

## 動的에너지 放出率의 數值解析을 위한 體積積分式

Volume Integral Expressions for Numerical Computation of  
the Dynamic Energy Release Rate高 鉉 武  
Koh, Hyun Moo

## Abstract

Continuum formulations for the expressions of dynamic energy release rates and computational methods for dynamic stress intensity factors are developed for the analysis of dynamic fracture problems subjected to stress wave loading. Explicit volume integral expressions for instantaneous dynamic energy release rates are derived by modeling virtual crack extensions with the dynamic Eulerian-Lagrangian kinematic description. In the finite element applications a finite region around a crack-tip is modeled by using quarter-point singular isoparametric elements, and the volume integrals are evaluated for each crack-tip element during virtual crack extensions while the singularity is maintained. It is shown that the use of the present method is more reliable and accurate for the dynamic fracture analysis than that of other path-independent integral methods when the effects of stress waves are significant.

## 요 지

응력파의 영향을 받는 균열의 동적응력확대계수를 구하기 위해 동적에너지방출율에 관한 명시적인 표현식을 유도하고, 이를 이용하여 유한요소법에 적합한 수치계산방법을 제시한다. 새로운 운동학적 기술방법과 균열의 가상증분을 이용하여 균열선단의 유한한 영역에서 정의되는 체적적분식을 연속체 역학적인 정식화를 통하여 구하고, 이의 수치적분은 유한영역의 모델링에 사용된 등매개변수특이요소 내에서 특이성을 만족하는 적합조건하에서 수행된다. 본 방법은 경로적분식을 이용하는 기존 방법들에 비해 보다 정확하고 안정된 결과를 제공하고 동시에 응력파의 영향을 적시에 조사할 수 있으며, 본 방법에 의해 개발된 유한요소모들은 기존의 동적응력 해석프로그램에 용이하게 연결 설치할 수 있음을 보인다.

## 1. 서 론

충격, 폭발등의 동적하중을 받는 구조물내의 균열은 응력파와 그 반사파들의 영향으로 불안정하게 되어 순간적으로 매우 빠른 속도-부재의 구성물질의 고유한 응력과 속도와 유사한 크기의 속도로 전파를 시작할 수 있으며, 전파에 대한 적절한 방지책이 없는 경우 구조물의 돌연한 파괴를 일으킬 수 있다. 이러한 동적 균열문제를 해결하기 위해 일반적으로 균열 전파의 시작(initiation), 전파(propagation) 및 정지(arrest) 거동을 동역학적인 응력해석을 통하여 조사하는 방법이 쓰이고 있다. 동적 균열문제의 대부분인 취성파괴의 경우 동적 균열의 특성은 균열선단의 응력장과 균열전파시 절점의 속도장(material velocity field)에서  $r^{-1/2}$  특이성(singularity)이 존재하는 것이며, 이 특이성의 강도를 동적응력확대계수(dynamic stress intensity factor; dynamic SIF)로 정의하고 있다. 시간과 균열전파속도의 함수인 동적응력확대계수는 균열선단에 원점을 둔 극좌표와 함께 균열선단의 응력분포상태를 나타내며, 취성의 경우 전파속도와 함께 동적에너지방출율(dynamic energy release rate)을 직접적으로 정의할 수 있다<sup>(1,2)</sup>.

동적 균열의 거동에 관한 기준(fracture criteria)은 대체로 에너지평형의 원리<sup>(3)</sup>에 기초를 두고 있는데, 이는 구성물질의 고유한 동적파괴에너지(fracture energy, fracture toughness) 값을 얻기위한 실험적 연구와 더불어 구조물 및 균열의 형상과 하중조건에 따른 동적응력확대계수 또는 동적에너지방출율의 계산이 필수적임을 의미한다. 이에 대한 이론적 해석은 응력파들의 간섭, 구조물과 균열의 복잡한 형상, 시간에 따른 경계조건영역의 변화등의 이유로 극히 이상적인 경우에만 국한되어 왔으며 대부분 수치해석적인 방법에 의존하고 있다. 특히 균열 전파의 시작전이나 정지후의 경우에는 에너지방출율이 정의되지 않기 때문에, 유한요소해석을 통하여 대체로 J-적분과 같은 경로적분식을 이용하는 방법<sup>(4)</sup>, 균열의 미소한 가상변화에 따른 가상에너지변화율을 계산하는 방법<sup>(5)</sup>, 동적응력확대계수를 미지변수로 갖는 특이요소를 사용하는 방법<sup>(6)</sup>등이 쓰이고 있다.

경로적분식의 경우 적분경로에 무관한 성질을

이용하여 균열선단에서 멀리 떨어진 곳의 유한요소 경계와 일치하는 경로에 따른 적분값을 이용하는데, 이는 균열선단의 특이성에 의한 오차를 줄이기 위함이다. 그러나, 대부분의 유한요소법의 경우 유한요소 경계에서 기본변수의 도함수값들은 그 신뢰도가 떨어지므로 적분값에 오차가 발생할 수 있다. 또한 동적 응력상태하의 균열문제에는 이 방법을 적용시킬 수 없는데, 그 이유는 응력파의 균열에 대한 영향을 즉시 평가하기 위해서는 되도록 균열선단에 가까운 경로를 택하여야 하기 때문이다. 균열의 가상변화에 의한 방법의 경우, 그 기초를 Lagrangian 운동학적 기술방법에 두고 있기 때문에 형상의 변화에 따른 에너지 변분식을 명시적으로 유도해 낼 수 없다. 따라서, 유한한 값의 가상변화를 선택하여 에너지 변분을 계산하여야 하며, 이는 정확하고 안정된 에너지 방출율의 계산을 저해하는 요인이 된다. 이 방법은 또한 특별한 해법이나 부가적인 강성도의 변화 매트릭스의 구성이 요구되는 경우가 많다.

