

설계민감도를 이용한 철근콘크리트 뼈대구조의 최적화

Optimal Design of Reinforced Concrete Frames using Sensitivity Analysis

변	근	주*
Byun,	Keun	Joo
최	홍	식**
Choi,	Hong	Shik

Abstract

In the design of reinforced concrete framed structures, which consist of various design variables, the objective and the constraint functions are formulated in complicated forms. Usually iterative methods have been used to optimize the design variables. In this paper, multilevel formulation is adopted, and design variables are selected in reduced numbers at each level, to reduce the iterative cycle and to accelerate the convergence rate.

At level 1, elastic analysis is performed to get the upper and lower bounds of the redistributed design moments due to inelastic behavior of the frame. Then the design moments are taken as design variables and optimized at level 2, and the sizing variables are optimized at level 3.

The optimization of redistributed moments is performed using the design sensitivity obtained at the level 2, and force approximation technique is used to reflect the variation of design variables in the lower level to the upper level. The design variables are selected in reduced numbers at each level, and the optimization formulation is simplified effectively.

A cost function is taken as the objective function, and the constraints of the stress of the structures are derived from BSI CP 110 following limit state theory. Numerical examples are included to prove the effectiveness of the developed algorithm.

要 旨

철근 콘크리트 뼈대구조는 설계변수가 많고, 목적함수의 제약조건이 복잡하여 주로 반복적인 재해석에 의하여 최적해에 접근하는 방법이 사용되고 있다. 본 연구에서는 다단계분할(multilevel decomposition)에 의하여 최적화 문제를 형성하여 재해석과정을 줄이고 효과적으로 설계변수를 취할 수 있도록 하였다.

*正會員 · 延世大學校 工科學 教授

**正會員 · 延世大學校 大學院 博士過程

최적화의 단계는 첫째 단계에서 비선형거동에 의한 재분배모멘트의 설계공간을 계산하여 설계모멘트에 대한 제약조건식을 형성하고, 둘째 단계에서는 재분배 모멘트를 최적화하였으며, 셋째 단계에서는 설계단면을 최적화하였다. 이때 재분배 모멘트의 최적화에 따른 첫째 단계의 모멘트의 설계공간의 변화는 부재력 변화량 추정(force approximation technique)에 의하여 수정하도록 하며, 변수를 단계 별로 줄여 수렴을 가속화시킬 수 있도록 하였다.

최적화 문제의 목적함수로는 경비함수를 취하였으며 영국 CP110의 한계상태설계법을 이용하여 부재의 용력제약조건식을 유도하고, 설계예를 통하여 본 연구의 타당성과 효율성을 구명하였다.

1. 서 론

1960년대 부터 구조물의 경제적인 설계에 대한 관심을 가져오기 시작한 이래, 구조물의 최적설계도 근래에 들어 매우 급격히 진전되어 그 이용도가 증대되고 있는 실정이다. 그러나, 철근콘크리트 구조의 경우 설계변수가 많고 설계시에 상태변수가 설계변수의 간접함수로 표시되어 복잡한 최적설계문제가 되는 경우가 많으므로 그 적용이 매우 제한적이었다^(1, 2).

철근콘크리트 구조의 최적화에 대한 연구는 대부분이 부재의 요소최적화 위주로 이루어졌으며, 구조최적화는 요소최적화와 구조해석의 반복과정에 의하여 최적해를 구하기 때문에 복잡하고 매우 긴 시간이 요구되는 과정을 거쳐야 한다. 따라서 뼈대구조의 효율적인 최적화를 위하여 설계변수를 최소로 줄이거나, 그 거동을 단순하게 근사화시키며 재해석의 반복회수를 줄이는데 많은 노력이 집중되어왔다.

1972년 Kirsch 등이 연속 RC보 및 수직기둥에 의해 지지된 격자보구조에 대해 보의 유효깊이를 가정하여 2단계 분할에 의한 최적설계를 시도하였으며⁽³⁾, 1976년 Moses 등은 격자형 보의 최적화를 위하여 상태변수를 설계변수로 취하고, 상반변수(reciprocal variable)를 이용하여 LP 문제를 형성한 후 부분최적화(suboptimization)에 의하여 효과적으로 최적해를 얻고자 노력하였다⁽⁴⁾.

