

1차원 변화단면을 갖는 양단고정 원호아치의 자유진동 해석

Free Vibrations of Clamped Circular Arches with Linear Variable Cross-Section

이 병 구*
Lee, Byoung Koo*

Abstract

The main purpose of the present paper is to present both the fundamental frequency and some higher free vibration frequencies for circular arches with variable section, in which rotatory inertia is included. The differential equations are derived for the in-plan free vibration of elastic circular arches with variable section. These equations were solved numerically for the linear variable circular cross-section with clamped-clamped end constraint. As the numerical results, the four lowest nondimensional natural frequencies presented as functions of the nondimensional system parameters : the end moment of inertia to crown moment of inertia ratio, the slenderness ratio, and the opening angle. The effect of rotatory inertia on the nondimensional natural frequency is also reported.

요 지

아치가 진동할 때 발생하는 변위에 의한 함용력과 질량을 갖는 아치요소에 발생하는 관성력에 대한 동적 평형방정식을 이용하여 회전관성을 고려한 변단면 원호아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다.

이 미분방정식을 1차원으로 변화하는 원형단면을 갖는 양단고정 아치에 적용시키고 시행착오적 고유치문제와 Runge-Kutta method를 이용하여 수치해석하였다.

수치해석 결과로 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하고, 고유진동수와 단면비와의 관계, 고유진동수와 세장비와의 관계 및 고유진동수와 중심각과의 관계를 그림에 나타내었다.

1. 서 론

아치는 구조적으로 매우 이상적이며 또 그 외관이 아름답기 때문에 교량등 각종 구조물에 많이 이용되고 있다⁽¹⁾. 아치를 교량과 같이 동하중이 작용하는 구조에 이용하는 경우에는 아치구조의 진

동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요청된다⁽²⁾. 특히 구조물의 고유한 특성중에 하나인 자유진동을 해석하는 것은 진동의 제문제중에서도 가장 먼저 선행되어야 할 연구과제이다.

등단면아치의 자유진동을 해석한 논문들은 많은 참고문헌들^(3, 4, 5, 6)에서 찾아 볼 수 있다.

*정회원 · 원광대학교 공과대학 부교수, 토목공학과

아치의 단면을 변단면으로 하는 경우에 재료가 절약되는 경제적 이점이 있다. 따라서 가능하면 아치의 단면은 등단면보다 변단면으로 하는 것이 바람직하다.

Royster⁽⁷⁾는 단면깊이가 일정하고 단면폭이 변화하는 구형단면을 갖는 양단고정 원호아치에 대하여 자유진동을 해석하였으며, Wang⁽⁸⁾은 아치축 접선각의 역할에 비례하는 변화단면을 갖는 양단고정 포물선아치의 자유진동을 해석하였다. 이 두 문헌은 Rayleigh-Ritz method에 의하여 자유진동을 해석하였으며 제1고유진동수만을 계산하였다.

Sakiyama⁽⁹⁾는 곡률이 변화하는 아치에 대하여 위의 Wang과 같은 변화단면을 갖는 아치의 자유진동을 해석하였다. 이 논문에서는 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였고, 이 미분방정식을 유한차분법으로 해석하였다. 고유진동수는 대칭진동형과 역대칭진동형에 대하여 각각 제3고유진동수까지 계산하였다.

Laura등⁽¹⁰⁾은 불연속 변화단면을 갖는 원호아치를 Rayleigh-Ritz method에 의하여 해석하였으며 제1고유진동수만을 계산하였다.

본 연구는 임의의 변화단면을 갖는 원호아치의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 유도하고, 이 미분방정식을 1차원으로 변화하는 원형단면에 적용하는 데에 그 목적이 있다. 이 미분방정식에는 회전관성의 영향을 고려한다. 실제의 수치해석에는 양단고정 아치를 택하고 제4무차원고유진동수까지 계산한다.

2. 수학적 모델

그림 1은 임의의 변화단면을 갖는 원호아치의 기하학적 형상을 나타내고 있다. 이 그림에서 a 와 α 는 아치의 반경과 중심각을 나타내며, β 는 수평축으로부터 아치 좌단의 반경까지의 각도이다. ϕ 는 수평축으로부터 아치축 임의점의 반경까지의 각도이다.