본 논문에서는 동적 응력상태하의 정지 균열에 대한 동적응력확대계수의 정확하고 안정된 계산을 위하여 에너지 변분에 대한 명시적인 적분식을 유도하고 이를 유한요소법에 적용시키는 방법을 제시한다. 유도된 적분식은 균열선단의 유한한 영역에서 정의되며, 유한요소법에 적합한 체적적분의 형태로 표현된다. 이를 위하여 새로운 Eulerian-Lagrangian 운동학적 기술방법(Eulerian-Lagrangian kinematic description: ELD)<sup>(7)</sup>을 사용하여 균열선단에 위치한 유한영역에 대한 상호포텐셜에너지(mutual potential energy)를 정의하고, 이의 변분을 통하여 에너지방출율에 대한 명시적인 적분식을 유도해낸다. 이러한 과정은 모두 연속체역학적인 정식화를 통하여 일반적으로 이루어지며, 따라서 본 연구는 이미 제안한 정적균열에 대한 균열의 가상중분방법<sup>(8)</sup>을 보완하는 동시에, 이를 위하여 일반적이며 명확한 이론적 근거를 제시한다. 유한요소해석시 균열선단의 특이성은 간단하고 사용하기 쉬운 등매개변수특이요소(quarter-point singular isoparametric elements)로 나타내며, 이 특이요소에서 균열의 가상변화에 따른 각 절점의 변화에 특이성을 유지하기 위한 적합조건식을 적용하여 적분식을 계산한 후 적절한 동적에너지방

출율-동적응력확대계수의 관계식을 이용하여 동적 응력확대계수를 구한다.

## 2. Eulerian-Lagrangian 운동학적 모델

그림 1은 변형이 작은 경우의 ELD 운동학적 모델을 나타낸 것이다. 변형이 작은 경우 변형에 의한 형상의 변화는 무시할 수 있지만, 균열전파에 따른 자유표면의 증가와 같이 일반적으로 그 형상이 시간에 따라 변할 수 있다. 따라서, ELD 모델에서는 물질좌표계에 대하여 독립적인 기준좌표계에서의 기준형상을 정의한다. 이에 따른 자세한 전개는 참고문헌<sup>(7)</sup>에서 제시하였으므로 여기서는 본 연구에 필요한 부분만을 소개한 후 상호포텐셜에너지(mutual potential energy)를 정의하기로 한다.

ELD 모델에서 기준좌표  $x^r$ 는 시간에 따라 불변이며 유일한 독립변수로 사용된다. 따라서, 변위벡터  $u$ 와 물질좌표계로의 기하학적 사상, 즉 물질좌표계에서는 위치벡터  $X$ 는

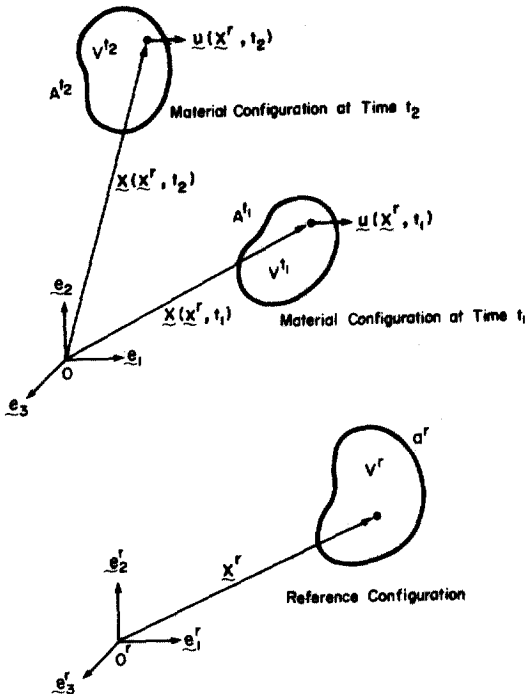


그림 1. The Eulerian-Lagrangian Kinematic Model for Small-Deformation

$$u = u(x^r, t) \quad (1)$$

$$X = X(x^r, t) \quad (2)$$

로 나타낼 수 있고, 자코비안과 역(inverse, or Eulerian) 자코비안의 성분은

$$\tilde{J}_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j^r} = X_{i,j} \quad (3)$$

$$\tilde{J}_{ij} = \frac{\partial x_i^r}{\partial X_j} = x_{i,j}^r = \tilde{J}_{ij}^{-1} \quad (4)$$

이다. 두 좌표계에서의 미소요소의 부피는  $dV = \tilde{J} dv^r$ 의 관계를 이루며,  $\tilde{J}$ 는 자코비안  $\tilde{J}_{ij}$ 의 행렬값으로

$$\tilde{J} = \epsilon_{ijk} \tilde{J}_{i1} \tilde{J}_{j2} \tilde{J}_{k3} \quad (5)$$

이며, 여기서  $\epsilon_{ijk}$ 는 permutation 기호이고  $\tilde{J}$ 는 내부의 모든 점에서 항상 양의 부호를 갖는다고 가정한다.