또 1979년 Kirsch 등은 다단계분할(multilevel decomposition)에 의한 최적화를 시도하여, 단계 1에서 가정된 거동에 대하여 종속적인 설계변수를 최적화 한뒤, 단계 2에서 독립 설계변수를 최적화하는 방법을 이용하여 강뼈대구조의 최적화를 시도하였다⁽⁵⁾. 그러나 이 때에도 분할된 부구조물에 대해, 단계 간의 변수의 변화에 따른 영향을 효과

적으로 고려하지 못하므로 구조물의 분할에 많은 제한이 주어졌다.

이러한 점을 보완하고 분할시에 부재간의 최적화 경향을 최종단계에서 효과적으로 취합할 수 있도록 하기 위하여 여러가지의 시도가 이루어지고 있다.

첫째는 전단계의 부구조물상의 설계변수에 의한 설계민감도(design sensitivity)를 다음 단계의 목적함수에 반영시킴으로써 해결하려는 시도이다.

이와 같은 접근방법은 1982년 Sobieszczanski-sobieski 등에 의해 목적함수 및 각부구조물의 변수를 다른 부구조물의 변수로 미분하여 민감도정보를 얻어 다음 단계의 최적화에 반영한 것으로 구체화 되기 시작하였다⁽⁶⁾. 이 때의 설계민감도는 Taylor 급수의 1차항을 이용하여 얻도록 하였다.

한편 1985년 Sobieszczanski-sobieski 등은 위의 방법이 강재 뼈대구조 등의 구조최적화에 적용 가능함을 제시하였다⁽⁷⁾.

두번째 방법은 1985년 Kirsch 등에 의해 시도된 방법으로 콘크리트 구조등의 복잡한 구조에 대해서 4단계까지의 다단계분할을 시도하여 반복 최적화과정을 줄이려는 노력이 시도되었다⁽⁸⁾.

그러나 전자의 방법은 재하경우가 증가하면 부구조물의 설계변수 각각에 대한 편미분항이 크게 증가하므로 결국은 설계변수의 수가 늘고 제약조건이 복잡해지게 되어 효율이 둔화되어지는 단점이 있다. 또 후자의 경우에는 연속보에 대해 적용가능성만을 제시하였을 뿐 효과적인 단계간의 결합을 시도하지는 못하였다.

따라서 본 연구에서는 위의 문제를 보완하고 철근콘크리트 구조의 최적화를 위하여 구조 체계를 여러개의 부구조물로 분할하여 다단계 분할에 의한 최적화 문제를 형성하여 단계별 설계변수를 최소화 하고, 동시에 부재력 변화량추정(force appro-

ximation technique)에 의하여 설계단면의 변화에 따른 부재력의 변화를 제약조건식 내에 효과적으로 반영하여 단계간의 결합을 용이하게 할 수 있는 알고리즘을 개발하고자 한다.

이때 보와 기둥의 단면형상 및 철근량을 설계변수로 취하여 비선형 최적화문제를 형성하였으며, 무제약 최적화 기법을 이용하여 해를 구하였다. 구조해석은 탄성이론을 적용하여 해석하였으며, 타 연구와의 비교를 위하여 최적화문제형성은 영국 CP110의 한계상태 설계법⁽⁹⁾을 기준으로 하였고, 사용된 경비함수의 재료비는 1988년 8월을 기준으로 하였다.

2. 최적설계 문제의 형성

일반적으로 철근콘크리트 구조는 설계변수가 과다하고 목적함수 또는 제약조건식이 설계변수의 간접함수로 표시되므로 해석적인 설계민감도를 구하는 것은 매우 어려우며, 수치적으로 유한차분법에 의해 민감도를 구한다 하더라도 그 수렴의 비효율성으로 인하여 실행 불가능한 경우가 발생하게 된다.