아치정점의 단면이차모멘트와 단면적을 각각 I_0, A_0 라 하고 아치축 임의점의 단면이차모멘트와 단면적을 각각 I, A 라 한다. 또한 아치단부의 단면이차모멘트를 I_a 라 한다.

정(+)의 곡률중심방향 변위 w , 접선방향 변위 v 및 단면 회전각 ψ 가 역시 그림 1에 나타나 있다.

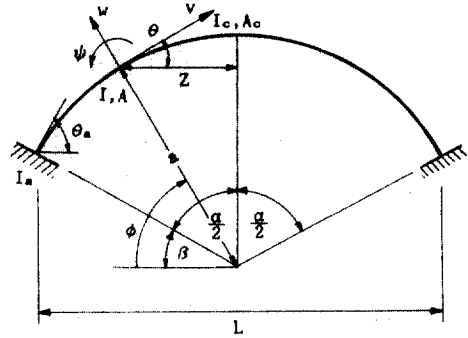


그림 1. 아치의 기하학적 형상

아치축 임의점의 I 와 A 는 다음과 같이 일반적으로 변화하는 임의의 변화단면으로 정의한다.

$$I = I_c F \quad (1)$$

$$A = A_c G \quad (2)$$

윗 식들에서 F 와 G 는 다음 식들과 같이 ϕ 에 관한 함수이며, F 와 G 가 결정되면 아치축 임의점의 I 와 A 가 정의된다.

$$F = F(\phi) \quad (3)$$

$$G = G(\phi) \quad (4)$$

또한 아치축의 단위길이당 질량 m 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m &= rA \\ &= rA_c G \end{aligned} \quad (5)$$

윗 식에서 r 는 아치재료의 단위체적당 질량이다.

아치가 자유진동하게 되면 아치축의 단면에는 그림 2와 같이 축방향력 N , 전단력 V 와 휨모멘트 M 이 발생하고, 질량을 갖는 아치축의 미소요소에는 곡률중심방향 관성력 P_r , 접선방향 관성력 P_t 와 회전관성우력 T 가 작용하게 된다. 그림 2에서 합용력 N, V, M 및 관성력 P_r, P_t, T 는 모두 정(+)으로 표시되어 있다.

합용력 N 과 M 을 w 와 v 로 표시하면 다음 식들과 같다⁽¹¹⁾.

$$\begin{aligned} N &= \frac{EA}{a} (v' + w) + \frac{EI}{a^3} (w'' + w) \\ &= \frac{EA_c G}{a} (v' + w) + \frac{EI_c F}{a^3} (w'' + w) \end{aligned} \quad (6)$$

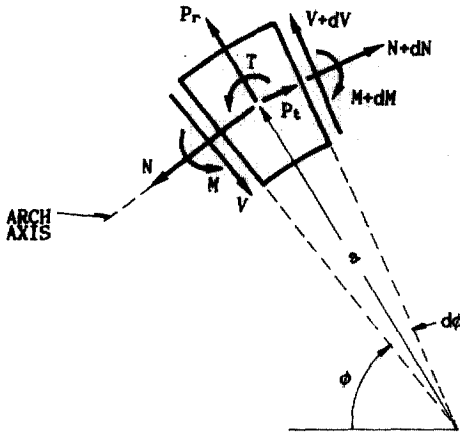


그림 2. 아치미소요소에 작용하는 합용력과 관성력

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{EI}{a^2}(w'' + w) \\
 &= -\frac{EI_c F}{a^2}(w'' + w) \quad (7)
 \end{aligned}$$

윗 식들에서 '은 ϕ 에 관한 1차미분, ''은 2차미분을 나타내며 이 후에도 같은 의미로 사용한다. 또한 단면 회전각 ψ 는 다음 식과 같다⁽¹²⁾.

$$\psi = \frac{1}{a}(w' - v) \quad (8)$$

아치의 자유진동은 $w(\phi, t) = w \sin \alpha t$, $v(\phi, t) = v \sin \alpha t$, $\psi(\phi, t) = \psi \sin \alpha t$ 등으로 표시되는 조화진동을 한다고 가정한다. 이 식들에서 t 는 시간, w 는 고유 각진동수이다.

