

Gauss-Markov 추정기를 이용한 비트 동기화를 위한 파라미터 추정에 관한 연구

(A Study on the Parameter Estimation for the Bit Synchronization Using the Gauss-Markov Estimator)

柳 興 均*, 安 秀 桔**

(Heunggyoon Ryu and Souguil ANN)

要 約

부가성 가우시안 잡음 상황에서, 미지의 확률 분포를 갖는 양극성 2진 불규칙 구형파 신호의 중요한 파라미터인, 진폭과 위상을 Gauss-Markov 추정기를 사용하여 동시에 추정함으로써 전송된 디지털 데이터를 복원하였다. 그러나, Gauss-Markov 추정기가 이용되기 위해서는 승산기와 적분기로 구성된 상관기를 사용하여, 수신 신호를 표본화 급수로 변환하고 관측된 데이터 벡터를 얻기 위한 사전 처리단계가 필요하게 됨을 알게 되었다.

Abstract

The parameters of bipolar random square-wave signal process, amplitude and phase with unknown probability distribution are shown to be simultaneously estimated by using the Gauss-Markov estimator so that transmitted digital data can be recovered under the additive Gaussian noise environment. However, we see that the preprocessing stage using the correlator composed of the multiplier and the running integrator is needed to convert the received process into the sampled sequences and to obtain the observed data vectors, which can be used for Gauss-Markov estimation.

I. 서 론

비트 동기(bit synchronization)는 디지털 통신 시스템에서 매우 중요한 문제이다. 신호의 알파벳은 보통 "1"과 "0"의 2진 부호로 구성되며 수신단에서의 복호화 작업은 전송되어져 온 2진 부호의 판별을 수

행하게 되는데, 이때 대개의 비트 동기화의 기법은 MAP(maximum a posteriori) 판별 기준에 근거하게 된다.^[1~3] 부가성 백색 가우시안 잡음하의 2진 부호 추정에 관한 연구는 이미 여러 연구자들에 의해 수행되었다.^{[1][2][4][5]} 데이터 비트 사이퀀스가 랜덤화되고 사전 정보가 정해지면 MAP 기법은 ML(maximum likelihood)비트 동기화 기법과 동가이며, DTTL(data transition tracking loop),^[6] ELGTL(early-late gate tracking loop)^[7] 등으로 실현된다. 또한 M.Moenec-laey는 미지의 반송파 위상과 타이밍 위상을 갖는 PAM 시스템에서 이들을 추정하는 데에는 데이터 원

*正會員, 忠北大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chungbuk Nat'l Univ.)

**正會員, 서울大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.)

接受日字: 1987年 8月 21日

조 방식(data-aided approach)과 데이터 비원조 방식(non-data-aided approach)이 있으며, 이의 결과는 높은 신호대 잡음비일 때 서로 등가임을 보였다.^[8] 그러나 기존의 연구는 천이 위상에 관계되는 비트 타이밍 파라미터 하나만을 추정하고 신호 복원을 위하여 비트 검출기를 별도로 사용하는 방식이다. 본 연구에서는 가우시안의 확률 분포를 갖는 부가성 잡음 상황에서 데이터 펄스의 진폭과 천이 위상을 동시에 추정, 동기화시켜서 전송신호를 완전 복원하는 문제를, Gauss-Markov 추정기를 이용하여 새롭게 다루었으며, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 이를 확인하였다.

II. Gauss-Markov Estimator

Gauss-Markov estimator는 넓은 의미에서 weighted least square estimator와 등가 개념으로서 다음과 같이 표현할 수 있는데, 이것은 제어공학의 확률제어에서 많이 사용되는 파라미터 추정 개념이다. 선형 가우시안 측정 모델에서 측정치 데이터 벡터 Z와 미지의 추정하려는 벡터 X 사이에 다음 관계가 성립한다.

$$Z = AX + V \quad (1)$$

여기서 A는 측정행렬, V는 정규분포를 갖는 측정 잡음 벡터로서 $N(0, R)$ 이다. 그러므로 측정 잡음은 식(2)의 확률 밀도 함수를 갖는다.