따라서 본 연구에서는 설계변수를 줄이고, 수렴의 효율을 높이기 위하여 철근콘크리트 뼈대구조를 여러개의 부분으로 분할하여 경계절점에서의 모멘트를 설계변수로 취하고, 부구조물에서 최적화된 값들과 민감도를 전체구조의 최적화에 적용시키는 다단계 분할에 의한 최적화 방법을 개발하고자 한다. 다단계 분할에 의해 철근 콘크리트 뼈대구조의 일반적 최적화문제를 형성하면 다음과 같다.

2.1 목적함수

철근콘크리트 뼈대구조의 경비함수를 목적함수로 취하면 다음과 같다.

$$Z = C_c \sum_{j=1}^n f(D_j) + C_s \mu_s \sum_{j=1}^n A_s l_j + C_f \sum_{j=1}^n f(b, D_j) \quad (1)$$

여기서, Z =목적함수, 경비함수

C_c =콘크리트의 경비

C_s =철근의 경비

C_f =거푸집의 경비

b =단면의 폭

D_j = j 번째 설계단면의 형상변수

A_s = j 번째 설계단면의 철근의 단면적

l_j = j 번째 설계단면의 보강철근의 길이

μ_s =철근의 단위중량

n =설계단면의 수

f_c, f_t =각각 콘크리트의 체적 및 거푸집의 면적함수

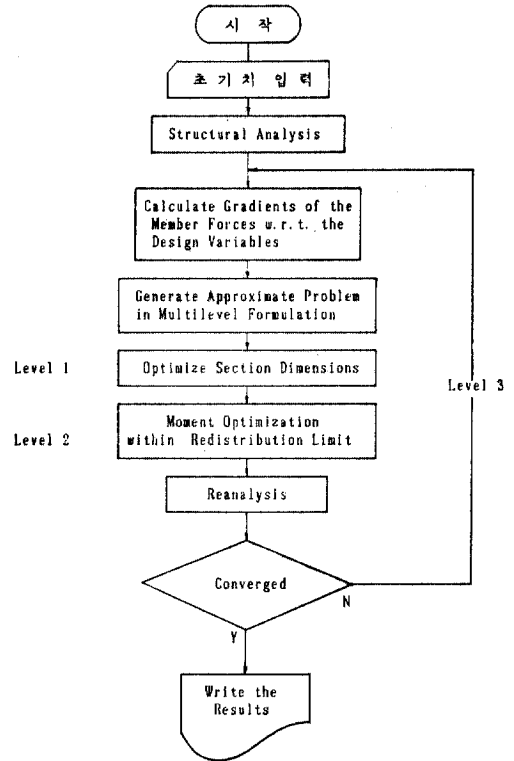


그림 1. 적응 최적화 알고리즘의 흐름도

2.2 민감도의 해석과 제약조건식의 형성

각 단계에서의 부분최적화(suboptimization)에서 설계민감도를 구할 때 사용되는 방법으로는 크게 해석적인 방법과 수치적인 방법이 사용되고 있다. 수치적인 접근방법은 주로 유한차분법에 의한 목적함수 또는 제약조건의 미분이 주로 이용되고 있으며, 해석적인 방법으로는 설계변수가 제약조건수에 비해서 적은 경우에는 직접미분법을, 설계변수가 제약조건수보다 적은 경우에는 수반변수법이 주로 이용되고 있다.

일반적으로 철근콘크리트 구조물의 경우와 같이 목적함수와 제약조건식에 상태변수가 포함되는 경우에 해석적인 방법의 직접 미분법과 수반변수법의

두가지 방법이 모두 비효율적이거나 실행불가능하게 되므로 수치해석적인 방법에 의존하게 된다. 따라서 종래의 민감도 해석은 모든 설계변수에 대한 미분항을 필요로 하기 때문에 비효율적이되거나 반복적인 구조해석 과정을 거치게 된다. 본 연구에서는 첫째로 다단계분할에 의하여 각 단계 설계변수를 줄이므로서 효율을 높히도록 하였으며, 둘째로는 설계단면의 변화가 제약조건에 미치는 변화를 부재력 변화량 추정(force approximation technique)에 의하여 반영하므로써 재해석과정을 줄이고 다단계문제형성의 효율을 높히도록 하였다.

