

地下多孔質 媒體속에서의 汚染物質移動 解析을 위한 地下水흐름 模型

Groundwater Flow Model for the Pollutant Transport in Subsurface Porous Media Theory and Modeling

趙 元 喆*
Cho, Won Cheal

Abstract

This paper is on the modeling of two-dimensional groundwater flow, which is the first step of the development of Dynamic System Model for groundwater flow and pollutant transport in subsurface porous media. The particular features of the model are its versatility and flexibility to deal with as many real-world problems as possible. Points as well as distributed sources/sinks are included to represent recharges/pumping and rainfall infiltrations. All sources/sinks can be transient or steady state. Prescribed hydraulic head on the Dirichlet boundaries and fluxes on Neumann or Cauchy boundaries can be time-dependent or constant. Sources/sinks strength over each element and node, hydraulic head at each Dirichlet boundary node and flux at each boundary segment can vary independently of each other. Either completely confined or completely unconfined aquifers, or partially confined and partially unconfined aquifers can be dealt with effectively. Discretization of a compound region with very irregular curved boundaries is made easy by including both quadrilateral and triangular elements in the formulation. Large-field problems can be solved efficiently by including a pointwise iterative solution strategy as an optional alternative to the direct elimination solution method for the matrix equation approximating the partial differential equation of groundwater flow. The model also includes transient flow through confining leaky aquifers lying above and/or below the aquifer of interest. The model is verified against three simple cases to which analytical solutions are available. The groundwater flow model shall be combined with the model of pollutant transport in subsurface porous media. Then the combined model, with the applications of the Eigenvalue technique and the Dynamic system theory, shall be improved to the Dynamic System Model which can simulate the real groundwater flow and the pollutant transport accurately and effectively for the analyses and predictions.

*正會員 · 延世大學校 工科大學, 副教授 土木工學科

本 研究는 有限要素法(FEM)을 利用하여 2次元 地下水 흐름模型을 確立한 것으로 地下水界에서의 汚染物質移動에 관한 綜合的인 動的시스템 模型을 開發하는 研究의 첫 段階이다. 이 흐름模型은 보다 많은 實在問題를 다룰 수 있는 融通性과 柔軟性을 가지도록 하고 있다. 時間의 函數로 나타나는 Sources /Sinks, Dirichlet 形의 境界條件, Neumann 形 혹은 Cauchy 形의 流動 境界條件, 漏水性被壓床(leaky confining beds) 등의 條件을 가진 地下水흐름을 模擬發生할 수 있으며, 또 複雜한 境界條件을 잘 나타내기 위하여 三角形要素와 四角形要素를 混合하여 쓸 수 있는 地下水흐름 FEM 模型을 確立한 것이다.

1. 序 論

帶水層의 地下水에 溶解된 汚染物質의 移動을 研究하기 위해서는 地下水와 壓力水頭分布와 함께 流速分布를 먼저 구해야 한다. 有限差分法과 有限要素法을 利用한 많은 模型들이 帶水層의 地下水 흐름을 模擬發生하기 위해 研究開發되었다. 그러나 이들 중에 時間의 函數로 나타나는 sources/sinks, Dirichlet 形의 境界條件, Neumann 形 혹은 Cauchy 形의 流動境界條件, 漏水性被壓床 등의 條件을 가진 地下水 흐름을 模擬發生할 수 있는 模型은 적은 數에 지나지 않는다. 實際的인 問題로 充填(recharge)과 揚水가 對象地域에 包含되어 있을 수도 있으며, 이들은 또한 時間에 따라 그 量을 달리하기도 하는 것이다. 境界條件으로 주어진 地下水 壓力水頭分布도 극히 드문 예외를 제외하고는 實際로 時間과 位置에 따라 변한다. 뿐만아니라 流動境界條件 역시 時間과 位置에 따라 변한다. 또 漏水性被壓床의 上下에서의 壓力水頭 또한 時間과 位置에 따라 변한다. 어떤 帶水層은 일부는 被壓의 이며 다른 일부는 非被壓의이다. 現在까지 發表된 어떠한 既存의 模型도 被壓帶水層과 非被壓帶水層이 混合되어 있는 帶水層의 흐름을 模擬發生할 수 없다. 實在現象을 模擬發生하기 위해서는 앞에서 論한 狀況들을 包含하여 模擬發生할 수 있는 模型이 되어야 한다. 따라서 본 研究는 이상에서와 같은 複雜하지만 實際的인 問題를 다룰 수 있는 地下水 흐름에 대한 FEM 模型을 確立하고 이를 汚染物質 移動模型과 연결하여 固有值 技法(eigenvalue technique)을 移用한 dynamic system 模型으로 發展시키는 데 目的을 두고 있다.

本 研究로 確立된 三角形要素와 四角形要素를

混用할 수 있는 有限要素法을 利用한 不定流 地下水 흐름 模型은 계속될 研究로 이루어질 汚染物質 移動模型과 함께, 時間에 따라 變하는 sources (recharge) 또는 sinks (pumping), Dirichlet 形의 境界條件, Neumann 形 혹은 Cauchy 形의 流動境界條件, 漏水性被壓床 혹은 被壓帶水層과 非被壓 帶水層을 모두 包含하고 있는 帶水層에서의 地下水 흐름과, 汚染物質의 擴散移動을 模擬發生할 수 있도록 한다.