$$f_v(v) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |R|}} e^{-0.5v^T R^{-1}v} \quad (2)$$

그러면 유사도 함수(likelihood function)은 $f_v(v)$ 의 측 이동된 형태로 식(3)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} f_{z/x}(z/X) &= f_v(z - AX) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |R|}} e^{-0.5(z - AX)^T R^{-1}(z - AX)} \end{aligned} \quad (3)$$

$f_{z/x}$ 을 최대화하는 것은 로그 함수를 취한 $\log(f_{z/x})$ 를 최대화하는 것과 같으며 또한 다음 식(4)를 최소화시키는 것과 등가이다.

$$J = 0.5(z - AX)^T R^{-1}(z - AX) \quad (4)$$

최소를 구하기 위하여

$$\frac{\partial J}{\partial X} = A^T R^{-1}(z - AX) = 0 \quad (4)$$

그러므로 찾고자하는 추정 벡터는 식(6)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{X} &= (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} Z \\ &= P_{\hat{x}} A^T R^{-1} Z \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $P_{\hat{x}}$ 는 추정벡터 \hat{X} 의 오차 상호분산(error covariance) 행렬임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

추정오차(estimation error) \tilde{X} 는 다음의 식(7)이다.

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X - \hat{X} \\ &= X - (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} (AX + V) \\ &= -(A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} V \end{aligned} \quad (7)$$

이 추정 오차는 평균이 zero이므로 위 estimator는 "unbiased estimator"임을 알 수 있다.

그러므로 오차의 상호분산(covariance)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E\{(\tilde{X} - E\{\tilde{X}\})(\tilde{X} - E\{\tilde{X}\})^T\} &= E\{\tilde{X}\tilde{X}^T\} \\ &= (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} E\{VV^T\} R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} \\ &= (A^T R^{-1} A)^{-1} \\ &= P_{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $E\{\cdot\}$ 는 기대치를 의미한다.

III. 데이터 처리

$r(t; a, \theta)$ 는 $s(t; a, \theta)$ 와 $n(t)$ 의 합으로 이뤄진 관측 프로세스로서 $s(\cdot)$ 는 랜덤 구형과 2진 신호이며, $n(t)$ 는 신호 $s(\cdot)$ 와 상관성이 없는(uncorrelated) 평균치 zero의 잡음 프로세스이다.

그림 1에서 실선은 잡음이 포함된 실제의 경우이며, 점선은 잡음이 없는 경우로서 진폭 a의 양극성 2진 NRZ(nonreturn-to-zero) 부호화된 신호이다.

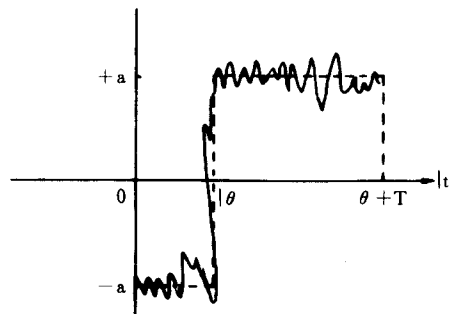


그림 1. 관측 프로세스
Fig. 1. Observed process.

θ 는 추정할 천이 위상이고, T 는 부호의 주기이다. 랜덤 변수의 확률 밀도함수가 알려지지 않았다고 가정되었기 때문에 기존의 ML (maximum likelihood) 기법이나 MAP (maximum a posteriori) 추정 기법은 이 상태에서 이용이 비효율적이다. 그러므로 이 관찰된 프로세스를 새로운 영역 (domain)으로 변환시키는 상관기 (correlator)를 사용하여 제안된 추정기법을 적용한다. 변환을 통하여 2차원의 상태벡터 X 를 얻게 되는데, 이의 성분은 a 와 θ 의 함수이다.