(1) 3단계 문제형성

모멘트재분배율을 설계변수로 취하고 부재의 절점모멘트의 설계 영역을 탄성해석에 의하여 구하고 모멘트의 설계영역에 대한 제약조건을 형성한다. 이 설계영역은 제 1 단계에서 부재력 변화량 추정(force approximation)에 의하여 최적화의 과정에서 수정되어진다.

$$M_f \leq M_j \leq M^U \quad (2)$$

여기서, M_f = 재분배 모멘트의 하한치

M^U = 재분배 모멘트의 상한치

M_j = 재분배 모멘트

(2) 2단계 문제형성

단계 2에서의 최적화 문제는 다음과 같이 형성된다.

$$\text{Minimize } Z = f(Mu_j) \quad (3)$$

$$\text{subject to } Mu_j - M_j \geq 0 \quad (4)$$

여기서, Mu_j = j번째 설계단면의 극한 저항 모멘트. 이때 설계변수 M_j 의 탐사방향은 아래의 단계에서 얻어진다.

$$\frac{dZ}{dM_j} = \frac{\partial Z}{\partial M_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial Z}{\partial D_k} \frac{\partial D_k}{\partial M_j} \quad (5)$$

여기서 $\partial Z / \partial M_j$, $\partial Z / \partial D_k$ 는 목적함수로 부터 구해지며, $\partial D_k / \partial M_j$ 는 유한 차분법에 의하여 구해진다.

$$\frac{\partial D_k}{\partial M_j} = \frac{D_k(M_j + \delta M_j) - D_k(M_j)}{\delta M_j} \quad (6)$$

따라서 본 다단계분할 최적화에서는 변수의 수를 각 단계에서 선택적으로 줄여 취하면서 전체구조에 대한 제약조건식을 전단계의 설계민감도를 반영하여 만족시킬 수 있게된다.

(3) 1단계 문제형성과 부재력 변화량 추정

단계 1에서의 문제는 아래와 같이 형성한다.

$$\text{Minimize } Z = f(M_j, D_k) \quad (7)$$

$$\text{subject to } Mu(D_j, As_j) - M_j \leq 0 \quad (8)$$

$$D_f^L \leq D_j \leq D_f^U \quad (9)$$

$$As_f^L \leq As_j \leq As_f^U \quad j=1, \dots, n \quad (10)$$

이 단계에서는 무제약최소화기법에 의하여 단면을 최적화 한다. 그러나 뼈대구조 등과 같이 단계 1에서의 설계변수의 변화가 단계 3의 모멘트의 설계영역에 영향을 주는 경우, 이러한 다단계분할에 의한 문제형성만으로는 전체 구조의 엄밀한 최적해를 구하기 위하여 다시 추가적인 반복과정을 가져야 한다. 따라서 본 연구에서는 단계 1과 단계 3을 연결할 수 있도록 단계 1에서의 설계변수의 변화에 따른 부재력의 변화를 Taylor 급수전개를 통하여 아래와 같이 근사화시켜 반영하도록 하였다⁽¹⁰⁾.

$$M_j(D_k) = M_j(D_{k0}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_j}{\partial D_k} (D_k - D_{k0}) \quad (11)$$

여기서 D_{k0} 는 설계변수의 초기치이고, 미분항 $\partial M_j / \partial D_k$ 는 전진유한차분법에 의하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial M_j}{\partial D_k} = \frac{M_j(D_k + \delta D_k) - M_j(D_k)}{\delta D_k} \quad (12)$$

이때 δD_k 는 1.0, 0.1, 0.01 등으로 변화시키면서 수렴성을 검토한 결과 그중에서 0.01이 가장 만족스러운 결과를 보여줌을 알 수 있었다.

