韓國數學教育學會誌(數學教育)
1989. 12. Vol. XXVIII, No. 2.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1989. Vol. XXVIII, No. 2.

수학과 교육과정 개선에 관한 연구*

신 현 성 (강원대학교)

대부분 사람들은 수학에 관련된 행위를 3가지로 분류한다.

첫째는 새로운 정리와 증명을 발견하는 일이고, 둘째는 수학을 과학이나 물리등에 응용하는 일이며, 세째는 수학을 교육시키는 일이다. 수학교육에 관심있는 사람들은 "수학교육을 어디에 중점을 둘것인가?" 에 대답하려 노력한다. 수학을 지도한다는 것은 학생들 한테서 '예' 또는 '아니오'를 얻는것이 아니고 학생들이 어떻게 특정한 과제를 사고했는지 또는 왜 독특한 방법으로 생각했는지를 파악하여 학생들로 하여금 그들 마음에 자기방식의 독특한 수학적인 아이디어를 형성케하고 발전시키도록 도와주는 데 있다.

ICME-5차 대회에서는 수학과 교육과정의 설계과정에서 연구해야 할 과제를 다음과 같이 제시한 바 있다(Adelaide, 1984).

(1) 학생들의 대수적 사고(algebraic thinking)의 발달을 밝히기.

(2) 수학과 교육과정의 모양만들기(reshaping)와 학습경험을 체계화 하기.

(3) 이해의 본질을 밝히기.

(4) 수학교육을 학문으로 정리하기.

본 연구에서는 현행 수학과 교육과정을 개선하는 방법으로 수학을 지도하는 전문가들이 사용할 수 있는 연구방법을 제시한다.

1. 수학과 교육과정의 개선에 고려되는 세가지 요구

1990년대에 수학과 교육과정 연구에서 해야할 과제는 Dessart(1980)가 제시한 다음 3가지 요구를 우리교육과정에 맞게 조정하는 일이다. 즉,

(1) 학생의 심리적인 측면에서의 요구

(2) 사회적인 측면에서의 요구

(3) 수학내용의 구조측면에서의 요구

그러나 실제는 교육과정의 구성에서 3가지를 평등하게 고려할 수는 없고 하나는 강조하고 나머지들은 덜 강조하는 모양이 된다. 학생의 심리적인 측면에서 보면 수학과 교육과정의 내용구성은 행동주의자의 이론, 장이론(field theory), 정보처리과정(information processing)에서 제시하는 이론을 고려해야 한다는 주장이다. 행동주의자이론은 학습할 수학내용을 부분으로 나누어 이들을 알맞게 순서적으로 배열하고 각 부분을 학생들이 마스터하도록 강조한다. 예를들면, 덧셈 알고리즘, 인수분해등이 여기에 속한다. 반면 장이론에서는 학생들의 인지구조를 중요하게 생각한다. 문제해결에서 poly'a의 4단계 접근방법은 학생들이 통찰력(insight)을 얻는데 자주 이용된다. 여기서는 내용을 쪼개서 순서적으로 배열시킬 필요는 없다. 예를들면, 기하문제를 증명하는데 자기의 관점(통찰력)을 정하고 이것에 의해 증명과정을 사고해 내도록하면 된다. 정보처리 과정은 위에서 말한 두 이론과 비교할 수 없고, 여기에서 나온 연구 결과를 학습현장에 직접적으로 사용하는 것은 이른감이 있으나 다음과 같은 3가지 성격을 얻어

* 본 연구는 문교부 I.B.R.D 과학교육계 해외연수 계획으로 연구되었음(1988. 1. 12 ~ 1989. 6)

낼 수 있다.

첫째는 어린이들은 효과적인 문제해결 능력을 가진 사고인으로 보고 있고, 둘째는 과제분석을 강조하며, 세째는 어린이들의 일반적 (general) 인 사고과정보다 국소적 (Lacal) 인 사고과정을 중시한다는 것이다.

이러한 이론들을 바탕으로 생각해낸 수학과 교육과정의 설계방법은 가네식의 행동주의적 접근방법, 피아제를 중심으로한 인지발달론자들의 형식적 접근방법 (formal approach) 등이 개발되어 있다.

사회적 측면에서는 Howson (1989) 이 제기한것 처럼 응용수학을 중심으로한 교육과정을 구성하는 문제가 중요 이슈가 된다. Usiskin (1984) 도 실생활 적응에 알맞도록 대수 교과서를 발간한바 있다. 만일 이들의 의견을 수용한다면 현행 교육과정의 내용선정 및 내용의 배열구성에 큰 변화를 준다. 통계, 확률, 그래프 정리 (graph theory) 등이 크게 강조된다.