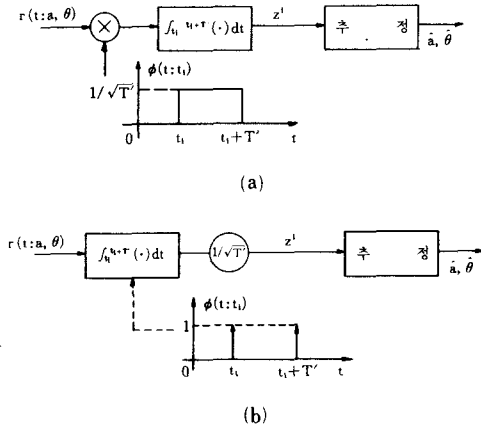


그림 2. 데이터 변환 구성도
 (a) 기본 구성도
 (b) 수정된 구성도
 Fig. 2. Data transformation diagram.
 (a) basic diagram.
 (b) modified diagram.

그림 2에서의 입력은 그림 1의 관측 프로세스이며, 상관기는 승산기와 적분기로 구성된다. 실제 실현을 위한 적분기 구성이 수정 변환도에 있다.

데이터 변환은 관측 프로세스 $r(t)$ 에 단일한 국부 펄스 $\phi(t)$ 를 곱한 뒤, t_1 t_1+T' 의 구간 위로 적분을 취하여 얻어지는데 t_1 는 시간 변동량으로서 국부 펄스가 이것에 일치하며, T' 는 변환을 위한 적분 구간을 나타내는데 대개 $0.4T$ 에서 $1.6T$ 의 범위에서 선택되고, 여기서 T 는 부호의 주기이다. 이때 적분기 출력에는 스칼라 데이터 시퀀스 $\{z\}$ 가 얻어진다.

t_1 에 대한 상관기 출력 $z^{(i)}$ 의 한 예를 보이고 있는 것이 그림 3이다.

기울기가 zero인 응답은 비트 천이 지점에 대하여 아무런 정보를 나타내지 않으므로 기울기 정보를 분석하게 되는데, 이 기울기 정보는 크기는 같지만 방

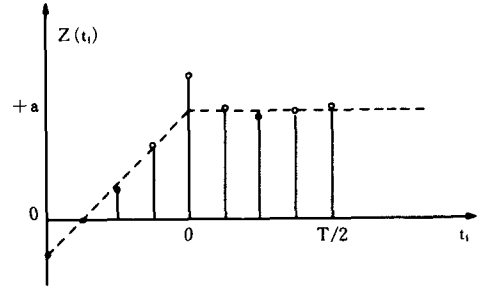


그림 3. 상관기 출력
 Fig. 3. Output of correlator.

향이 다른 2가지로 구성된다. 그림 2와 그림 3에서 다음 식(9)와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} z^{(i)} &= \int_{t_1}^{t_1+T'} \phi(t) r(t; a, \theta) dt \\ &= 1/\sqrt{T'} \int_{t_1}^{t_1+T'} s(t; a, \theta) dt + v^{(i)} \\ &= 1/\sqrt{T'} \int_{t_1}^{t_1+T'} (-a) dt + 1/\sqrt{T'} \int_{t_1}^{t_1+T'} a dt + v^{(i)} \\ &= x^{(1)} + x^{(2)} t_1 + v^{(i)} \end{aligned} \tag{9}$$

여기서

$$x^{(1)} = a/\sqrt{T'} (T' - 2\theta) \tag{10}$$

$$x^{(2)} = 2a/\sqrt{T'} \tag{11}$$

$$v^{(i)} = 1/\sqrt{T'} \int_{t_1}^{t_1+T'} n(t) dt \tag{12}$$

의 관계가 성립한다.