한편 설계변수가 최적해로 수렴하는 과정에서 급격히 변화하면 수치적으로 구한 설계민감도의 정도가 떨어지므로⁽¹¹⁾ 아래 그림 2와 같이 이동한계(move limit)를 주어 일정범위까지 변수가 변화하면 그 점에서의 필요한 정보를 구하도록 하였다.

$$x^L(r^i) \leq x \leq x^U(r^i) \quad (13)$$

여기서 r^i 는 이동한계매개변수(move limit parameter)이며 반복횟수에 따라 아래와 같이 그 변화

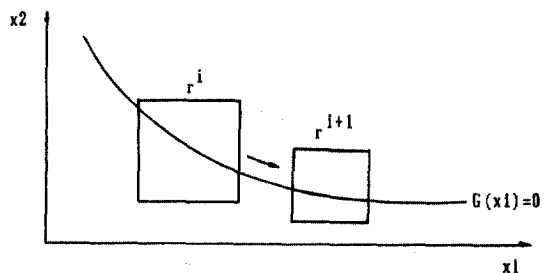


그림 2. 이동한계(move limit)에 의한 탐사영역의 이동

폭을 줄여나가도록 하였다.

$$r^{i+1} = c(r^i) \quad (14)$$

c 는 r 값의 변화를 결정하는 상수로서 0.1-0.3 정도의 값에서 취하도록 하였다.

3. 적용 최적화 알고리즘

본 연구에서는 최적화를 위한 알고리즘으로 무제약최소화기법을 사용하였으며 그 과정을 도시하면 다음 그림 3과 같다. 무제약함수를 만들기 위하여 설계가능 영역(feasible region)내에서 최적해를 찾는 내부 벌칙함수법(interior penalty function method)를 사용하였으며, 이때 벌칙함수(penalty function)를 연장시킨 2차 전개벌칙함수(quadratic extended interior penalty function)을 사용하였다.

무제약 목적함수는 아래의 식 (15)와 같이 표시될 수 있으며, 이 때 벌칙함수(penalty function)는 식 (16)과 같으며 경계점부근에서 ϵ 을 기준으로 식 (17)과 식(18)로 나타낼 수 있다⁽¹²⁾.

$$\phi(X, r_p) = F(X) + r_p P_j(X) \quad (15)$$

$$P_j(X) = \sum \tilde{G}_j(X) \quad (16)$$

$$F(X) = Z(X)$$

$$\tilde{G}_j(X) = \frac{-1}{G_j(X)} \quad \text{if } G_j(X) \leq \epsilon \quad (17)$$

$$\tilde{G}_j(X) = \frac{-1}{\epsilon} \left\{ \left[\frac{G_j(X)}{\epsilon} \right]^2 - 3 \left[\frac{G_j(X)}{\epsilon} \right] + 3 \right\}$$

$$\text{if } G_j(X) > \epsilon \quad (18)$$

여기서 r_p : 감소 매개변수(reduction parameter)

ϵ : (< 0) 내부 벌칙함수(interior penalty)가 외부벌칙함수(exterior penalty)

로 바뀌는 경계점

윗 식에 의하여 벌칙함수(penalty function)는 아래의 그림 4와 같은 형태로 변형되어 전 설계구간에서 2차 미분가능하게 된다.

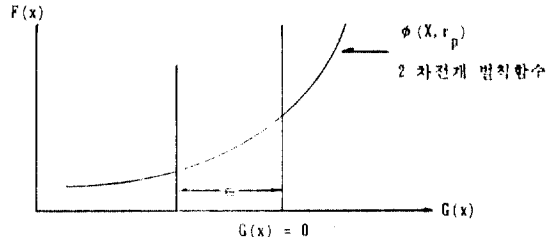


그림 4. 2차전개 벌칙함수

4. 수치예

4.1. 연속보에의 적용

본 연구에서 사용한 알고리즘을 검증하기 위하여 그림 5와 같은 대칭 및 비대칭 2경간 연속보에 대하여 그 적용성을 검토하였다. 먼저 단계 1에서 재하 경우 1, 2, 3에 대하여 모멘트곡선을 중첩하여 포락선을 구하고, 이로부터 모멘트의 설계공간을 구하였고, 단계 2에서는 단면의 설계변수를 최적화하고, 단계 3에서는 모멘트의 재분배율을 최적화하므로써 재하경우의 증가에 따른 제약조건식의 증가를 줄이도록 하였다. 이 때 탄성해석에 의하여 구한 모멘트포락선으로부터 최대모멘트를 취하여, 여기에 모멘트의 재분배율을 적용하도록 규정하고 있는 영국의 CP110의 cl. 3. 2. 2. 3에 의하여 0.7~1.0의 범위에서 취하도록 하였다.