변형도텐서의 성분은 기준좌표계에서

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i, k} \bar{J}_{kj} + u_{j, k} \bar{J}_{ki}) \quad (6)$$

이며, 시간에 대한 변화율은 다음과 같이 정의된다.

$$\left. \frac{\partial (\ )}{\partial t} \right|_{\underline{X} \text{ fixed}} = (*) : \text{물질좌표계} \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial (\ )}{\partial t} \right|_{\underline{x}^r \text{ fixed}} = (\dot{\ }) : (\text{공간})\text{기준좌표계} \quad (8)$$

식 (7)과 (8)의 관계는

$$(*) = (\dot{\ }) - (\ )_{,k} \bar{J}_{kj} \dot{X}_j \quad (9)$$

로 나타낼 수 있으므로, 질점(material particle)의 속도는 변위  $u$ 에 식 (9)를 적용하고, 질점의 가속도는 이 결과에 식 (9)를 반복 적용하여 정의한다.

상호 포텐셜에너지를 정의하기 위해 서로 독립적인 평형상태 1과 2를 가정하기로 한다. 선형 탄성의 경우 중첩에 의해 또 다른, 독립적인 평형상태 0를 정의할 수 있고 평형상태 0의 변위, 체적력, 표면력 벡터의 성분은

$$u_i^{(0)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \quad (10)$$

$$b_i^{(0)} = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} \quad (11)$$

$$T_i^{(0)} = T_i^{(1)} + T_i^{(2)} \quad (12)$$

이며 포텐셜에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$I\Phi^{(0)} = I\Phi^{(1)} + I\Phi^{(2)} + M^{(1, 2)} \quad (13)$$

여기서  $M^{(1, 2)}$ 는 두 평형상태 1과 2에 의해 정의된 상호포텐셜에너지로서 기준좌표계에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

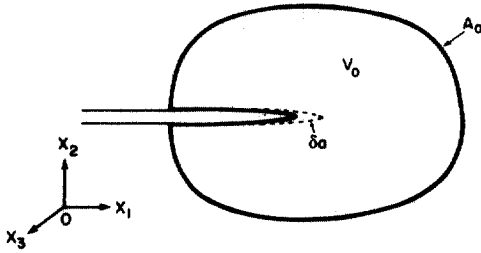
$$\begin{aligned}
M^{(1,2)} &= \int_{V^r} w^{(1,2)} \tilde{J} dv^r \\
&\quad - \int_{V^r} \rho (b_i^{(1)} u_i^{(2)} + b_i^{(2)} u_i^{(1)}) \tilde{J} dv^r \\
&\quad - \int_{a^r} (T_i^{(1)} u_i^{(2)} + T_i^{(2)} u_i^{(1)}) K_a da^r \quad (14)
\end{aligned}$$

윗 식에서  $a^r$  는 표면벡터가 작용하는 표면부분,  $K_a$  는 두 좌표계에서 미소면적의 관계,  $dA = K_a da^r$  를 만족하는 표면적 metric 이다. 상호포텐셜에너지 밀도  $w^{(1,2)}$  는 다음과 같이 정의된다.

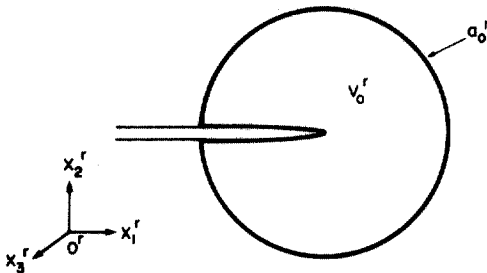
$$w^{(1,2)} = e_{ij}^{(1)} C_{ijkl} e_{kl}^{(2)} \quad (15)$$

### 3. 동적에너지방출율에 대한 체적적분식

균열의 가상변화에 따른 동적에너지의 변분을 구하기 위해 그림 2 와 같이 물질좌표계에서 균열 선단을 포함하고 그 경계가  $A_0$  부피  $V_0$  인 고정된



(a) Two Configurations of the Material Volume



(b) Reference Volume.

그림 2 A Fixed Material Volume Surrounding the Crack -Tip Region ;

- (a) the Material Volume Before and After Virtual Crack Extension,
- (b) the Reference Volume

유한영역을 고려한다. 모든 변수는 우선 물질좌표계에서 정의하고 변수 상단에  $\wedge$  로 표시하기로 하면, 균열의 가상증분에 의한 상호포텐셜에너지의 변분은

$$\begin{aligned}
\delta M^{(1,2)} &= \delta \int_{V_0} w^{(1,2)} dV - \delta \int_{V_0} \hat{\rho} [(\hat{b}_i^{(1)} - \hat{u}_i^{(1)}) \\
&\quad \hat{u}_i^{(2)} + (\hat{b}_i^{(2)} - \hat{u}_i^{(2)}) \hat{u}_i^{(1)}] dV \\
&\quad - \delta \int_{A_0} (\hat{T}_i^{(1)} \hat{u}_i^{(2)} + \hat{T}_i^{(2)} \hat{u}_i^{(1)}) dA \\
&\quad - \delta \int_{\delta A} (\hat{T}_i^{(1)} \hat{u}_i^{(2)} + \hat{T}_i^{(2)} \hat{u}_i^{(1)}) dA \quad (16)
\end{aligned}$$