아치의 자유진동으로 인한 아치축의 미소요소에 발생하는 단위길이당 관성력 P_n , P_t 및 T 는 다음과 같이 표시된다⁽¹³⁾.

$$\begin{aligned}
 P_r &= m \omega^2 w \\
 &= \gamma A_c \omega^2 G w \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_t &= m \omega^2 v \\
 &= \gamma A_c \omega^2 G v \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= m \omega^2 \frac{I}{A} \psi \\
 &= \frac{\gamma \omega^2 I_c F}{a}(w' - v) \quad (11)
 \end{aligned}$$

그림 2에서 합용력 및 관성력사이의 동적 평형 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$N' + V + aP_t = 0 \quad (12)$$

$$V' - N + aP_r = 0 \quad (13)$$

$$M' - aV - RaT = 0 \quad (14)$$

(14)식에서 R 은 회전관성 T 의 고려여부를 나타내는 지표로서 다음과 같다.

$$R = 0, \text{ 회전관성을 무시하는 경우} \quad (15.a)$$

$$R = 1, \text{ 회전관성을 고려하는 경우} \quad (15.b)$$

아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원 미분방정식으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변위식들을 이용한다.

$$\bar{w} = \frac{w}{a} \quad (16.a)$$

$$\bar{w}' = \frac{w'}{a} \quad (16.b)$$

$$\bar{w}'' = \frac{w''}{a} \quad (16.c)$$

$$\bar{w}''' = \frac{w'''}{a} \quad (16.d)$$

$$\bar{w}'''' = \frac{w''''}{a} \quad (16.e)$$

$$\bar{v} = \frac{v}{a} \quad (17.a)$$

$$\bar{v}' = \frac{v'}{a} \quad (17.b)$$

$$\bar{v}'' = \frac{v''}{a} \quad (17.c)$$

(6), (7)식의 합용력 N , M 식과 (9), (10), (11)식의 관성력 P_n , P_t , T 식을 이용하면 (12), (13), (14)식의 동적 평형방정식에서 합용력 N , V , M 과 관성력 P_n , P_t , T 를 소거할 수 있다. 이 때 소거하는 과정에서 위의 (16a)~(16e)와 (17a)~(17c)의 무차원 변위식들을 이용하면 다음의 (18), (19)식과 같이 임의의 변화단면을 갖는 원호아치의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \bar{w}'''' &= -2F'F^{-1}\bar{w}''' - (RS_c^{-2}C_c^2 + F'F^{-1} + 2J)\bar{w}' \\
 &\quad - (RS_c^{-2}C_c^2 + 2)F'F^{-1}\bar{w} \\
 &\quad + (C_c^2GF^{-1} - F'F^{-1} - S_c^2GF^{-1} - 1)\bar{w} \\
 &\quad + (RS_c^{-2}C_c^2 - S_c^2GF^{-1})\bar{v}' \\
 &\quad + RS_c^{-2}C_c^2F'F^{-1}\bar{v} \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{v}'' &= (RS_c^{-4}C_c^2FG^{-1} - 1)\bar{w}' - G'G^{-1}\bar{w} - G'G^{-1}\bar{v}' \\
 &\quad - S_c^{-4}C_c^2(RFG^{-1} + S_c^2)\bar{v} \quad (19)
 \end{aligned}$$

위의 무차원 미분방정식 (18), (19)식에서 S_c 는

(20)식으로 표시되는 세장비이며, C_i 는 (21)식으로 표시되는 무차원 고유진동수이다.

$$S_c = \frac{a}{r_c} \quad (20)$$

$$C_i = \omega a S_c \sqrt{\frac{r}{E}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (21)$$

위의 (20)식에서 $r_c = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}}$ 로 아치정점의 회전 전반경이다.

(18), (19)식의 무차원 미분방정식에서 $F=G=1$, $F'=F''=G'=0$ 이면 등단면 원호아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식으로 변환되며, 이 결과는 참고문헌(14)의 결과와 일치한다.