이때 설계단면의 폭 b 는 설계변수로 취하여도 되나, 본 연구에서는 보와 기둥의 폭을 일정하게 하고 거푸집의 폭을 규격화하기 위하여 일정한 값으로 취하였다.

표 1은 대칭 및 비대칭 2경간 철근콘크리트 연속보의 초기치와 최적해를 나타내며 그림 6은 반복 횟수에 따라 최적해가 발산이나 진동하지 않고 효과적으로 최적해에 수렴함을 보여주고 있다. 그

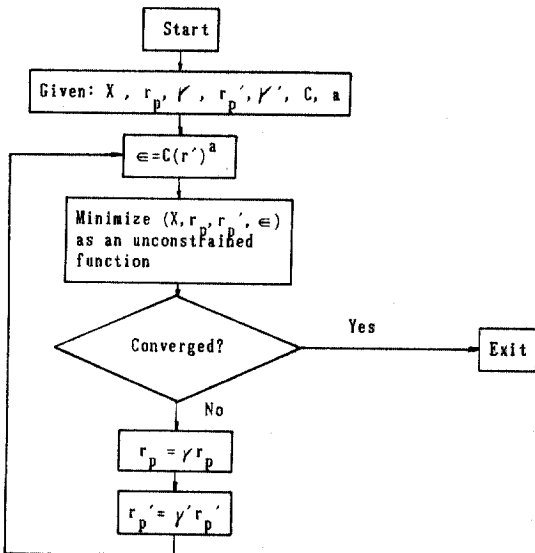


그림 3. 무제약 최소화기법의 흐름도

표 1. 2경간연속 철근콘크리트 보의 최적설계결과

MODEL	구 분	모멘트 재분배율 α	b (cm)	d (cm)	단 면 1		단 면 2		단 면 3		경비(원)
					As (cm ²)	As (cm ²)	As (cm ²)	As (cm ²)	As (cm ²)	As (cm ²)	
지간비 1 : 1	초기치	$\alpha=1.000$	20.0	75.0	30.00	0.0	30.00	0.00	30.00	0.00	264,830
	최적해	$\alpha=0.878$	20.0	70.4	16.90	0.0	21.27	4.34	16.93	0.00	221,800
지간비 1 : 1.25	초기치	$\alpha=1.000$	20.0	85.0	30.00	0.0	30.00	0.00	30.00	0.00	332,593
	최적해	$\alpha=0.878$	20.0	81.2	11.79	0.0	26.39	7.00	26.64	7.25	311,497