2. 支配方程式

2.1 地下水흐름 支配方程式

數學的 過程을 통해서 流體의 連續性, 固體(土粒子)의 連續性, 流體運動(Darcy法則), 固體媒質의 鉛直方向 壓密性, 그리고 물의 壓縮性을 考慮하여 다음과 같은 3次元의 地下水흐름 支配方程式을 誘導하였다⁽¹⁾.

$$S_s \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla \cdot (\bar{K} \cdot \nabla \Phi) + q \quad (1)$$

여기서,

$$S_s = \beta' n_e + \alpha' \quad (2)$$

는 specific storage 이다. Ψ 는 壓力水頭, t 는 時間, \bar{K} 는 水理傳導係數 tensor, Φ 는 水理水頭, q 는 內部的 source 이다. α' 와 β' 는 各各 媒質의 壓密係數와 流體(물)의 壓縮性을 나타내는 것으로, 典型的인 값은 各各, 대략 $3.0 \times 10^{-8} \text{cm}^{-1}$ 과 $1.0 \times 10^{-8} \text{cm}^{-1}$ 이다. 또 n_e 는 媒質의 有效空隙率이다.

2.2 境界條件과 初期條件

식 (1)의 問題는 다음과 같은 境界條件과 初期條件에 의해서 完全히 定義되어 진다.

(1) 境界條件

*Dirichlet 形 境界條件: 壓力水頭 Ψ 가 어떤 위

치에서 特定한 값을 가진다.

$$\Psi = \Psi_D \text{ on } B_D(x, y, z, t) = 0 \quad (3)$$

여기서 Ψ_D 는 Dirichlet 形 水頭이고 B_D 는 Ψ_D 가 정의되는 境界區間이다.

*Neumann 形 境界條件: 特定한 流動傾斜가 어떤 區間에서 定義된다.

$$-\vec{n} \cdot (\vec{K} \cdot \nabla \Psi) = q_N \text{ on } B_N(x, y, z, t) = 0 \quad (4)$$

여기서 q_N 은 Neumann flux이고, B_N 은 q_N 이 定義되는 境界區分이다.

*Cauchy 形 境界條件: 어떤 境界條件에서 特定 流動量이 定義되어, 全體流量은

$$-\vec{n} \cdot (\vec{K} \cdot \nabla \Phi) = q_c \text{ on } B_C(x, y, z, t) = 0 \quad (5)$$

으로 구할 수 있다. 여기서 q_c 는 Cauchy flux이고, B_C 는 境界 B의 一部로 q_c 가 定義되는 境界區間이다.

(2) 初期條件

對象空間에서 어떤 初期時間에 壓力水頭(Ψ)의 分布로 求解진다. 즉,

$$\Psi = \Psi_i \text{ in } R \quad (6)$$

여기서, R은 對象空間을 나타낸다. 이 條件은 測定에 의해서 求解되거나 아니면 식 (1)을 定流狀態로 變換하여 模擬發生함으로서 구할 수 있다.

만약 境界 $B = B_D + B_N + B_C$ 가 時間에 대해 獨立의 이라면 앞에서 整理한 境界條件은 상당히 簡便해진다. 實際로 많은 問題들에서 보면 境界의 一部는 時間에 따라 움직인다. 따라서 支配方程式은 다음과 같은 運動條件을 필요로 한다.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{U}_F \cdot \nabla F = I \quad (7)$$

여기서 \vec{U}_F 는 移動하는 表面 $F(x, y, z, t) = 0$ 의 移動速度이며 I는 移動表面 F를 通過하는 純流動量(net flux)이다.

식 (1)~식 (7)은 飽和帶水層에서의 一般의인 3次元 흐름 問題를 나타내는 식이다. 그런데 一般의인 形態의 위의 式들을 풀 수 있는 Computer模型이 公開된 것이 없다. 지금까지 發表된 3次元 또는 準 3次元의 飽和흐름 模型들^(2, 3, 4)의 對象은 주로 被壓帶水層에 局限되고 있다. 이는 식 (7)로 表示되는 移動 境界條件을 包含하고 있지 않기 때문이다.

2.3 鉛直方向으로 積分한 흐름 支配方程式

一般의으로 多孔質媒體속의 흐름은 3次元의 transient 흐름이며 앞의 식 (1)~식 (7)로 表現된다. 그

런데 大部分의 帶水層의 幾何學의 特性을 살펴보면 水平面에 비해 鉛直方向 두께가 相對的으로 매우 얇다. 따라서 帶水層에서의 흐름을 水平흐름으로 假定하여 鉛直方向 흐름 成分을 無視할 수도 있다. 이러한 假定때문에 發生하는 誤差는 大部分의 實際問題에서 無視할 수 있을 程度이다.

水平흐름 假定은 Dupuit의 假定에 基礎하고 있으며, 이는 有線의 屈折(refraction of streamlines) 法則^(5, 6)으로부터 漏水性帶水層에서도 適用될 수 있다. 따라서 鉛直方向으로 積分한 方程式들과 變數들은 帶水層에서의 水平흐름을 適切히 나타낼 수 있음을 보이고 있다.

水平面上에 x-y 軸을 두고 鉛直方向으로 z 軸을 두어, 支配方程式을 鉛直方向으로 積分함으로써 z 軸에 대한 從屬性을 除去할 수 있다. 식 (1)로부터 시작하면,

$$\int_{z_0}^{h_s} [S_s \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{K} \cdot \nabla \Phi)] dz = \int_{z_0}^{h_s} q dz \quad (8)$$

여기서, $z = z_0$ 와 $z = h_s$ 는 各各 帶水層의 上下境界이다. z_0 와 h_s 는 모두 x와 y의 函數이다. 被壓帶水層에서는 z_0 와 h_s 는 一定하며 時間에 對해서는 獨立의이다. 반면 非被壓帶水層에서는 上部境界(h_s)는 浸透, 揚水 혹은 充填에 따라 變한다. 즉, h_s 는 空間(x,y)과 時間의 函數이다.