양단고정 원호아치에서 아치양단 즉, 좌단($\phi=\beta$) 및 우단($\phi=\alpha+\beta$)의 경계조건은 다음과 같다.

$$w = 0, \quad \phi = \beta \text{와 } \phi = \alpha + \beta \text{에서} \quad (22)$$

$$v = 0, \quad \phi = \beta \text{와 } \phi = \alpha + \beta \text{에서} \quad (23)$$

$$\psi = 0, \quad \phi = \beta \text{와 } \phi = \alpha + \beta \text{에서} \quad (24)$$

위의 3식은 (8), (16a), (16b), (17a)식을 이용하여 다음과 같이 무차원 경계조건식으로 유도된다.

$$\bar{w} = 0, \quad \phi = \beta \text{와 } \phi = \alpha + \beta \text{에서} \quad (25)$$

$$\bar{v} = 0, \quad \phi = \beta \text{와 } \phi = \alpha + \beta \text{에서} \quad (26)$$

$$\bar{w}' = 0, \quad \phi = \beta \text{와 } \phi = \alpha + \beta \text{에서} \quad (27)$$

이상에서 (18), (19)식이 임의 변화단면을 갖는 원호아치의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식이며 (25), (26), (27)식은 양단고정 아치에서 고정점의 무차원 경계조건식이다.

3. 1차원 변화단면

무차원 미분방정식 (18), (19)식에서 아치의 변화단면을 결정해 주는 (3), (4)식의 F 및 G 를 정의하여야 한다. 본 연구에서는 아치의 변화단면을 다음 식과 같이 1차원 변화단면⁽⁵⁾으로 채택한다.

$$I = \frac{I_c}{\cos \theta \left[1 - \left(1 - \frac{I_c}{I_a \cos \theta_a} \right) \frac{2Z}{L} \right]} \quad (28)$$

윗 식에서 I , I_a , I_c 는 전술한 바와 같으며, θ 는 아치축 임의점의 접선각, θ_a 는 아치단부의 접선각, Z 는 아치의 정점에서 아치축 임의점까지의 수평거리, L 은 아치의 지간길이이다(그림 1 참조).

(28)식에서 θ 와 $\frac{Z}{L}$ 를 ϕ 의 함수로 표시하면 다음 식들과 같다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi \quad (29)$$

$$\frac{Z}{L} = 2 \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \cos \phi \quad (30)$$

또한 θ_a 는 (31)식과 같고, n 는 (32)식과 같이 I_a 와 I_c 의 단면비로 정의한다.

$$\theta_a = \frac{\alpha}{2} \quad (31)$$

$$n = \frac{I_a}{I_c} \quad (32)$$

위의 (29)~(32)식을 (28)식에 대입하고 정리하면 다음 식과 같다.

$$I = I_c \operatorname{cosec} \phi (1 + B \cos \phi)^{-1} \quad (33)$$

윗 식에서 B 는 다음과 같다.

$$B = \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \left(n^{-1} \sec \frac{\alpha}{2} - 1 \right), \quad \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (34.a)$$

$$B = \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \left(1 - n^{-1} \sec \frac{\alpha}{2} \right), \quad \phi > \frac{\pi}{2} \quad (34.b)$$

(1), (33)식에서 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$F = \operatorname{cosec} \phi (1 + B \cos \phi)^{-1} \quad (35)$$

(35)식에서 F' 및 F'' 를 구하면 다음과 같다.

$$F' = F^2 (2B \sin^2 \phi - \cos \phi - B) \quad (36)$$

$$F'' = 2F'^2 F^{-1} + F^2 \sin \phi (4B \cos \phi + 1) \quad (37)$$

아치단면이 원형단면이면, 아치정점과 아치축 임의점에서의 단면은 각각 그림 3과 같이 된다. 이 그림에서 D_c 및 D 는 각각 아치정점과 아치축 임의점에서의 단면직경이다.