IV. 파라미터 추정

그림 3의 기울기 응답에서 n 개의 데이터를 얻게 되면 식(9)는 다음 식(13)의 행렬 형태로 표현된다.

$$Z = AX + V \tag{13}$$

여기서 Z, X, V, A 는 다음과 같이 정의된 행렬들이다.

$$Z = [z^{(1)} \ z^{(2)} \ \dots \ z^{(m)}]^T \tag{13a}$$

$$X = [x^{(1)} \ x^{(2)}]^T \tag{13b}$$

$$V = [v^{(1)} \ v^{(2)} \ \dots \ v^{(m)}]^T \tag{13c}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \tag{13d}$$

일반적으로 행렬 A 는 $n \times m$ 이나 여기서는 $m=2$ 이다.

식(13)은 선형 관측 모델이므로 II 장의 추정기법을 적용한다. 그러므로 추정된 벡타 \hat{X} 는 다음과 같다.

$$\hat{X} = P_{\hat{x}} A^T R^{-1} Z \tag{14}$$

여기서 $P_{\hat{x}}$ 는 $[A^T R^{-1} A]^{-1}$ 로서 추정 벡타의 오차 상호분산행렬이며, R은 변환된 잡음 벡타 V의 $(n \times n)$ 상호분산행렬이다. 그리고 목적하는 추정치 \hat{a} 와 $\hat{\theta}$ 는 식(10), (11)로부터 다음과 같이 나타난다.

$$\hat{a} = 0.5 \sqrt{T'} \hat{x}^{(1)} \tag{15}$$

$$\hat{\theta} = 0.5 T' - \hat{x}^{(2)} / \hat{x}^{(2)} \tag{16}$$

V. 전산모의 실험과 논의

n이 2가 아닌 경우에는 측정행렬A가 비정방 행렬이 되어 A의 역행렬 구하기가 용이하지 않으며, 많은 계산시간을 소요하게 된다. 비정방 행렬의 역행렬은 의사 역(pseudo-inverse)으로 구해진다.^{[11][12]}

실수 성분으로 구성된 비정방 행렬의 의사 역A*는 다음의 (17), (18)식으로 표현된다.

i) 행이 열보다 큰 경우, 비특이성(nonsingular) A^TA인 조건에서

$$A^* = (A^T A)^{-1} A^T \tag{17}$$

이며,

ii) 반대의 경우, 비특이성 AA^T인 조건에서

$$A^* = A^T (AA^T)^{-1} \tag{18}$$

이다. 그리고 의사 역은 다음의 특성 관계식을 갖는다.

$$AA^*A = A \tag{19}$$

$$A^*AA^* = A^* \tag{20}$$

$$(A^*A)^T = A^*A \tag{21}$$

$$(AA^*)^T = AA^* \tag{22}$$

그림 4, 6은 실신호가 논리 레벨로 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0/인 불규칙 NRZ 이진 신호의 +1, -1 신호 레벨에 대하여 잡음의 평균치는 zero이고 첨두치 간격이 1.0, 2.5이며 균일 발생 분포를 갖는 부가성 잡음에 의하여 교란된 추정기 입력이고, 그림 5, 7은 각각 그림 4, 6의 입력을 Gauss-Markov 추정기로 복원한 부호열로서 적분기 통과 시간과 추정에 소요되는 시간만큼 진상시켜 보인 전산모의 실험 결과이다.

잡음의 평균치가 영이 아닌 경우는 실제 원신호의 위상 정보에 변화가 발생되어, 정의 평균치를 갖는 부가성 잡음이면 논리 1의 시간폭이 증가되고 논리

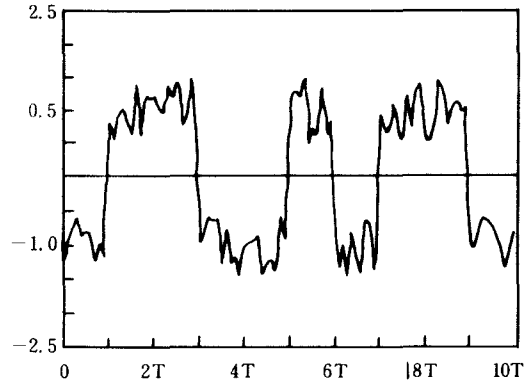


그림 4. 교란된 입력신호(I)
Fig. 4. Disturbed input signal (I).