로 물질좌표계내에서 정의되며,  $\delta A$  는 균열의 가상변화에 의해 발생한 자유표면의 증분을 뜻한다. 윗 식에서 동적 영향은 관성력을 체적력의 항에 포함함으로써 고려하게 되는데, 이는 정지균열의 경우 균열선단에서의 질점가속도의 분포가 특이성을 갖지 않기 때문에 가능하다. 또한, 균열의 가상변화에 대한 속도 및 가속도가 정의되지 않기 때문에 관성력의 질점가속도를 위해 두 좌표계에서의 시간도함수를 동일하게 사용할 수 있다(식 (9) 참조). 여기서, 균열의 가상변화시 체적력, 표면력벡터와 밀도에 변분이 발생하지 않고, 생성된 자유표면에 힘이 작용치 않으며 질점의 가속도성분에 변화가 발생하지 않는다고 가정할 수 있다. 즉,

$$\delta \hat{\rho} = \delta \hat{b}_i^{(1)} = \delta \hat{b}_i^{(2)} = 0 \quad \text{in } V_0. \quad (17a)$$

$$\delta \hat{T}_i^{(1)} = \delta \hat{T}_i^{(2)} = 0 \quad \text{on } A_0. \quad (17b)$$

$$\hat{T}_i^{(1)} = \hat{T}_i^{(2)} = 0 \quad \text{on } \delta A \quad (17c)$$

$$\delta \hat{u}_i^{(1)} = \delta \hat{u}_i^{(2)} = 0 \quad \text{in } V_0. \quad (17d)$$

따라서 식 (16)은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\delta M^{(1,2)} &= \delta \int_{V_0} \hat{w}^{(1,2)} dV - \int_{V_0} \hat{\rho} [(\hat{b}_i^{(1)} - \hat{u}_i^{(1)}) \delta \hat{u}_i^{(2)} \\
&\quad + (\hat{b}_i^{(2)} - \hat{u}_i^{(2)}) \delta \hat{u}_i^{(1)}] dV \\
&\quad - \int_{A_0} (\hat{T}_i^{(1)} \delta \hat{u}_i^{(2)} + \hat{T}_i^{(2)} \delta \hat{u}_i^{(1)}) dA \quad (18)
\end{aligned}$$

여기서, 물질좌표계에서 정의된 유한영역의 부피  $V_0$  와 경계  $A_0$  를 기준좌표계에서 시간에 대해 불변인 경계  $a_0^r$  와 부피  $v_0^r$  로 사상시키고 모든 변수를 기준좌표  $x^r$  의 함수로 표시하게 되면, 물질좌표계에서의 변위함수  $\hat{u}^{(n)}(X, t)$  와 가속도함수  $\hat{\ddot{u}}^{(n)}(X, t)$  는 기준좌표를 이용한 변위함수  $u^{(n)}(x^r, t)$  와 가속도함수  $\ddot{u}^{(n)}(x^r, t)$  로 역사상 (inverse mapping) 에 의해 다음과 같이 연관된다.

$$\hat{u}^{(n)}(X, t) = u^{(n)}(x^r(X, t)), \quad n=1, 2 \quad (19a)$$

$$\hat{\ddot{u}}^{(n)}(X, t) = \ddot{u}^{(n)}(x^r(X, t)), \quad n=1, 2 \quad (19b)$$

균열의 가상증분은 ELD 모델에서 기하학적 사상의 변분  $\delta X(x^r, t)$  와 관련되며, 이 때 유한영역에서 평형을 유지하기 위해서는 변위장  $\delta u^{(n)}(x^r)$ ,  $n=1, 2$  에도 변분이 발생하여야 한다. 따라서, 식 (18)은 기준좌표계내에서

$$\begin{aligned} \delta M^{(1,2)} = & \int_{V_0} r(\delta_{u(1)} w^{(1,2)} + \delta_{u(2)} w^{(1,2)}) \tilde{J} dv^r \\ & - \int_{V_0} \rho[(b_i^{(1)} - \dot{u}_i^{(1)}) \delta u_i^{(2)} \\ & + (b_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(2)}) \delta u_i^{(1)}] \tilde{J} dv^r \\ & - \int_{V_0} r(T_i^{(1)} \delta u_i^{(2)} + T_i^{(2)} \delta u_i^{(1)}) K_a da^r \\ & + \int_{V_0} \delta x(w^{(1,2)} \tilde{J}) dv^r \quad (20) \end{aligned}$$

으로 나타내지며,  $\delta x$ 는 기하학적 변분에 의한 변분 연산자를 뜻한다. 유한영역  $V_0$  가 평형상태를 이루므로 변분  $\delta u^{(1)}$  과  $\delta u^{(2)}$  에 대해 상호포텐셜의 원리를 적용하면 첫번째부터 3 번째까지의 적분항은 영이 되며, 상호포텐셜에너지의 변분은 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\delta M^{(1,2)} = \int_{V_0} r(w^{(1,2)} \delta x \tilde{J} + \delta x w^{(1,2)} \tilde{J}) dv^r \quad (21)$$

기하학적 사상의 변분은 기준좌표  $x^r$  과 균열의 가상증분길이  $\delta a$  의 함수로써

$$\delta \bar{X} = \delta X(x^r, \delta a) = \delta a \bar{X}(x^r) \quad (22)$$

로 정의되며, 여기서  $\bar{X}$ 는 균열의 증분과 기하학적 사상의 변분사이의 적합성을 만족하는 사상함수이다. 유한영역의 고정된 부피  $V_0$  는 균열의 가상변화동안 불변이어야 하므로 기하학적 사상의 변분은  $a_0^r$  에서

$$X_i \cdot n_i = 0 \quad (23)$$

의 조건식을 만족하여야 한다. 여기서,  $n$  은 경계  $a_0^r$  에서 외부로 향하는 수직벡터이다. 자코비안과 역자코비안의 변분성분은

$$\delta \tilde{J}_{ij} = \delta \frac{\partial X_i}{\partial x_j^r} = \delta X_{i,j} \quad (24)$$

$$\delta \bar{J}_{ij} = \frac{\delta x_i^r}{\partial(X_j + \delta X_j)} - \frac{\partial x_i^r}{\delta X_j} = -J_{ik} \delta X_k \cdot \bar{J}_{ij} \quad (25)$$