그림 3에서 I_a 와 I_c 는 각각 $\frac{\pi D_c^4}{64}$, $\frac{\pi D^4}{64}$ 이므로 (1)

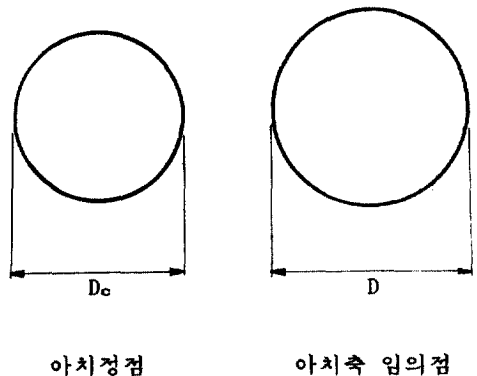


그림 3 아치단면

식으로 부터 다음의 관계식을 얻는다.

$$I = \frac{\pi D_c^4}{64} F$$

$$= \frac{\pi D^4}{64} \quad (38)$$

(38)식에서 D를 D_c 와 F로 표시하면 다음과 같다.

$$D = D_c F^{1/4} \quad (39)$$

그림 3에서 A_c 와 A는 각각 $\frac{\pi D_c^2}{4}$, $\frac{\pi D^2}{4}$ 이므로 (39)식으로 부터 다음의 관계식을 얻는다.

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$= \frac{\pi D_c^2}{4} F^{1/2}$$

$$= A_c F^{1/2} \quad (40)$$

(2)식과 (40)식으로 부터 다음의 관계를 얻는다.

$$G = F^{1/2} \quad (41)$$

윗 식에서 G' 를 구하면 다음과 같다.

$$G' = \frac{1}{2} F^{-1/2} F' \quad (42)$$

미분방정식 (18), (19)식에 (35), (36), (37)식 및 (41), (42)식을 대입하면 (28)식의 1차원으로 변화하는 원형단면을 갖는 원호아치의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식이 된다.

4. 수치해석 방법

미분방정식 (18), (19)식의 엄밀해는 존재하지 않으므로 수치해석법에 의하여 수치해를 구하여야 한다. 미분방정식의 수치해석방법에는 많은 방법들이 있지만 본 연구에서는 Runge-Kutta method를 채택한다.

미분방정식 (18), (19)식에는 불확정량인 C_i 의 항이 포함되어 있으므로 이 C_i 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 Runge-Kutta method를 이용하여 수치해석을 시행한다.

Runge-Kutta method는 초기치 문제이므로 (25), (26), (27)식의 아치좌단($\phi = \beta$)의 경계조건을 만족하는 초기치를 이용하여 수치해석을 시작하고, 가정한 C_i 값이 자유진동의 고유치인지는 아치우단($\phi = \alpha + \beta$)의 경계조건을 이용하여 판단한다. 즉, 자유진동의 고유치 C_i 값을 찾기 위하여 시행착오적 고유치문제를 이용하였으며, 구체적으로는 Bracketing methods에 하나인 Regula Falsi method를 이

용하였다.

위와 같은 수치해석 방법으로 C_i 값을 찾으면 (21)식으로 부터 고유각진동수 ω 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\omega = \frac{C_i}{a S_c} \sqrt{\frac{E}{r}} \quad (43)$$

(43)식으로 부터 고유진동수 f 를 구하면 다음 식과 같다.

$$f_i = \frac{\omega}{2\pi} \quad (44)$$

본 연구에서 유도한 미분방정식과 수치해석 방법의 타당성을 검증하기 위하여 동일한 아치모델에 대하여 제4고유진동수까지 계산한 본 연구의 결과와 구조해석용 범용프로그램인 SAP80의 결과를 표 1에 나타내었다. 본 연구의 모든 전자계산 결과는 원광대학교 전자계산소의 Prime750시스템을 이용하였다.

SAP80의 해석시에 3차원 보요소를 사용하였으며, 요소수를 40으로 할 때 고유진동수는 유효숫자 3자리까지 수렴하였으나 해의 정도를 강화시키기 위하여 요소수를 100으로 하여 계산하였다. 또한 SAP80의 해석시에 전단변형효과는 고려하지 않았다.