Leibnitz 法則과 Dupuit의 假定을 利用해서 식 (8)을 被壓 및 非被壓 帶水層에 대하여 積分을 各各 施行하면, 즉 被壓水層에 대해서는 h_s 가 時間에 對해서 獨立의이므로 다음 식을 얻는다.

$$b S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla_H \cdot (b \vec{K} \cdot \nabla_H h) - Q_U - Q_L + W \quad (9)$$

여기서, $b = h_s - z_0$ 는 帶水層의 두께이다. ∇_H 는 水平面 座標 x와 y에 대한 Del 演算記號이고, Q_U 는 帶水層 上部의 半不透水性 被壓床을 通過하는 물의 流動量이고, Q_L 은 下部의 半不透水性 被壓床을 通過하는 물의 流動量이다. W는 鉛直으로 積分한 內部的 sources/sinks, 즉 充填과 排水(혹은 揚水)를 나타낸다. h는 水理水頭로

$$h = \tilde{\Phi}(x, y, t) = \frac{1}{b} \int_{z_0}^{h_s} \Phi(x, y, z, t) dz \quad (10)$$

이다. 식(8)에서 W, Q_U , 그리고 Q_L 은 다음과 같다.

$$W = \int_{z_0}^{h_s} q dz \quad (11)$$

$$Q_U = \bar{k} \cdot (\bar{K} \cdot \nabla \Phi) |_{z=h} \quad (12)$$

$$Q_L = -\bar{k} \cdot (\bar{K} \cdot \nabla \Phi) |_{z=h_0} \quad (13)$$

여기서, \bar{k} 는鉛直方向의單位 vector이다.

本 研究에서의 Q_U 와 Q_L 은 다음과 같은 식으로 구해지는 近似값을 가진다.

$$Q_U = K_U(h-h_U) \quad (14)$$

그리고

$$Q_L = K_L(h-h_L) \quad (15)$$

여기서 K_U 와 K_L 은 上下被壓床의 漏水係數(leakage coefficients)이다. h_U 는 上部被壓床 上部의 水理水頭이고, h_L 은 下部被壓床 下部의 水理水頭이다. 實際로 K_U 와 K_L 은 上下被壓床의 水理傳導率(hydraulic conductivity)을 各被壓床의 두께로 나눈 값과 近似的으로 같다.

非被壓帶水層에서는 h_s 가 時間의 函數이다. 따라서 運動條件式, 식(7)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\frac{S_s \partial h_s}{\partial t} = (\bar{K} \cdot \nabla \Phi) |_{z=h_s} \cdot \nabla h_s - (\bar{K} \cdot \nabla \Phi) |_{z=h_0} \cdot k + 1 \quad (16)$$

여기서, S_s 는 specific yield이며 近似的으로 有效空腔率, n_e 와 같다. 식(8)을 積分하고 運動條件式 식(16)을 使用하면 다음 식을 얻는다.

$$(bS_s + S_s) \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla_H \cdot (b\bar{K} \cdot \nabla_H h) - Q_L + W + I \quad (17)$$

식(17)을 誘導하는 過程에서 $h \sim h_s$ 의 假定이 包含되어 있다. 식(9)와 식(17)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla_H \cdot (\bar{T}_H \cdot \nabla_H h) - Q_U - Q_L + S_w + \sum_{p=1}^{N_p} \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) S_p \quad (18)$$

여기서 N_p 는 point sources/sinks의 갯수이고, S_p 는 point sources/sinks의 位置(x_p, y_p)에서의 크기(strength)이다. δ 는 Dirac delta 函數이다. 또

$$\bar{T} = b\bar{K} \text{ and } S_w = W + I \quad (19a)$$

는 transmissivity tensor와 分布되어 있는 sources/sinks의 크기를 각각 나타낸다. 또

$$S = bS_s + S_s \quad (19b)$$

는 一般化된 貯留係數(storage coefficient)이다.

被壓帶水層에서 T 는 h 에 獨立인 반면, 非被壓帶水層에서 T 는 h 의 函數로 非線形關係式을 이

룬다. 식(18)에서의 Q_U 와 S 는 非被壓帶水層에서는 各各 0와 식(19b)로 구해지며, 被壓帶水層에서는 $S_w = W$ 와 $S = bS_s$ 로 구해진다.

2.4 鉛直方向으로 積分한 흐름方程式에 대한 初期條件과 境界條件

식(18)에 대한 初期條件과 境界條件은 식(6)과 식(3)~식(5)를 各各 鉛直方向으로 積分함으로써 구해진다. 즉 식(6)의 兩邊에 重力加速度에 의한 水頭 z 를 더한후 鉛直方向으로 積分하면

$$h = h_1(x, y, 0) \text{ in } R \quad (20)$$

을 얻는다. 여기서 h_1 는 初期條件으로, 觀測값으로 定義되던지 아니면 식(18)을 定流狀態에 대해서 解를 구하면 얻어진다. 같은 方法으로 식(3)을 積分하면 다음과 같은 Dirichlet形 境界條件을 구할 수 있다.

$$h = h_D(x, y, t) \text{ on } B_D(x, y) = 0 \quad (21)$$

여기서 h_D 는 주어진 Dirichlet形 水頭이다. z 에 대한 從屬性을 除去했기 때문에 식(4)와 식(5)의 積分은 다음 식과 같은 同一한 條件을 나타내게 된다.

$$-\bar{n} \cdot (\bar{T} \cdot \nabla_H h) = q_F(x, y, z) \text{ on } B_F(x, y) = 0 \quad (22)$$

여기서 $q_F(x, y, t)$ 는 q_N 또는 q_C 를 鉛直方向으로 積分함으로써 구해지는 流動量이다. 또 B_F 는 B_N 와 B_C 의 合이다. $q_F(x, y, t)$ 는 對象區域에서 바깥으로 向할 때는 陽(+)의 값을, 안으로 向할 때는 負(-)의 값을 갖는다.