이며, 자코비안의 행렬값의 변분은

$$\delta \tilde{J} = \epsilon_{ijk} (\tilde{J}_{2j} \tilde{J}_{k3} \delta X_{i,1} + \tilde{J}_{1i} \tilde{J}_{k3} \delta X_{j,2} + \tilde{J}_{1i} \tilde{J}_{2j} \delta X_{k,3}) \quad (26)$$

이고, 상호포텐셜에너지밀도의 변분은

$$\begin{aligned} \delta x w^{(1,2)} = & -\sigma_{ij}^{(1)} u_{i,k}^{(2)} \tilde{J}_{k\alpha} \delta X_{l,m} \tilde{J}_{mj} \\ & -\sigma_{ij}^{(2)} u_{i,k}^{(1)} \tilde{J}_{k\alpha} \delta X_{l,m} \tilde{J}_{mj} \quad (27) \end{aligned}$$

로 표현된다.

따라서 균열의 가상증분  $\delta a$  에 의한 상호포텐셜 에너지 방출율은 다음과 같이 정의된다.

$$G^{(1,2)} = -\frac{1}{S} \frac{dM^{(1,2)}}{da} = -\frac{1}{S \delta a} \delta M^{(1,2)} \quad (28)$$

여기서  $a$  는 균열길이이며  $S$  는 평면응력 또는 평면변형의 경우 판두께를 가리킨다. 균열이 mode-I 의 상태일 경우 식 (28) 은

$$\begin{aligned} G = & -\frac{1}{S \delta a} \delta \Pi \\ = & -\frac{1}{S \delta a} \int_{V_0} r(w \delta x \tilde{J} + \delta x w \tilde{J}) dv^r \quad (29) \end{aligned}$$

로 간단히 표현될 수 있으며  $w$  는 단순히 변형에너지밀도를 나타내게 된다.

#### 4. 유한요소해석에의 적용

동적에너지방출율에 관한 식 (28) 또는 (29) 의 수치적분은 균열선단의 유한영역  $v_0^r$  을 동태개변수 특이요소망으로 모델링하고, 각 특이요소내에서 균열의 가상증분시 특이성을 유지하기 위한 적합조건식을 적용하여 수행하게 된다.

특이요소  $\zeta$  의 기준좌표계에서의 부피를  $v_{\zeta 0}^r$  유한영역의 모델링에 사용된 특이요소의 갯수를  $P$  라 하면

$$v_0^r = \sum_{\zeta=1}^P v_{\zeta 0}^r \quad (30)$$

이며, 균열의 가상증분은 각 특이요소내에서 기하학적 사상의 변분  $\delta X(x^r)$  을 발생시킨다. 따라서, 동태개변수요소의 변위장과 형상의 보간에 쓰인 형상함수를 이용하면

$$\delta X_i = h_{\alpha} \delta x_{i\alpha}; \alpha=1, N \quad (31)$$

이고,

$$\delta X_{i,j} = h_{\alpha,j} \delta x_{i\alpha}; \alpha=1, N \quad (32)$$

이다. 여기서, 형상함수  $h_{\alpha}(x^r)$  은 요소경계에서  $C_0$  연속성을 지니고 각 요소내에서 미분가능하며,  $N$  은 요소의 절점수를 나타낸다.

$\delta X_{i\alpha}$  는 식 (22)에 의해,  $D_{i\alpha} h_{\alpha} = X_i$  로 놓으면,

$$\delta X_{i\alpha} = \frac{\partial X_{i\alpha}}{\partial a} \delta a = D_{i\alpha} \delta a \quad (33)$$

로 표시될 수 있다.  $D_{i\alpha}$  는 균열선단의 단위증분에 따른 절점  $\alpha$  의  $i$  방향으로의 변화량을 나타내며, 따라서 가상증분시에도 특이성을 유지하도록 중간절점의 위치를 그대로 1/4점에 위치시키기 위한 값을

$$+ \tilde{J}_{11} \tilde{J}_{22} h_{\alpha,3} D_{1\alpha}); \alpha=1, N \quad (35)$$

이고

$$A_2^{(1,2)} = -[\sigma_{ij}^{(1)} u_{i,k}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{i,k}^{(1)}] \tilde{J}_{k1} h_{\alpha,m} \tilde{J}_{mj} \tilde{D}_{1\alpha} ; \alpha=1, N \quad (36)$$

이다. 식 (34)의 체적적분은 강성도 매트릭스의 구성과 동일한 방법으로 각 특이요소내의 Gauss적분점에서 명시적으로 수치적분할 수 있으며, 경로적분식을 이용하는 방법에 비해 기본변수의 도함수값의 정확도를 유지할 수 있게 된다.

동적응력확대계수의 계산은 동적에너지방출율과 응력확대계수  $K$ 와의 관계식<sup>(9)</sup>을 이용하여 수행한다. 응력상태가 mode-I 과 mode-II 의 혼합일 경우 에너지방출율로부터  $K_I$  과  $K_{II}$ 를 직교성을 이용하여 분리해 내는 방법은 참고문헌<sup>(9)</sup>에서 제시하였고, 여기서는 mode-I 의 경우만을 다루기로 한다. 동적에너지방출율은 균열의 전파속도  $v$ 와 동적응력확대계수의 함수로써

$$G = \frac{1}{2\mu} f(v) \cdot K_I^2 \quad (37)$$

이며,  $\mu$ 는 전단탄성계수이고,  $f(v)$ 는 shear wave, dilatation wave 및 균열전파의 속도의 함수로 나타내지며<sup>(9)</sup>, 정지균열의 경우 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$f(0) = \begin{cases} 1-v & : \text{평면변형} \\ \frac{1}{1+v} & : \text{평면응력} \end{cases} \quad (38)$$

따라서 동적응력확대계수는 동적에너지방출율에 관한 명시적인 체적적분식 (34)를 균열선단의 유한영역을 모델링한 특이요소내에서 수치적분한 후식 (37)과 (38)을 이용하여 쉽게 계산할 수 있다.