표 1. 본 연구와 SAP80의 고유진동수 비교(f : cps)

아치제원	i	본연구(R=1)		SAP80	오차(%)
		C_i	$f(A)$	$f(B)$	
$\alpha = 60^\circ$ $S_c = 90$ $n = 1$	1	53.31	48.76	48.87	0.23
	2	70.61	64.58	65.14	0.86
	3	116.0	106.1	106.8	0.66
	4	175.8	160.8	162.2	0.86
$\alpha = 90^\circ$ $S_c = 120$ $n = 2$	1	25.56	17.53	17.54	0.06
	2	48.02	32.94	32.49	1.39
	3	85.07	58.36	58.50	0.24
	4	105.5	72.37	72.39	0.03
$\alpha = 120^\circ$ $S_c = 150$ $n = 3$	1	14.49	7.954	7.950	0.05
	2	28.35	15.56	15.29	1.77
	3	49.16	26.98	26.98	0.00
	4	72.55	39.81	39.57	0.61

* 고유진동수(f) 계산시에 $r = 7850 \text{ N-sec}^2/\text{m}^4$, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $a = 10 \text{ m}$ 사용

* 오차(%) = $|A - B| \times 100/B$

표 1에서 보인 것과 같이 두 방법의 고유진동수는 아주 우수하게 접근한 것을 알 수 있으며, 따라서 본 연구에서 유도한 미분방정식과 수치해석 방법의 타당성을 입증할 수 있다.

5. 수치해석 결과

표 2는 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 회전관성을 무시한 경우($R=0$)와 회전관성을 고려한 경우($R=1$)에 대하여 무차원 고유진동수를 비교한 것이다.

표 2. 회전관성이 무차원 고유진동수에 미치는 영향 ($\alpha=60^\circ, S_c=90$)

n	i	C _i		영향(%)
		R=0(A)	R=1(B)	
1	1	53.35	53.31	0.08
	2	70.76	70.61	0.21
	3	116.5	116.0	0.43
	4	177.6	175.8	1.02
3	1	64.83	64.64	0.29
	2	80.23	79.97	0.32
	3	133.2	132.4	0.60
	4	205.8	203.5	1.13
5	1	70.02	70.00	0.03
	2	82.84	82.72	0.15
	3	141.4	140.4	0.71
	4	218.3	215.6	1.25
7	1	74.13	74.03	0.14
	2	84.58	84.37	0.25
	3	147.3	146.5	0.55
	4	225.4	223.3	0.94
9	1	76.69	76.63	0.08
	2	85.43	85.30	0.15
	3	151.5	150.4	0.73
	4	231.8	228.8	1.32

*영향(%) = $|A-B| \times 100/B$

표 2에서 처럼 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향은 공학적인 측면에서 무시할 수 있을 정도로 매우 작음을 알 수 있다.

그림 4는 중심각 $\alpha=60^\circ$, 세장비 $S_c=90$ 에 대한 무차원 고유진동수 C_i 와 단면비 n 과의 관계를 그림으로 나타낸 것이다. 이 그림을 보면 n 값이 증가할

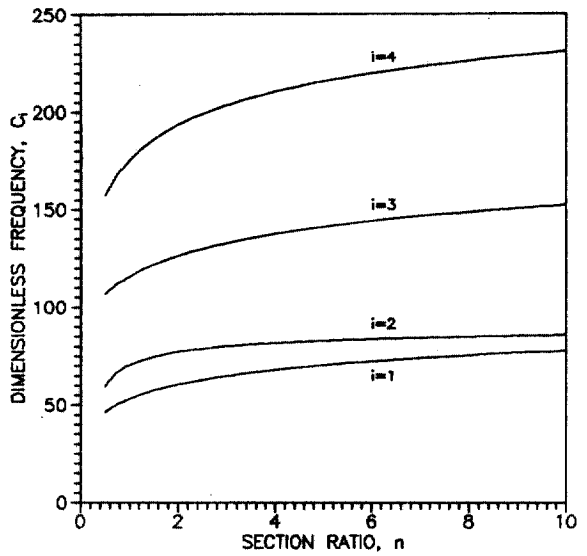


그림 4. 무차원 고유진동수와 단면비와의 관계 ($\alpha=60^\circ, S_c=90$)

수록 C_i 값은 증가하나 그 증가율은 감소하는 것을 알 수 있다. 이것은 아치구조물의 고유진동수를 증가시키기 위하여 단면비를 무조건 증가시킬 필요는 없다는 것을 의미한다.