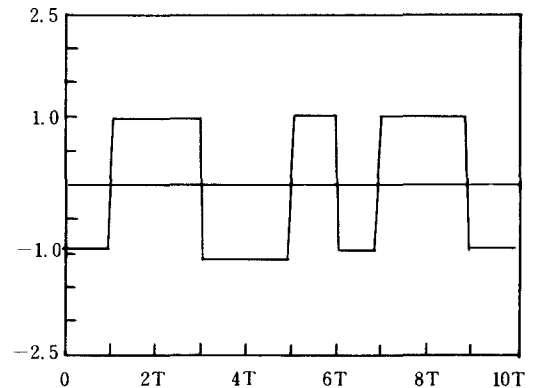


그림 5. 복원된 추정신호(I)
Fig. 5. Recovered estimation signal (I).

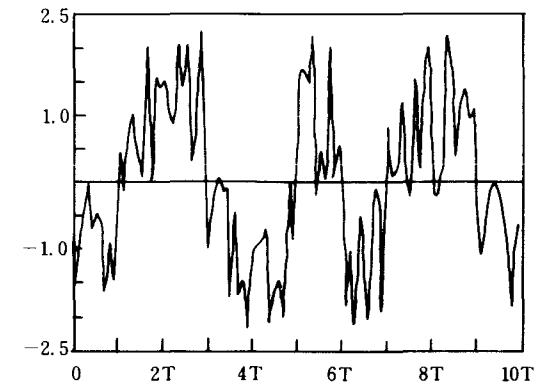


그림 6. 교란된 입력신호(II)
Fig. 6. Disturbed input signal (II).

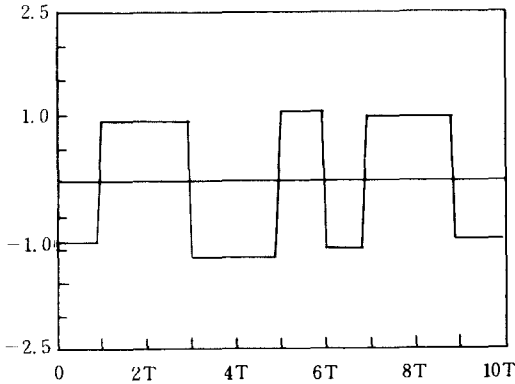


그림 7. 복원된 추정신호(II)
Fig. 7. Recovered estimation signal(II).

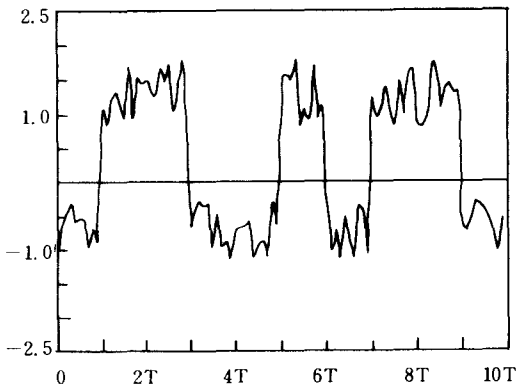


그림 8. 정의 평균치 잡음이 부가된 경우
Fig. 8. Case of additive noise with positive mean.

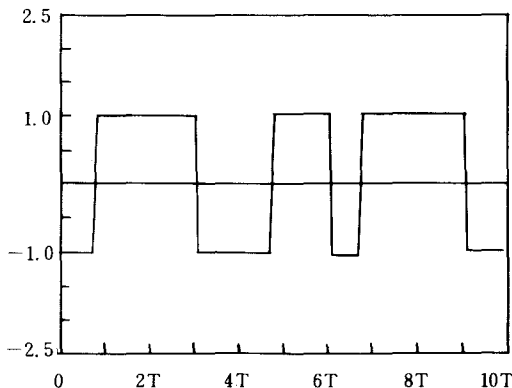


그림 9. 복원된 추정 신호
Fig. 9. Recovered estimation data.