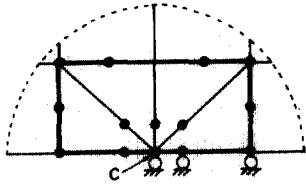
## 5. 계산예

### 5.1 동적하중상태하의 균열

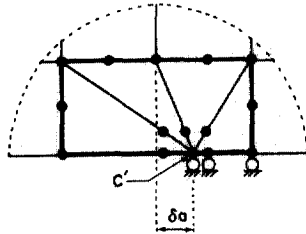
그림 4와 같이 길이  $2a_0$ 인 균열이 중앙에 있는 평판이 균일하게 작용하는 인장력  $P_0$ 를 받고 있다. 평판의 탄성계수는  $7.56 \times 10^9 \text{N/m}^2$ , 포와송비는 0.286, 질량밀도  $2.45 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 이다. 인장력  $P_0$ 는

$$P_0 = \sigma_{22} H(t) \quad (39)$$

와 같이 Heaviside unit step-function  $H(t)$ 에 의해  $t=0.0 \mu\text{sec}$ 에서 돌연히 작용한다. 균열은  $t=t_c = 4.4 \mu\text{sec}$  때까지 정지상태에 있고,  $t=t_c$ 에 일정한 속도  $v=1.0 \text{ km/sec}$ 로 전파하기 시작한다. 본 방법



(a) Crack Prior to Extension



(b) Virtual Extension of Crack

그림 3. Model of Crack-Tip Region

나타낸다(참고문헌 [8]의 식 (23)참조).

그림 3은 균열의 연장선을 중심으로 대칭일 경우 균열선단 유한영역의 반을 4개의 등대개변수유한요소로 모델링한 전형적인 예이다. 그림 3(a)는 균열의 가상단위중분전의 상태이며 그림 3(b)는 가상단위중분 후의 상태를 상징적으로 나타낸 것이다. 균열선단  $C$ 는 가상중분 후  $C'$ 의 위치에 놓으며, 따라서 1/4점에 위치하는 5개의 중간절점에 해당하는  $D_n$ 는 각각 3/4의 값을 갖는다. 이 때 굵은 실선으로 표시된 경계에서 식 (23)을 만족하며, 내부의 유한영역의 부피는 변함이 없다.

윗 식들을 이용하여 동적에너지방출율에 관한 식 (28)을 유한요소 표현식으로 바꿔 쓰면 다음과 같다.

$$G^{(1,2)} = -\frac{1}{S} \left[ \sum_{\zeta=1}^p \int_{\zeta_0}^p [A_1^{(1,2)} + A_2^{(1,2)}] dv^r \right] \quad (34)$$

여기서

$$A_1^{(1,2)} = w^{(1,2)} \epsilon_{ijk} (\tilde{J}_{22} \tilde{J}_{k3} h_{\alpha,1} D_{1\alpha} + \tilde{J}_{11} \tilde{J}_{k3} h_{\alpha,2} D_{1\alpha})$$

에 의해 전파시작전까지의 동적응력확대계수를 구하기 위해 6절점의 등대개변수유한요소망을 구성하고, 균열선단의 유한영역에서는 중간절점을 1/4 지점에 이동시킨 특이요소를 사용하였다. 해를 위해 Newmark 방법을 이용하였으며, 사용된 step size는  $\Delta t=0.2 \mu\text{sec}$  이고, Newmark 계수는  $\alpha=0.5$  와  $\beta=0.25$  이다. 본 방법에 의해 구해진 동적응력확대계수를 무한평판내의 길이  $2a_0$  인 균열에 대한 정적 이론해  $\sigma_2(\pi a_0)^{1/2}$  로 나누어 무차원화한 결과가 그림 5에 도시되어 있다. 여기서,  $t_L$  은 속도가 가장 빠른 dilatation wave가 하중이 작용하는 경계에서부터 균열에 도달하는 시간을,  $t_c$  는 균열이 전파하기 시작하는 시간을 나타낸다.

그림 5에 보여진 시간까지의 균열선단에서 응력파들의 간섭이 아직 시작되기 전이므로 무한한 평판의 균열에 대한 이론해를 적용시킬 수가 있다.