그림 5는 중심각 $\alpha=60^\circ$, 단면비 $n=3$ 에 대한 무

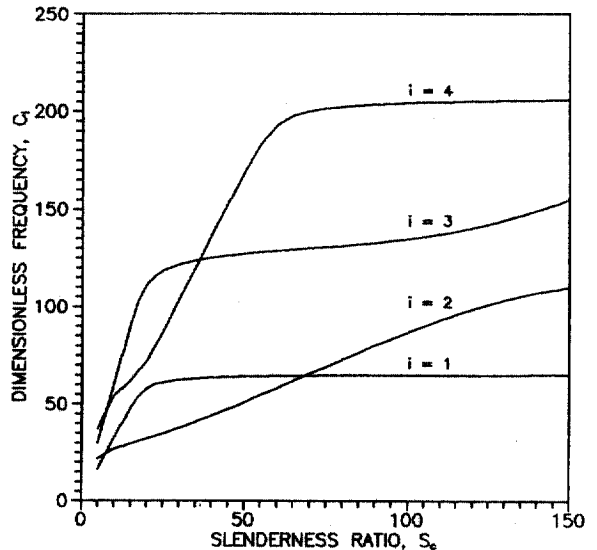


그림 5. 무차원 고유진동수와 세장비와의 관계 ($\alpha=60^\circ, n=3$)

차원 고유진동수 C_i 와 세장비 S_c 와의 관계를 그림으로 나타낸 것이다. C_i 값은 S_c 값이 증가할수록 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 $i=1, 2$ 의 C_i 곡선이 서로 교차하며, $i=3, 4$ 의 C_i 곡선도 서로 교차하는데 이는 동일한 무차원 고유진동수에 대하여 두 개의 진동형이 존재할 수 있다는 것을 의미한다. 예로서 그림 5에서 제1, 제2고유진동수 곡선이 두 번째로 만나는 점은 $S_c=68.63$, $C_{1,2}=64.66$ 이며 이는 $\alpha=60^\circ$, $n=3$, $S_c=68.63$ 의 아치에서는 제1, 제2의 무차원 고유진동수가 64.66으로 동일하며 이에 따른 진동형은 두개가 가능한 것을 의미한다. 이 경우의 두개의 진동형을 그림 6에 나타내었으며, 그림 6에서 볼 수 있듯이 하나의 진동형은 대칭진동형(a)이고 다른 하나는 역대칭진동형(b)임을 알 수 있다.

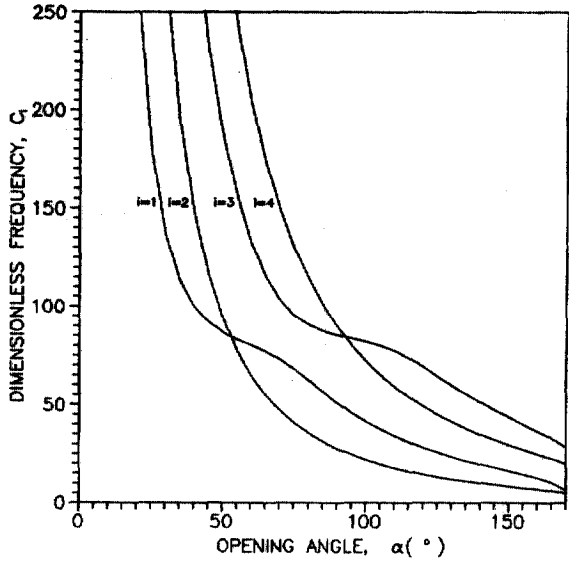
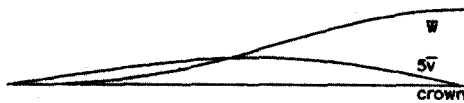


그림 7. 무차원 고유진동수와 중심각과의 관계
($S_c=90$, $n=3$)