식(18)과 식(20) ~식(22)는 帶水層 흐름의 物理的 問題를 나타내는 一般的인 數學的인 표현들로, 이러한 綜合的인 System 方程式에 대한 解析的 解는 存在하지 않는다. 따라서 問題解決을 위해서는 數值解析法을 利用하여 近似解를 구해야 한다.

本 研究에서는 FDM 보다 FEM을 使用하기로 한다. 왜냐하면 FEM이 가지는 長點, 즉 複雜한 地形要素와 複雜한 帶水層 構成을 處理할 수 있는 能力과 境界條件을 處理하는 簡便性 때문이다.

3. 有限要素法에 의한 近似解法

식(18)~식(22)의 近似解를 구하기위해 FEM을 使用하기로 한다. 本 論文에서는 FEM의 理論的인 基礎는 省略하고 實際 計算 過程만을 要約하기로 한다.

地下水 흐름에 대한 FEM의 適用에는 一般的으

로 다음과 같은 9가지의 과정을 포함한다.

1. 對象地域을 要素로 分割하여 각 格點마다, 그리고 各 要素마다 番號를 付與한다(그림 1 參照).
2. 基底函數 (Base Functions or Interpolation Functions)를 定義한다.
3. 基底函數를 線形補間 (Linear Interpolation)하여 그 解를 구한다.
4. 加重函數를 定義한다.
5. 殘差를 規定한다.
6. 殘差를 0으로 놓는다.
7. 係數行列을 誘導한다.
8. 係數行列에다 境界條件을 付與한다.
9. 行列方程式의 解를 구한다.

基底函數 $N(x,y)$ 는 格點 j 에서는 1.0의 값을 가지며 다른 格點에서는 0.0의 값을 갖는다 (그림 2 參照). FEM에서는 要素別 係數行列을 먼저 구하고 그것들로 全體行列(global matrix)을 構成한다. 本 研究에서 使用하는 線形四邊形 要素에서는 格點 (4개)마다 하나씩의 基底函數를 가지게 되며, 線形三角形 要素에서는 各 格點에서 各各 하나씩 모두 3개의 基底函數를 가진다. 그림 2에서의 記號를

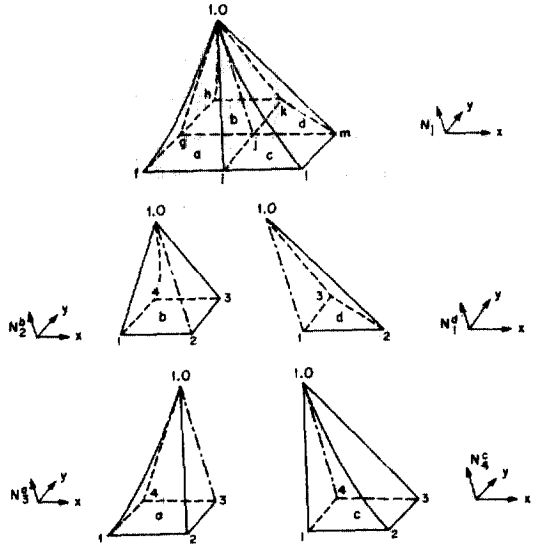


그림 2 全體基底函數와 要素基底函數 사이의 關係

利用하여 다음과 같은 關係式을 定義할 수 있다. 즉 要素別 基底函數 (element basis function)를 그에 對應하는 全體 基底函數 (global basis function)와 같게 놓음으로써 要素行列을 全體行列로 轉換할 수 있다.

$$\begin{aligned} N_3^a &= N_j \text{ over element a, } N_2^b = N_j \text{ over element b} \\ N_4^c &= N_j \text{ over element c, } N_1^d = N_j \text{ over element d} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 N_3^a, N_2^b, N_4^c 그리고 N_1^d 는 各各, 要素 a의 格點 3에 대한 基底函數, 要素 b의 格點 2에 대한 基底函數, 要素 c의 格點 4에 대한 基底函數, 그리고 要素 d의 格點 1에 대한 基底函數이다.

線形四邊形要素 (그림 3)에 대해서는 다음과 같은 4가지의 基底函數를 採擇한다.

$$N_1^e = (1-\xi)(1-\eta)/4 \quad N_2^e = (1+\xi)(1-\eta)/4$$

$$N_3^e = (1+\xi)(1+\eta)/4, \quad N_4^e = (1-\xi)(1+\eta)/4$$

(24)

여기서 $N_j^e (j=1,2,3,4)$ 는 格點 j 에 대한 局地 (local) 座標 (ξ, η) 로 나타낸 基底函數이다. 局地座標로부터 全體座標 (x, y) 로의 轉換은 다음과 같이

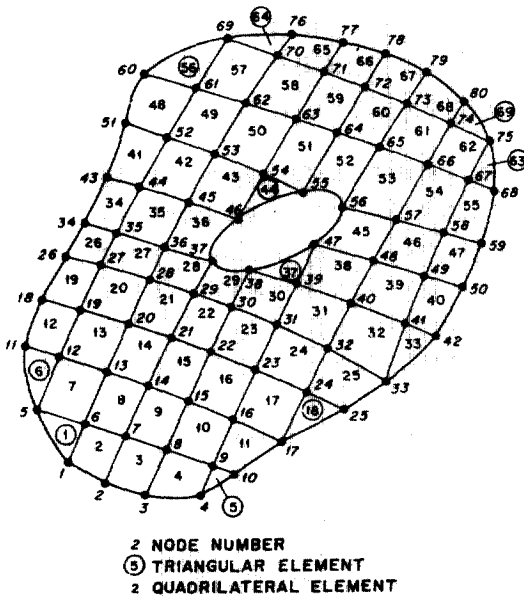


그림 1 對象地域의 要素分割 (80個 格點, 69個 要素 (59個의 四邊形要素와 10個의 三角形要素))

할 수 있다.

$$x = \sum_{j=1}^3 x_j N_j^e(\xi, \eta) \text{ and } y = \sum_{j=1}^3 y_j N_j^e(\xi, \eta) \quad (25)$$

그림 3은 全體座標과 局地座標系에서의 典型的인 要素들을 보이고 있으며, 특히 局地座標系에서의 要素는 全體座標系에서의 四邊形 要素의 모양에 관계없이 正四角形이다. 이처럼 基底函數가 座標變換에 使用되기 때문에 이러한 要素數式化를 Isoparametric 이라 한다.