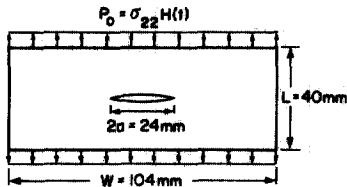


그림 4. Dimensions for a Mode-I Dynamic Fracture Problem in a Finite Plate with Stress-Wave Loading

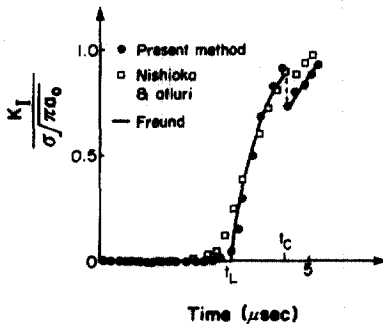


그림 5. Normalized SIF for Mode-I Dynamic Fracture Problem in a Finite Plate with Stress-Wave Loading

Freund<sup>(10)</sup>에 의해 구해진 이론해를 이용하여 본 문제의 해를 구하면

$$k(t, 0) = 2 \left[ \frac{2}{\pi} \right]^{1/2} \sigma_0 \omega_0 (t - t_L)^{1/2} \quad (40)$$

이며, 여기서  $\sigma_0 = 2\sigma_2$  이고  $\omega_0$ 는 참고문헌에<sup>(10)</sup> 주어져 있다. 식 (40)에 의해 구해진 값을 같은 방법으로 무차원화한 결과가 그림 5에 실선으로 표시되어 있다. 사각형으로 표시된 결과는 Nishioka와 Atluri<sup>(11)</sup>가 무한평판의 이론해를 이용하여 동적응력확대계수를 미지의 변수로 포함되는 특별한 특이요소를 만들어 사용한 결과이다. 그림 5에 원형으로 표시된 본 연구의 결과는 균열전파전까지 이론해에 거의 정확한 값을 보이고 있으며, 특히 응력파가 균열선단에 도달하는 시간  $t_L$ 을 전후하여 Nishioka와 Atluri의 방법보다 상당히 안정된 값을 나타내고 있어 시간에 따른 응력파의 균열거동에 대한 영향을 적시에 정확히 탐지할 수 있음을 보이고 있다.

## 5. 2 전파후 정지한 균열

균열이 일정한 시간동안 전파한 후 정지할 때, 그 후의 거동을 조사하기 위해서는 구조물내 여러 응력파들의 간섭에 의한 정지된 균열의 동적응력확대계수의 변화를 계산하는 것이 필요하다. 이러한 문제에 대한 본 연구결과의 적용을 위해 그림 6과 같이 한 변에 균열이 있는 정사각형의 평판을 다루기로 한다. 서로 마주보는 변에서 그림과 같이 항상 정적 변위조건을 받고 평면변형상태에 있는 평판의 균열은, 시간  $t=0$ 에서 전파를 시작하여  $t_A$ 에서 돌연히 정지한다. 평판의 물성은 5.1의 예제

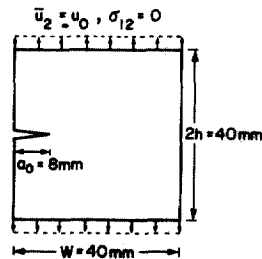


그림 6. Dimensions for a Mode-I Crack Arrest Problem in a Finite Strip with Prescribed Boundary Displacements

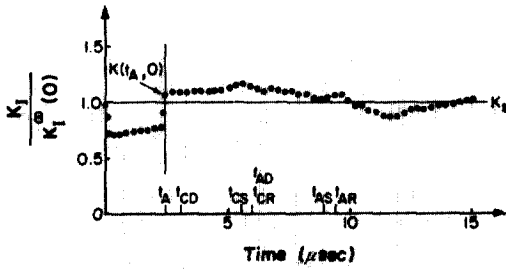


그림 7. Normalized Dynamic SIF for a Crack Arrest Problem

와 같으며, 평판과 균열선단의 유한영역의 유한요소 모델링도 동일한 방법으로 수행하였다. 그림 7은 균열의 전파속도가 평판의 고유한 shear wave 속도의 0.4 배, 전파정지시간  $t_A$ 가  $2382\mu\text{sec}$ 인 경우, step size  $\Delta t = 0.1443\mu\text{sec}$ 를 사용하여 얻은 값을 평면변형상태의 반무한정지균열에 대한 이론해<sup>(12)</sup>  $K_I^st(0)$ 로 무차원화한 결과를 도시하였다.

그림 7에서 시간  $t_{CD}$ ,  $t_{CS}$ ,  $t_{CR}$ 은 각각 균열의 전파 시작시 생성된 dilatation, shear, Rayleigh wave가 가장 가까운 경계에 도달후 반사되어 정지된 균열의 선단에 도착하는 시간이다. 시간  $t_{AD}$ ,  $t_{AS}$ ,  $t_{AR}$ 은 균열의 전파정지시 생성된 dilatation, shear, Rayleigh wave가 가장 가까운 경계에 도달후 반사되어 균열선단에 도착하는 시간이다. 균열이 정지할 때는 이러한 응력파들의 간섭이 시작되기 전이므로 이 때의 동적응력확대계수를 이론해와 유한요소해석으로 예측할 수 있다. Freund<sup>(10)</sup>에 의하면, 속도  $v$ 로 전파하는 무한평판내의 균열에 대한 동적응력확대계수  $K(t, v)$ 는 동일한 하중상태하에 있고 길이가 같은 정지균열에 대한 동적응력확대계수  $K(t, 0)$ 와 속도에 대한 공통함수  $k(v)$ 의 곱으로 표시된다.

$$K(t, v) = k(v)K(t, 0) \quad (41)$$

공통함수  $k(v)$ 는 전파속도에 따라서 0과 1사이의 값을 가지며 (참고문헌 (13)의 식 (4.3)참조), 따라서 균열이 정지할 때의 동적응력확대계수  $K(t_A, 0)$ 는  $k(v)$ 의 역수만큼 갑자기 증가함을 알 수 있다. 그림 7에 표시된  $K(t_A, 0)$ 은 유한요소해석에 의해 구해진  $K(t_A, v)$ 를 주어진 속도에 대한  $k(v)$ 의 값으로 나누어 구해진 결과이다.

