\underline{M}_e = \begin{bmatrix} \rho A l / 3 & 0 & 0 & 0 & \rho A l / 6 & 0 & 0 & 0 \\ & \rho A l / 3 & 0 & 0 & 0 & \rho A l / 6 & 0 & 0 \\ & & \rho I l / 3 & 0 & 0 & 0 & \rho I l / 6 & 0 \\ & & & \rho I l / 3 & 0 & 0 & 0 & \rho I l / 6 \\ (SYM) & & & & \rho A l / 3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \rho A l / 3 & 0 & 0 \\ & & & & & & \rho I l / 3 & 0 \\ & & & & & & & \rho I l / 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_e^G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & \rho A d / 3 & 0 & 0 & 0 & \rho I d / 6 \\ (SKEW-SYM) & & & 0 & 0 & 0 & -\rho I d / 5 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \rho A d / 3 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_e^C = \begin{bmatrix} 0 & -2\rho A\theta_{zb}/3 & 0 & 0 & 0 & -2\rho A\theta_{zb}/6 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 2\rho A\theta_{zb}/6 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{(SKEW-SYM)} & & & 0 & -2\rho A\theta_{zb}/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_e^D = \begin{bmatrix} (C_{xx})_1 & (C_{yy})_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (C_{yy})_1 & (C_{xx})_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{xx})_2 & (C_{yy})_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{yy})_2 & (C_{xx})_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_e^C = \begin{bmatrix} kAG/l & 0 & 0 & kAG/l & -kAG/l & 0 & 0 & kAG/2 \\ & kAG/l & -kAG/2 & 0 & 0 & -kAG/l & -kaG/2 & 0 \\ & & (kAGl/3+EI_T/l) & 0 & 0 & kAG/2 & (kAGl/6-EI_T/l) & 0 \\ \text{(SYM)} & & & (kAGl/3+EI_T/l) & -kAG/2 & 0 & 0 & (kAGl/5-EI_T/l) \\ & & & & kAG/l & 0 & 0 & -kAG/2 \\ & & & & & kAG/l & kAG/2 & 0 \\ & & & & & & (kAGl/3+EI_T/l) & 0 \\ & & & & & & & (kAGl/3+EI_T/l) \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_e^P = p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ & & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/6 & 0 \\ \text{(SYM)} & & & -1/3 & 1/2 & 0 & 0 & -1/6 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ & & & & & 0 & -1/2 & 0 \\ & & & & & & -1/3 & 0 \\ & & & & & & & -1/3 \end{bmatrix} \quad \underline{K}_e^T = T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_e^R = \begin{bmatrix} -(\theta_{yb}^2\theta_{zb}^2)l/3 & (\theta_{xb}\theta_{yb}\theta_{zb})l/3 & 0 & 0 & -(\theta_{yb}^2\theta_{zb}^2)l/6 & (\theta_{xb}\theta_{yb}\theta_{zb})l/6 & 0 & 0 \\ (\theta_{xb}\theta_{yb}\theta_{zb})l/3 & -(\theta_{zb}^2\theta_{xb}^2)l/3 & 0 & 0 & (\theta_{xb}\theta_{yb}\theta_{zb})l/6 & -(\theta_{zb}^2\theta_{xb}^2)l/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\theta_{yb}^2\theta_{zb}^2)l/6 & (\theta_{xb}\theta_{yb}\theta_{zb})l/6 & 0 & 0 & -(\theta_{yb}^2\theta_{zb}^2)l/3 & (\theta_{xb}\theta_{yb}\theta_{zb})l/3 & 0 & 0 \\ (\theta_{xb}\theta_{yb}\theta_{zb})l/6 & -(\theta_{zb}^2\theta_{xb}^2)l/6 & 0 & 0 & (\theta_{xb}\theta_{yb}\theta_{zb})l/3 & -(\theta_{zb}^2\theta_{xb}^2)l/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_e^B = \begin{bmatrix} (k_{xx})_1 & (k_{xy})_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (k_{yx})_1 & (k_{yy})_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{xx})_2 & (k_{xy})_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{yx})_2 & (k_{yy})_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Q}_e = \begin{bmatrix} -\rho A X_b l / 2 - \rho A h l (\theta_{xb} \theta_{yb} - \theta_{zb}) / 2 & -\rho A l (\theta_{zb} \theta_{xb} + \theta_{yb}) (2s_1 + s_2) / 6 \\ -\rho A Y_b l / 2 + \rho A h l (\theta_{zb}^2 \theta_{xb}^2) / 2 & -\rho A l (\theta_{yb} \theta_{zb} - \theta_{xb}) (2s_1 + s_2) / 6 \\ -\rho l (I_T \theta_{xb} + I_P \omega \theta_{yb}) / 2 & \\ -\rho l (I_T \theta_{yb} - I_P \omega \theta_{xb}) / 2 & \\ -\rho A X_b l / 2 - \rho A h l (\theta_{xb} \theta_{yb} - \theta_{zb}) / 2 & -\rho A l (\theta_{zb} \theta_{xb} + \theta_{yb}) (s_1 + 2s_2) / 6 \\ -\rho A Y_b l / 2 + \rho A h l (\theta_{zb}^2 \theta_{xb}^2) / 2 & -\rho A l (\theta_{yb} \theta_{zb} - \theta_{xb}) (s_1 + 2s_2) / 6 \\ -\rho l (I_T \theta_{xb} + I_P \omega \theta_{yb}) / 2 & \\ -\rho l (I_T \theta_{yb} - I_P \omega \theta_{xb}) / 2 & \end{bmatrix}$$

<부록 II> 원판요소에 대한 행렬들

$$\underline{M}_d = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I_0)_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_0)_i \end{bmatrix}$$

$$\underline{Q}_i = \begin{bmatrix} -m_i X_b - m_i h (\theta_{xb} \theta_{yb} - \theta_{zb}) \\ -m_i Y_b + m_i h (\theta_{zb}^2 \theta_{xb}^2) \\ -(I_0)_i \theta_{xb} - (I_0)_i \omega \theta_{yb} \\ -(I_0)_i \theta_{yb} + (I_0)_i \omega \theta_{xb} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_d^G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_0)_i \omega \\ 0 & 0 & -(I_0)_i \omega & 0 \end{bmatrix}$$

where

m_i = Mass of the i^{th} disk

$(I_0)_i$ = Moment of inertia of the i^{th} disk about the spin axis

$(I_0)_i$ = Moment of inertia of the i^{th} disk about an axis perpendicular to the spin axis and passing through center of mass of the disk,

$$\underline{C}_d^C = \begin{bmatrix} 0 & -2m_i \theta_{zb} & 0 & 0 \\ 2m_i \theta_{zb} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(接受: 1989. 9. 1)

$$\underline{K}_d = \begin{bmatrix} -m_i (\theta_{yb}^2 \theta_{zb}^2) & m_i (\theta_{xb} \theta_{yb} - \theta_{zb}) & 0 & 0 \\ m_i (\theta_{xb} \theta_{yb} + \theta_{zb}) & -m_i (\theta_{zb}^2 + \theta_{xb}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$