0의 시간폭은 감소된다. 부의 평균치인 경우는 이와 반대이다.

그림 8, 9는 이것을 보여주고 있는 전산 모의 실험 결과이다.

VI. 결 론

미지의 확률분포를 갖는 진폭과 위상의 랜덤구형과 신호를 동기화하기 위한 파라미터 추정을, 상관기를 사용하여 선형 가우시안 측정 모델로 변환시킨 뒤, Gauss-Markov estimator를 이용하여 수행하였다. 대개의 경우 비정방 행렬인 측정 행렬A에 대한 의사 역(pseudo-inverse) 개념을 소개하였으며, 전산 모의 실험을 통하여 추정기법의 타당성을 확인하여 미지의 불규칙 NRZ-부호화 된 신호를 복원하였다. Duobinary 또는 multilevel 부호화된 신호 그리고 부분 응답시스템(partial response system)의 경우는 새로운 추정 기법을 필요로 한다.

차후 연구과제로는 위성 통신 신호방식의 적용을 위한 최소 대역폭, 최대 전력 효율의 경우 주기T를 상정하고, 또한 이것을 실시시스템에 맞게 추정하는 일이며 실험을 통하여 수신기 동기회로 이용의 유용성을 연구하는 일이다.

參 考 文 獻

- [1] L.E. Franks, "Carrier and bit synchronization in data communication-A tutorial review," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 1107-1121, Aug. 1980.
- [2] C.W. Helstrom, *Statistical Theory of Signal Detection*, New York; Pergamon, 1960.
- [3] W.N. Waggener, "A MAP symbol synchronizer implemented with charge-coupled devices," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 1184-1189, Aug. 1980.
- [4] D.D. Falconer and J. Salz, "Optimal reception of digital data over the Gaussian channel with unknown delay and phase jitter," *IEEE Trans. Information Theory*, pp. 117-126, Jan. 1977.
- [5] H.L. Van trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I*, New York; Wiley, 1968.
- [6] M.K. Simon, "Optimization of the performance of a digital data transition tracking loop," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-18, pp. 686-689, Oct. 1970.
- [7] M.K. Simon, "Nonlinear analysis of absolute value type of an early-late gate bit synchronization," *ibid*, pp. 589-59.

[8] M. Moeneclaey, "Synchronization problems in PAM systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 1130-1136, August, 1980.

[9] C.L. Rao, *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd Ed., John Wiley and Sons Inc. 1973.

[10] F.L. Lewis, *Optimal Estimation: with an Introduction to Stochastic Control Theory*, John Wiley and Sons Inc. 1986.

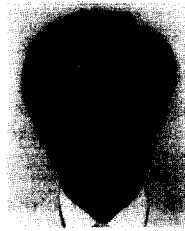
[11] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, Ch.2, M.I.T. Press, 1974.

[12] S. Barnett, *Matrices in Control Theory: with applications to linear programming*, Van Nostrand Reinhold cop. London, 1971. *

著 者 紹 介

安 秀 桔 (正會員)

1950年 5月 서울대학교 통신공학과 학사학위 취득. 1957年 서울대학교 대학원 전자공학과 석사학위 취득. 1973年 서울대학교 대학원 전자공학과 박사학위 취득. 1969年 ~현재 서울대학교 전자공학과 교수. 1980年~현재 IEEE 원로회원 및 한국지회 회장. 1986年~현재 한국음향학회 부회장. 주관심분야는 통신이론, 신호처리, 회로이론, 정보이론, 추정이론 등임.



柳 興 均 (正會員)

1982年 서울대학교 전자공학과 학사학위 취득. 1984年 서울대학교 대학원 전자공학과 석사학위 취득. 1989年 2月 서울대학교 대학원 전자공학과 박사학위 취득. 1988年 2月~현재 충북대학교 전자공학과 전임강사. 주관심분야는 광 및 디지털 통신, 신호처리, 비선형 추정론 등임.