본 연구의 방법으로 구한 동적응력확대계수는 그림 7에서와 같이 예측된  $K(t_A, 0)$ 와 거의 동일한 값을 보였으며, 이러한 결과는 다른 전파속도 (shear wave속도의 0.2와 0.6 배)와 다른 정지시간의 경우에서도 확인되었다. 그림 7에는 도시하지 않았지만 정지후의 장기적인 경향을 보기위해  $300\mu\text{sec}$ 까지 해석한 결과 동적응력확대계수는 정지시의 균열길이에 따른 정적응력확대계수  $K_s$ 를 중심으로 진동함을 보였다. 이에 대한 이론해는 불가능하나, 응력파의 간섭이 심한 경우 Kalthoff 등<sup>(14)</sup>에 의해 행해진 실험에서 이러한 현상이 확인되고 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 동적 하중을 받는 균열의 동적응력확대계수를 구하기 위해 기존의 동적응력해석과정에 간편히 연계 사용할 수 있는 수치계산방법을 제시하였다. 동적에너지방출율에 관한 명시적인 체적적분식을 연속체역학적인 정식화를 통하여 유도하고, 이를 이용하여 균열선단에서 유한영역의 특이요소 모델링을 통하여 동적응력확대계수를 계산할 수 있도록 유한요소법에 적용하였다. 이 방법은, 사용된 운동학적 기술방법의 원천적인 결함때문에 에너지방출율에 관한 명시적인 표현식을 얻을 수 없어 가상증분의 유한한 실제 값을 선택하여 계산하여야 하는 기존의 가상균열증분 방법의 결함을 제거하여 보다 정확하고 신뢰성있는 결과를 제공한다. 또한 경로적분식을 이용하는 방법에 반해 균열선단에서 체적적분을 이용함으로써 유한요소해석에 적합하며 수치적분시 그 정확도를 유지할 수 있고, 동시에 응력파의 균열에 대한 영향을 적시에 탐지해 낼 수 있다. 본 방법에 의해 개발된 유한요소 해석모듈은, 그 생성이 매우 복잡하거나 주위의 정상적인 유한요소와의 경계에서 연속조건을 만족시키지 못하는 특수한 특이요소를 개발 사용하는 방법과는 달리 기존의 해석 프로그램에 용이하게 연결 설치할 수 있다.

본 연구와 관계되어 계속 연구되어야 할 과제는 전파하는 균열에 대해 동적에너지방출율에 관한 명시적인 체적적분식을 정의하는 문제이다. 현재 보편적으로 사용되는, 인접한 두 시간사이의 실제 에너지 차를 계산하는 방법은 매우 정확한 값을 주고 있으나 이 문제가 해결되면 전 과정에 걸쳐



일관된 방법을 사용할 수 있게 된다. 이를 위하여, 본 연구에서 사용된 과정을 이용하고 균열의 가상 증분 대신 실제 균열의 속도장을 고려하는 방법도 가능할 것이다.

#### 감사의 말

이 연구는 1987년도 문교부 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 수행되었으며 이에 사의를 표합니다.

#### 참 고 문 헌

1. Freund, L. B. and Clifton, R. J., "On the Uniqueness of Plane Elastodynamic Solutions for Running Cracks," *Journal of Elasticity*, Vol. 4, 293-299(1974)
2. Ma, C. C. and Freund, L. B., "The Extent of the Stress Intensity Factor Field During Crack Growth Under Dynamic Loading Conditions," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 303-310(1986)
3. Freund, L. B., "Dynamic Crack Propagation," *The Mechanics of Fracture*(Ed. Erdogan, F.), ASME AMD, Vol. 19, 105-134(1976)
4. Nakamura, T., Shin, C. F. and Freund, L. B., "Computational Methods Based on an Energy Integral in Dynamic Fracture", *International Journal of Fracture*, Vol. 27, 229-243(1985)
5. Hellen, T. K., "On the Method of Virtual Crack Extensions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 187-207(1975)
6. Atluri, S. N. and Nishioka, T., "Numerical Studies in Dynamic Fracture Mechanics," *International Journal of Fracture*, Vol. 27, 127-143(1985)
7. Koh, H. M. and Haber, R. B., "Elastodynamic Formulation of the Eulerian-Lagrangian Kinematic Description", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 839-845(1985)
8. Haber, R. B. and Koh, H. M., "Explicit Expressions for Energy Release Rates Using Virtual Crack Extensions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 301-315(1985)
9. Haber, R. B. and Koh, H. M., "An Eulerian-Lagrangian Virtual Crack Extension Method for Mixed-mode Fracture Problems", *Proc. of the 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA/ASME/ASCE/AHS, Part I*, 116-122(1984)
10. Freund, L. B., "Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading-III. Stress Wave Loading", *Journal of the Mechanics of Physics and Solids*, Vol. 21, 47-61(1973)
11. Nishioka, T. and Atluri, S. N., "Numerical Modeling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies, by Moving Singular Elements, Part 2: Results", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, 577-582(1980)
12. Nilsson, F., "Dynamic Stress-Intensity Factors for Finite Strip Problems," *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 8, 403-411(1972)
13. Freund, L. B., "Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading-I. Constant Rate of Extension", *Journal of the Mechanics of Physics and Solids*, Vol. 20, 129-140(1972)
14. Kalthoff, J. F., Beinert, J., Winkler, S. and Klemm, W., "Experimental Analysis of Dynamic Effects in Different Crack Arrest Test Specimens", *Crack Arrest Methodology and Applications*, ASTM STP 711, 109-127(1980)

(接受: 1989. 7. 24)