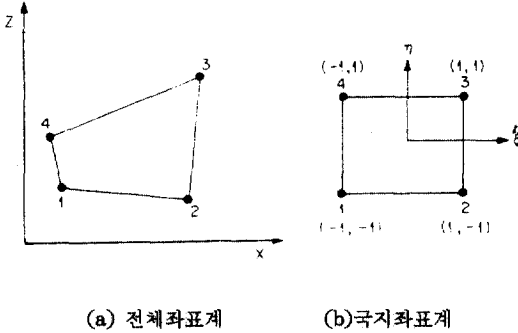


그림 3 四邊形要素에 對한 全體座標과 局地座標系

線形 三角形要素 (그림 4a)에 대해서는 다음과 같은 3개의 基底函數를 使用한다.

$$N_1^e = L_1, N_2^e = L_2, \text{ and } N_3^e = L_3 \quad (26)$$

여기서, N_j^e ($j=1,2,3$)은 局地座標系 (L_1, L_2, L_3) (그림 4b)로 나타낸 格點 j 의 基底函數이다. 이 要素에 對한 局地座標系 (L_1, L_2, L_3)와 全體座標系 (x, y) 사이의 關係는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= (a_1 + b_1x + c_1y)/(2A) \\ L_2 &= (a_2 + b_2x + c_2y)/(2A) \\ L_3 &= (a_3 + b_3x + c_3y)/(2A) \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \right\} \quad (27b)$$

그리고 A 는 三角形 要素의 面積이다. 위의 식 (27a)와 식 (27b)로부터

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0 \quad (28)$$

임을 알 수 있다. 또 座標 L_1, L_2 그리고 L_3 는 面積 A_1, A_2 그리고 A_3 의 全體要素面積 A 에 對한 比率로 各各 나타낸다(그림 4b). 이러한 關係로 座標

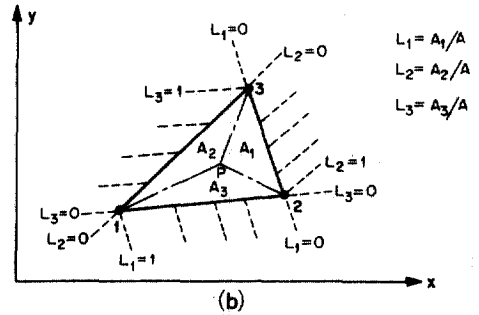
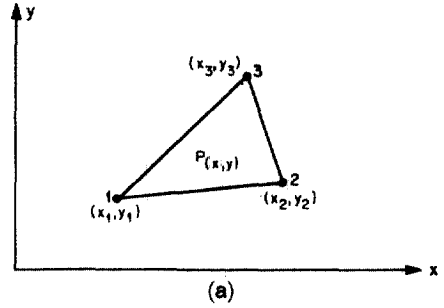


그림 4 3點 線形三角形 要素의 (a) 全體座標과 (b) 面積座標

L_i 를 面積座標 (Area Coordinates)라고도 한다.

FEM에서 水理水頭 h 의 近似값은

$$h \approx \tilde{h} = \sum_{j=1}^N h_j(t) N_j(x, y) \quad (29)$$

으로 求解된다. 여기서 N 은 全體 格點數이고, N_j 와 h_j 는 各各, 格點 j 에서의 基底函數와 h 의 크기이다. 여기서 우리는 FEM과 FDM의 根本的인 차이를 發見한다. 즉 FEM은 식 (29)와 같은 어떤 函數의 近似解를 直接的으로 求解하는 반면 FDM은 그 函數의 微分값 (derivatives)의 近似值에 基礎하는 것이다.

加重函數로는 基底函數로 構成되는 Galerkin의 加重函數를 使用하기로 한다. 즉,

$$W_i(x, y) = N_i(x, y), \quad i=1, 2, 3, \dots, N \quad (30)$$

여기서 W_i 는 格點 i 에 對한 加重函數이다.

近似값 \tilde{h} 는 식 (18)의 近似값이므로 그 식을 만족하지 않는다. 즉 다음과 같은 殘差(R_i)를 發生하게 된다.

$$R_r = S \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} - \nabla_H \cdot (\bar{T} \cdot \nabla_H \tilde{h}) + \tilde{Q}_U + \tilde{Q}_L - S_W$$

$$- \sum_{p=1}^{N_p} S_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) \quad (31)$$

여기서,

$$\tilde{Q}_U = K_U(\tilde{h} - h_U) \text{ and } \tilde{Q}_L = K_L(\tilde{h} - h_L) \quad (32)$$

FEM의 원리에 의하면 식(31)로 구해지는 殘差를 加重函數로 加重하면 0으로 만들 수 있으며 이러한 條件을 滿足하는 h_i 의 係數를 식(29)로부터 구할 수 있다.