(a) symmetric mode



(b) antisymmetric mode

그림 6. 두개의 가능한 진동형

($\alpha=60^\circ$, $n=3$, $S_c=68.63$, $C=64.66$)

그림 7은 세장비 $S_c=90$, 단면비 $n=3$ 에 대한 무차원 고유진동수 C_i 와 중심각 α 와의 관계를 그림으로 나타낸 것이다. 이 그림에서 α 값이 증가할수록 C_i 값은 감소하는 것을 알 수 있으며, 이는 동일한 S_c , n 값에 대해서도 α 값이 증가하면 더 가늘고 긴 아치가 되므로 C_i 값은 감소하게 되는 것을 의미한다. 또한 그림 5에서와 마찬가지로 $i=1, 2$ 와 $i=3, 4$ 의 C_i 곡선이 각각 서로 교차하고 있다.

6. 결 론

이 논문은 1차원 변화단면을 갖는 양단고정 원호아치의 자유진동에 관한 연구로서 이 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

(1) 변단면 원호아치의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 유도하였다.

(2) 위의 미분방정식을 1차원 변화단면을 갖는 양단고정 아치에 적용하고, 이를 수치해석할 수 있는 알고리즘을 개발하였다.

(3) 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향은 공학적인 측면에서 무시할 수 있을 정도로 매우 작았다.

(4) 아치의 진동형은 동일한 고유진동수에 대하여 두 개의 진동형이 존재할 수 있다.

감사의 글

이 논문은 저자가 1988년도에 미국 Duke 대학에서 방문교수로서 연구할 당시에 이루어진 연구논문들 중의 일부이며, 이에 연구비를 지급하여준 원광대학교 및 한국과학재단 당국에 감사드립니다.

또한 여러가지 연구시설의 편의를 제공하여 준 Duke대학의 James F. Wilson교수에게 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. 황학주, "수평 횡하중을 받는 Arch의 변위에 대하여", 대한토목학회지, 제6권 제2호, 1968, pp.57-60.
2. Yuichi Hikami, "Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Aero-dynamic Stability Investigation", *IHI Report*, Vol. 6, 1962, pp.47-52.
3. Joseph A. Wolf Jr., "Natural Frequencies of Circular Arches", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, No. ST9, 1971, pp.2337-2350.
4. Walter J. Austin and Anestis S. Veletos, "Free Vibration of Arches Flexible in Shear", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.99, No. EM14, 1973, pp.735-753.
5. 이병구, 황학주, "양단힌지 포물선아치의 자유진동에 관한 연구", 대한토목학회 논문집, 제4권 제1호, 1984, pp.69-77.
6. 이병구, "양단힌지 정현아치의 자유진동에 관한 연구", 대한토목학회논문집, 제7권 제3호, 1987, pp.101-109.
7. L. H. Royster, "Effect of Linear Taper on the Lowest Natural Extensional Frequency of Elastic Arcs", *Journal of the Applied Mechanics, ASME*, Vol. 33, 1966, pp.2111-2112.
8. Tung-Ming Wang, "Lowest Natural Frequency of Clamped Parabolic Arcs", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 98, No. ST1, pp.407-411.
9. T. Sakiyama, "Free Vibrations of Arches with Variable Cross Section and Non-Symmetrical Axis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, 1985, pp.448-452.
10. P. A. A. Laura and P. L. Verniere de Trassar, "A Note on Vibrations of a Circumferential Arch with Thickness Varying in a Discontinuous Fashion", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 120(1), 1988, pp.95-105.
11. S. F. Borg and J. J. Gennaro, "Advanced Structural Analysis", D. Van Nostrand Company, Inc., 1965, pp. 172-198.
12. Josef Henrych, "The Dynamics of Arches and Frames", Elsevier Scientific Publishing Company, 1981, pp.21-33.
13. Josef Henrych, *ibid*, pp.33-42.
14. Shyr-jen Wung, "Vibration of Hinged Circular Arches", Thesis of Master of Science, Rice University, U.S.A, 1967, pp.12-19.
15. V. Leontovich, "Frames and Arches", McGraw-Hill, 1969, pp.325-328.

(接受 : 1989. 6. 30)