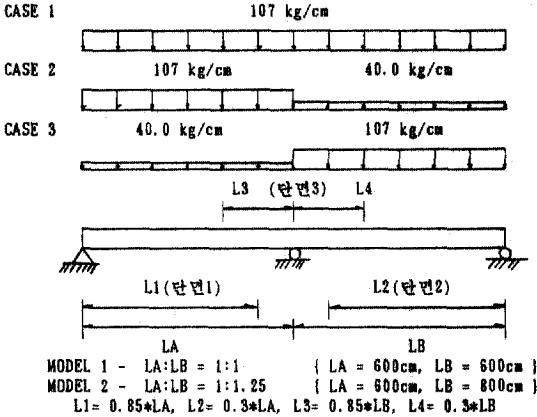


그림 5. 2경간 연속 철근콘크리트 보

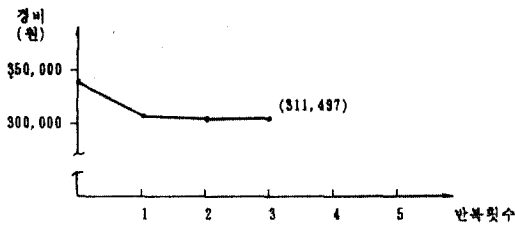


그림 6. 2경간 연속 철근콘크리트 보의 최적해의 수렴과정

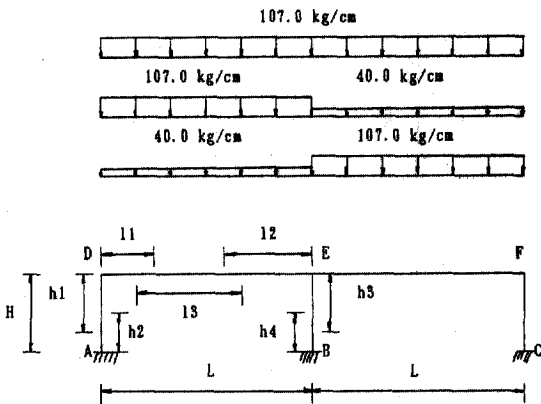


그림 7. 1층 2경간 비대구조의 형상

림 6으로 부터 본 연구의 최적해의 결과는 사용된 알고리즘의 효율성과 타당성을 보여주는 것임을 알 수 있다.

4.2.2 경간 비대구조의 예

(1) 설계조건

본 연구의 알고리즘을 그림 7과 같은 철근콘크리트 2경간 비대구조에 대하여 적용하였다.

본 연구에 사용한 구조모형의 제원 및 각 단면의 주철근의 절곡위치는 표 2와 같으며 그 밖의 상수는 앞의 예제와 동일하다.

(2) 결과분석

본 연구에서 개발된 알고리즘을 적용하여 얻은 결과는 표 3과 같다. 이때 그 수렴과정을 도시하면 그림 8과 같으며 연속보의 경우와 마찬가지로 발산이나 진동없이 빨리 최적해에 수렴함을 알 수 있다.

각 반복시행시 최적해는 주로 이동한계(move limit)에 의해 영향을 받음을 알 수 있었다. 이는 문헌 13의 경우와 비교할 때 초기진동이 감소하여 최적해에 빨리 수렴함을 보여주고 있다. 이 때 문헌 13과 최적해에서 값이 차이가 나는 부분은 문헌 13의 경우 전체 기둥의 단면을 같게 설계를 하였으나 본연구에서는 내측 및 외측 기둥을 각각 최적화하였고, 제약조건에서 부재의 단면력을 구할 때 문헌 13에서는 CP110의 cl. 3.5.5.3에 제한

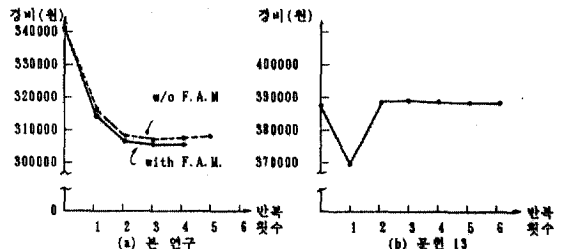


그림 8. 철근콘크리트 비대구조의 최적해 수렴과정

표 2 설계조건(1층 2경간 철근콘크리트 뼈대구조)

B	H	h1	h2	h3	h4	L	l1	l2
20cm	3m	2.3m	1.3m	2.175m	1.425m	6.0m	1.5m	2.85m
l_3	Qk	Gk	Ec	Es	d	σ_{ck}		σ_y
3.45cm	32kg/cm	40kg/cm	$2.17 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$	$2.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$	4.0cm	210kg/cm ²		4200kg/cm ²

표 3 최적해(2경간 철근콘크리트 뼈대구조)

구 분	b(cm)	보 d1(cm)	외측기둥 d2(cm)	내측기둥 d3(cm)	11 단 면		12 단 면		13단면
					As1	As2	As3	As4	
초기치	20	60.0	60.00	60.00	15.00	0.0	15.00	0.0	15.00
최적해	20	66.9	41.48	51.63	3.73	0.0	13.86	0.0	19.17
구 분	13단면	h1단면	h2단면	h3단면	h4단면	α	cost (원)		
	As6	As7	As8	As9	As10				
초기치	0.00	25.00	25.00	25.00	25.00	0.900	340459		
최적해	4.09	15.28	9.90	11.32	11.32	0.877	306412		

된 근사식을 사용하였으며, 본 연구에서는 이론적인 응력분포로부터 구하였기 때문에 사료된다.