즉

$$\int_R W_i R_r dR = \int_R W_i \left\{ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} S - \nabla_H \cdot (\bar{T} \cdot \nabla_H \tilde{h}) + \tilde{Q}_U + \tilde{Q}_L - S_W \right\} dR$$

$$- \int_R \sum_{p=1}^{N_p} S_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) dR = 0$$

$$\text{for } i=1, 2, 3, \dots, N \quad (33)$$

다음 단계는 식(33)에 根據하여 行列 方程式을 구하는 것이다. 즉 식(29)와 식(30)을 식(33)에 代入한 후 積分하여 整理하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$[A] \left\{ \frac{dh}{dt} \right\} + [B] \{h\} = \{D\} + \{Q\} \quad (34)$$

여기서 $\{h\}$ 는 column vector로 格點에서의 h 값을 나타낸다. 行列 $[A]$ 는 다음 식과 같다.

$$A_{ij} = \int_R N_i S_j dR = \sum_{e \in M_e} \int_{R_e} N_i S_j dR$$

$$= \sum_{e \in M_e} \int_{R_e} N_i^e S_j^e dR \quad (35)$$

여기서 R_e 는 요소 e 의 範圍을 나타내며, M_e 는 local side α - β 와 global side i - j 가 接치는 要素들의 集合을 나타낸다. N_i^e 와 N_j^e 는 要素 e 의 α 번째와 β 번째의 局地基底函數를 뜻한다. 行列 $[B]$ 와 column vector $\{D\}$ 와 $\{Q\}$ 는 아래와 같다.

$$B_{ij} = \int_R [(\nabla_H N_i) \cdot \bar{T} \cdot (\nabla_H N_j) + N_i (K_U + K_L) N_j] dR$$

$$= \sum_{e \in M_e} \int_{R_e} [(\nabla_H N_i) \cdot \bar{T} \cdot (\nabla_H N_j) + N_i (K_U + K_L) N_j] dR$$

$$= \sum_{e \in M_e} \int_{R_e} [(\nabla_H N_i^e) \cdot \bar{T} \cdot (\nabla_H N_j^e) + N_i^e (K_U + K_L) N_j^e] dR \quad (36)$$

$$D_i = \int_R N_i [K_U h_U + K_L h_L + S_W + \sum_{p=1}^{N_p} S_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p)] dR$$

$$= \sum_{e \in M_e} \int_{R_e} N_i [K_U h_U + K_L h_L + S_W] dR$$

$$+ \sum_{p=1}^{N_p} S_p N_i(x_p, y_p)$$

$$= \sum_{e \in M_e} \int_{R_e} N_i^e [K_U h_U + K_L h_L + S_W] dR + S_i \quad (37)$$

그리고

$$Q_i = \int_B N_i \bar{n} \cdot (\bar{T} \cdot \nabla_H h) dB$$

$$= \sum_{e \in N_e} \int_{B_e} N_i \bar{n} \cdot (\bar{T} \cdot \nabla_H h) dB$$

$$= \sum_{e \in N_e} \int_{B_e} N_i^e \bar{n} \cdot (\bar{T} \cdot \nabla_H h) dB \quad (38)$$

여기서 N_e 는 모든 境界區間을 뜻한다. N_e 는 全體 格點 i 와 接치는 局地 格點 α 를 가지는 境界區間들의 集合이다. 식(37)에서의 S_i 는 모든 S_p 가 格點 위에 놓인다는 假定에 의해서 구할 수 있다.

위의 식(35)~식(38)에서 마지막 等號(=)의 右邊의 積分項들은 要素行列들이다. 이들 要素行列들을 組合(assembly)하는 것이 Σ 로 表示되어 있다.

行列方程式 식(34)은 singular이다. 따라서 境界條件(식(21)과 식(22))을 반드시 適用해야만 問題의 解를 구할 수 있다(本論文에서는 境界條件의 適用方法에 대해서는 省略함).

식(34)에다 모든 境界條件들을 適用하여 整理하면

$$[M] \left\{ \frac{dh}{dt} \right\} + [S] \{h\} = \{Y\} \quad (39)$$

를 얻는다. 여기서 $[M]$, $[S]$ 그리고 $\{Y\}$ 는 각각 $[A]$, $[B]$ 그리고 $\{D\} + \{Q\}$ 에다 境界條件들을 適用하여 修正한 것 들이다.

마지막 過程으로는 식(39)에 期條件(식(20))을 適用하여 그 解를 구하는 것이다.

4. 時間積分

時間積分에서는 FDM이 FEM보다 有利하다. 따라서 時間微分項의 近似값은 FDM을 移用하기로 한다. FDM의 각 解法을 利用하여 식(39)를 整理하면 다음과 같다.

4.1 Using the Central or Crank-Nicolson Scheme

$$[M] \{ \{h\}_{t+\Delta t} - \{h\}_t \} / \Delta t + 0.5[S] \{ \{h\}_{t+\Delta t} + \{h\}_t \} = \{Y\} \quad (40)$$

여기서 $[M]$, $[S]$ 그리고 $\{Y\}$ 는 $(t + \Delta t/2)$ 의 時

間에서 구해진다.

4.2 Using the Backward Scheme

$$[M]\{h\}_{t+\Delta t} - \{h\}_t \Delta t + [S]\{h\}_{t+\Delta t} = \{Y\} \quad (41)$$

여기서 [M], [S] 그리고 {Y}는 (t+Δt)의 時間에서 구해진다.

4.3 Using the Mid-Difference Scheme

이 방법은 未知變數의 값이 時間間格(Δt) 동안에 時間에 따라 線形的으로 변한다는 假定에 基礎한다.

$$\left(\frac{2}{\Delta t}[M] + [S]\right)\{h\}_{t+\Delta t/2} - \frac{2}{\Delta t}[M]\{h\}_t = \{Y\} \quad (42a)$$

그리고

$$\{h\}_{t+\Delta t} = 2\{h\}_{t+\Delta t/2} - \{h\}_t \quad (42b)$$

여기서 [M], [S] 그리고 {Y}는 (t+Δt/2) 時間에서 구해진다.

이외에도 3가지의 다른 解法을 選擇할 수 있으나 이들은 식(35)의 行列[A]를 lumping 함으로써 얻어진다(만약 FDM을 空間座標(x, y)의 離散化에 使用하면 行列[A]는 單位行列이 된다. 이러한 性質을 利用하는 lumping 技法에 대해서는 省略함).

本 研究에서는 以上에서 檢討한 바와 같이 時間積分方法과 mass 行列의 處理方法에 따라 여섯가지의 解法을 選擇的으로 使用할 수 있도록 하였다(表 1參照).

表 1에서의 어떠한 解法도 初期條件과 境界條件을 適用한 후에는 다음과 같은 식으로 구해진다.

$$[C]\{h\} = \{R\} \quad (43)$$

여기서 [C]는 係數行列이고 {R}은 既知의 load vector이다. 行列方程式 식(43)은 보통 直接消去法으로 풀 수 있다. 그러나 大單位の 現場問題의 境遇는 係數行列의 band width가 대단히 크므로 直接消去法은 非能率的일 뿐만 아니라 大量의 com-

表 1. 本 研究의 模型에서 使用할 수 있는 數值解法

	Time Marching			Mass Matrix	
	Central	Backward	Mid-Difference	No Lumping	Lumping
1	X			X	
2		X		X	
3	X				X
4		X			X
5			X	X	
6			X		X

puter storage를 必要로 하게 된다. 이러한 점을 克服하기 위해서 本 研究에서는 點逐次(pointwise iterative) 方法들을 使用하기로 한다. 특히 帶水層이 異方性(anisotropic)인 境遇에 FEM은 ill-conditioned matrix를 誘發하게 되므로 本 研究에서는 well-conditioned matrix를 構成하는 FE scheme을 使用함과 同時에 一般的으로 가장 많이 使用하고 있는 Jacobian simultaneous displacement, Gauss-Seidal successive displacement 그리고 successive over-relaxation, 이상 세가지의 點逐次 方法들을 使用할 수 있도록 하였다.

5. 模形의 檢定 및 適用例

5.1 Mass Balance의 計算에 의한 檢定

地下水흐름의 數值模型에서 가장 重要한 要素중의 하나는 全體 對象地域에서의 mass balance를 檢定하는 일이다. mass balance 檢定에서 發見되는 誤差의 크기는 數值計算의 精密度和 收斂性에 대한 가장 確實한 指標가 된다. 즉 正確한 數值解를 구하기 위해서는 全體 境界區間을 通過하는 net influx가 반드시 境界內部에서의 全體體積 增加量과 같아야 한다. 그러나 實際의 計算에서는 반드시 그렇지 않다. 따라서 어느 程度의 許用誤差를 주어야 한다(mass balance 計算過程은 省略함).

5.2 計算(檢定 및 適用) 例

本 研究에서 確立된 模型 GFLOW를 檢定하고 그 使用 可能性을 보이기 위하여 다섯가지의 計算例를 구하였다. 그 중 세가지는 模型 GFLOW의 計算精密度を 檢定하기 위한 것으로, (1) source/sink와 漏水가 없는 被壓帶水層에서 時間에 따라 變하는 흐름, (2) source/sink가 있으나 漏水가 없는 非被壓帶水層에서의 定常흐름, 그리고 (3) source/sink와 漏水가 있는 非被壓帶水層에서의 定常흐름에 대한 것으로, 이들 檢定例는 각기 그 解析의 解가 구해질 수 있는 境遇의 것들이다. 나머지 들은 非均質의 異方性 媒質을 가진 被壓 및 非被壓帶水層에서 時間에 따라 變하는 Dirichlet形 및 Neumann形 境界條件과, 역시 時間의 函數로 나타나는 source/sink를 가진 實際問題들에 대한 模型 GFLOW의 使用 可能性을 보이고자 한 것들이다.

本 論文에서는 紙面關係上 檢定例와 適用例를 收錄하지 않았다. 그러나 별도로 發表할 論文에서

模型 GFLOW 의 檢定例와 適用例를 보일 것이다.

6. 結 論

본 研究에서는 帶水層 內에서의 汚染物質의 移動을 分析豫測하기 위한 線形動的 模型 (Linear Dynamic System) 을 確立하기 위해, 實際 地下水 흐름舉動을 나타내는 흐름支配 方程式의 解를 求할 수 있는 FEM 模型을 確立하였다. 本 研究를 통해서 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

1. 本 研究에서 確立한 地下水 흐름方程式에 대한 FEM 模型은 흐름自體를 매우 滿足스럽게 模擬發生할 수 있으며, 특히 四邊形 要素와 三角形 要素를 複合하여 使用함으로써 水文地質學的인 複雜性을 克服할 수 있다.

2. 地下水 흐름 方程式의 係數行列은 對稱인 반면, 汚染物質 移動方程式의 係數行列은 移流項 때문에 非對稱이다. 그런데 對稱行列의 固有值와 固有벡터는 모두가 實數인 반면 非對稱 行列의 그것들은 複素값으로 구해진다. 이러한 一般的인 實數行列을 計算하기 위해서 EISPACK 의 여러 副프로그램을 利用하여 滿足할 만한 計算結果를 구할 수 있다.

感謝의 글

本 論文은 1986 年~1988 年 韓國科學財團의 研究費 支援으로 遂行된 研究結果의 一部이다. 韓國科學財團의 研究費 支援에 깊은 感謝를 드린다.