부재력 변화량 추정에 의하여 모멘트의 설계공간을 변화시킨 경우와 변화시키지 않은 경우는 그림 8의 (a)에서처럼 부재력 변화량 추정을 한 경우가 보다 최적해에 빨리 수렴함을 알 수 있었다.

5. 결 론

다단계분할에 의해 철근콘크리트 뼈대구조를 효율적으로 최적화 할 수 있는 방법을 도출한 본 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

첫째, 기존의 분할법에 의한 방법들이 각각의 재하경우에 대하여 민감도에 대한 미분항이 증가되어 제약조건수가 과다해지는 점이 있었으나 본 연구에서는 각재하경우에 대한 모멘트의 포락선을 구한 후, 이로부터 설계모멘트의 필요조건을 발생시키므로 제약조건의 증가없이 설계변수를 선택적으로 줄일 수 있음을 알았다.

둘째, 모멘트를 설계변수로 취한 후 모멘트재분배율과 설계모멘트를 최적화하므로써 반복적인 구조해석의 양을 현저히 줄여나갈 수 있다.

셋째, 전 단계의 최적화 정보를 다음 단계에서 이용함으로써 설계민감도가 효율적으로 반영되어 최적해에 빨리 수렴함을 알 수 있었으며, 또한 부

재력 변화량 추정에 의하여 설계영역을 근사화시킴으로써 최적해로의 수렴이 가속됨을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Lev. O. E., *Structural Optimization-Recent Developments and Applications, State-of-the-Art Report, Special ASCE Publication, 1981.*
2. Levy R. and Lev O. V., Recent Developments in Structural Optimization, *Journal of Structural Engineering*, ASCE Vol. 113, No. 9, Sep. 1987, pp.1939-1962.
3. Kirsch, U., Reiss, M., and Shamir, U., "Optimum Design by Partitioning into Substructures," *Journal of the Structural Engineering*, ASCE Vol. 98, No. ST1, Jan. 1972, p. 249.
4. Kirsch, U. and Moses, F., "Formulation of Optimal Design in the Behavior Variables Space," *Journal of Structural Mechanics*, Marcel Decker, Inc., Vol. 4, 1976, . 437-452.
5. Kirsch, U. and Moses, F., "Decomposition in Optimum Structural Design," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 105 No. ST1, 1979, pp. 85-100.
6. Sobieszczanski-Sobieski, J., Barthelemy, J. F., and Riley, K. M., "Sensitivity of Optimum Solutions to Problem Parameters," *AIAA*

- Journal*, Vol. 20, Sept. 1982, P. 1291.
7. Sobieszczanski-Sobieski, J., James, B. B., and A. R., Dovi, "Structural Optimization by Multilevel Decomposition," *AIAA Journal*, Vol. 23, Nov. 1985, pp. 1775-1782.
 8. Kirsch, U., "Multilevel Optimum Design of Reinforced Concrete Structures," *Engineering Optimization*, Vol. 6, 1983, pp. 207-212.
 9. BSI CP110, *Code of Practice for the Structural Use of Concrete*, British Standards Institution, Nov. 1980, pp. 1-154.
 10. Vanderplatts, G. N. and Salajegheh, E., "A New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis," *Proceedings AIAA/ASME/ASCE/AHS 28th Structures, Dynamics and Materials Conference*, Monterey, California, 1987, pp. 314-321.
 11. Ricketts, R. E., and Zienkiewicz, O. C., "Shape Optimization of Continuum Structures," *Proceedings of 2nd international Symposium on Optimum Structural Design*, A Wiley-Interscience publication, 1984, pp. 139-166.
 12. Vanderplatts, G. N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company, 1984, pp. 121-136.
 13. 변근주, 황학주, 박문호, "한계상태설계법에 의한 철근콘크리트 평면 뼈대구조의 최적단면 설계에 관한 연구," *대한토목학회지*, 제29권 3호, 1981년 6월, pp. 131-143.

(接受 : 1989. 2. 10)