參 考 文 獻

1. 趙元喆, 地下 多孔質 媒體속에서의 地下水흐름과 汚染物質移動에 관한 컴퓨터 模型開發, 韓國科學財團 研究報告書, 1988, 4, pp. 7-13.
2. Gupta, S. K., C. R. Cole, and F. W. Bond, *Methodology for Release Consequence Analysis-Part III, Finite Element Three-Dimensional Groundwater (FE3DGW) Flow Model*, PNL-2939, Pacific Northwest Laboratory, Richland, Washington, 1979.
3. Trescott, P. C., *Documentation of Finite-Difference Model for Simulation of Three-Dimensional Groundwater Flow*, U. S. G. S. Open File Report 75-348, U. S. G. S., Reston, Virginia, 1975.
4. Trescott, P. C., G. F. Pinder, and S. P. Larson, *Finite-Difference Model for Aquifer Simulation in Two Dimensions with Results of Numerical Experiments*, Book 7, Chapter C1, *Technique of Water Resources Investigations of the United States Geological Survey*, U. S. G. S., Reston, Virginia, 1976.
5. Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, New York, 1972.
6. Bear, J., *Hydraulics of Groundwater*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1979.
7. Bellman, R. E., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw Hill, 1960.
8. Bredehoeft, J. D., and G. F. Pinder, "Digital Analysis of Areal Flow in Multi-Aquifer Groundwater Systems: A Quasi Three-Dimensional Model", *Water Resources Research*, Vol. 6, 1970, pp 883-888
9. Chen, C. T., *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1970.
10. Cho, W. C., *Linear Dynamic System Approach to Ground-water Solute Transport Equation*, Ph.D Thesis, Drexel University, Oct., 1983.
11. Cho, W. C., et al, "An Eigenvalue Technique for Solute Transport", *J. of ASCE*, Vol. 110, No. 10, Oct., 1984, pp 1302-1314.
12. Cho, W. C., et al, "An Eigenvalue Solution Continuous in Time to the Spatially Discretized Solute Transport Equation in Steady Groundwater Flow", *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 11, Nov., 1984, pp 1725-1732.
13. Cooley, R. L., *Finite Element Solutions for the Equations of Ground Water Flow*, Tech. Report Series H-W, Publication No. 18, Center for Water Resources Research, Desert Research Institute, Univ. of Nevada, 1974.
14. Duguid, J. O., and M. Reeves, *Material Transport Through Porous Media: A Finite-Element Galerkin Model*, ORNL-4928, Oak Ridge National Lab, Oak Ridge, Tennessee, 1976.
15. Narashimhan, T. N., *A Unified Numerical Model for Saturated-Unsaturated Groundwater Flow*, Ph. D. Dissertation, Univ. of Calif., Berkeley, 1975.
16. Neuman, S. P., et al, *Finite Element Simulation of Flow in Saturated-Unsaturated Soils Considering Water Uptake by Plants*, Third Annual Report(Part 1) of "Development Methods, Tools and Solutions for Unsaturated Flow", Project No. ALO-SWC-77, Grant No. FG-IS-287, USDA, 1974.
17. Pinder, G. F., *Galerkin Finite Element Models for Aquifer Simulation*, Water Resources Program, Princeton University, Princeton, NJ, 1974.
18. Trescott, P. C., G. F. Pinder, and S. P. Larson, *Finite-Difference Model for Aquifer Simulation in Two Dimensions with Results of Numerical Experiments*,

Book 7, Chapter C1, Technique of Water Resources Investigations of the United States Geological Survey. U. S. G. S., Reston, Virginia, 1976.

19. Wilson, J. L. and L. W. Gelhar, *Dispersive Mixing in Partially Saturated Porous Medium*, Hydro. Lab., Report 191, Mass. Inst. of Tech., Cambridge, Mass., 1974.
20. Yeh, G. T. and R. H. Strand, *FECWATER: User's Manual of a Finite Element Code for Simulating Water Flow Through Saturated-Unsaturated Porous Media*, ORNL/TM-7316, Oak Ridge National Lab, Oak Ridge, Tennessee, 1982.
21. Yeh, G. T. and D. S. Ward, *FEMWATER: A Finite Element Model of Water Flow through Saturated-Unsaturated Porous Media*, ORNL-5567, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, 1980.

附錄：컴퓨터 프로그램 GFLOW

支配方程式, 식 (18) 과 初期條件 식 (20) 그리고 境界條件 식(21)과 식(22)를 數值解法으로 풀기위한 source program "GFLOW" 의 main program 과 18 개의 subroutine 으로 構成하였다. 그림 A 는 프로그램의 構造와 관련 흐름도를 보이고 있다. 각 subroutine 의 機能에 대한 說明은 本論文에서는 省略한다.

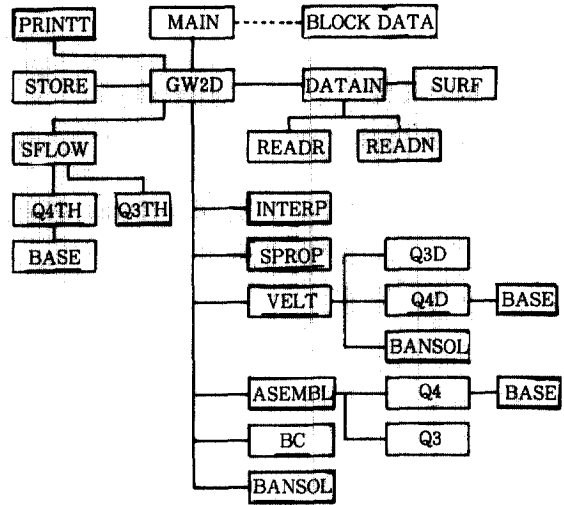


그림 A. 프로그램 GFLOW 의 構造와 計算흐름도

(接受：1989. 6. 12)