수학내용의 구조측면은 수학과 교육과정에서 가장 중시되었던 이슈였다. 우리나라도 새수학 운동의 영향을 받아 수학과 교육과정을 구조라는 관점에서 개정한바 있었다 (1973). 변수개념과 대수적 구조를 강조한 내용이 국민학교에서 부터 강화되었다. 그러나 수학가들이 해낸 내용의 구조화 작업이 곧 학생들의 인지구조를 명확하게 밝히는 것이 아니었기 때문 구조이론은 그 의미가 퇴색되었다. 수학과 교육과정에 구조이론을 잘못 적용한 것에 대한 비판은 Freudenthal (1983) 에 의해 의미있게 제기된바 있다. 그럼에도 불구하고 현재 수학과 내용구성은 구조이론에 바탕을 두고 있고 수학가들도 중등학교에서는 대수적 구조가 특히 강조되야 한다고 보고있다. 수학의 구조측면에서의 교육과정 설계방법으로 새수학 접근방법, 구조적 접근방법 (Structuralist approach) 등이 개발되어 있다.

수학과 교육과정의 개정을 시대적으로 관찰해 보면 각 시대에 알맞게 3가지 요구 중 하나는 강조되고 나머지는 덜 강조된감이 있었다. 생활수학을 강조한 시대에서는 사회적 측면에서의 요구를 교육과정에 강조했고 새수학 운동이 있었던 시기는 교과내용의 구조적 측면을 반영했다.

2. 수학과 교육과정의 설계에서 보여진 연구방법의 문제점

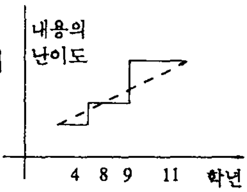
현행수학과 교육과정은 세가지 요구조건에서 내용의 구조적 측면을 강조했고 두 번 개편작업을 거치는 동안 학생들의 심리적 측면을 고려한 면이있다. 앞으로도 구조적 측면을 강조할 것인가? 에 대하여 논의할 필요가 있다.

가능성있는 방향으로는 응용수학을 강조하는 수학과 교육과정이나 현재와 같이 순수수학을 강조하면서 응용을 약간 보완하는 수학과 교육과정을 고려해 볼 수 있다. 혹자는 내용의 구조적 측면만을 고려하는 교육과정을 시안할 필요가 있다고 주장할런지 모르나 본 연구에서 논의되는 주제는 과학고등학교와 같은 특수집단보다 인문계 중·고등학교 학생들을 위한 일반적인 교육과정을 대상으로 하고있다는 점이다. 과학고등학교와 같은 우수집단에 알맞은 교육과정은 통합교육과정 (unified mathematics curriculum) 이 될수 있으나 연구의 목적상 논의의 대상에서 제외한다. 응용수학을 강조한 교육과정은 개편의 범주를 넘어 교육과정의 개혁이 되므로 90년대에서는 작업이 어렵다고 생각된다. 그렇다면, 현행 교육과정을 내용의 구조적 측면에서 접근하되 학생의 심리적 측면을 보완하는 논의가 가능해진다. 왜냐하면 교육과정을 개편할때 들어가는 예산의 규모나 사회적 수용여부에서 제기되는 위험도를 줄이기 위함이다. 현행 수학과 교육과정은 교과의 구조측면과 학생의 인지구조 측면을 잘 조화시켰다고는 볼 수 없다. 일반적으로, 구조측면이 크게 후퇴하고 있는것을 볼수 있다. 예를들면, 전통적으로 공리론적 방법과 연역체계를 중시했던 동구권 국가 (헝가리, 폴란드) 들조차 크게 후퇴했다 (실제로 1987년에 발간된 교육과정 해설서를 보면 공리론적 방법이나 연역체계를 약화시켰고 만인을 위한 수학으로 교육과정을 개정했다). Howson (1987) 이나 Freudenthal (1983) 이 제시한 다음과 같은 질문은 우리나라에서도 의미심장하다.

수학과 교육과정을 수학적인 목적
(구조화) 에도 맞고 학생들의 학습을
촉진시키는데 알맞게 하려면 어떻게
재 조직 할 것인가?

이 질문에 답은 어려우나 학생을 위한 교육과정을 어떻게 구성할 것인가에 관심을 모아야 한다. 현행 교육과정은 수학내용의 논리적 구성을 중점으로 오랫동안 손질해온 것이었기 때문에 학생들의 이해수준과 그들의 수학적 행위(비형식적이든 형식적이든)를 크게 고려한 것은 아니었다. 즉, 학생들의 인지구조를 밝혀서 이들을 반영하는 작업은 소원했다. Kurutetskii 가 제시한 수학적 능력에 관한 테스트 문항이나 Lovell 이 제시한 학생들의 개념 발달단계를 묻는 문항을 통해 우리나라 학생들의 개념의 이해과정을 알아보는 도중 다음 몇 가지가 관찰되었다(이승균(1985), 최규헌(1987), 허필옥(1988), 김용경(1989),김남우(1989)).

첫째는 현행 교육과정의 내용계열 구성에서 학생들의 인지 수준에 비약된 부분이 있다.



(예) 일차변화, 벡터

둘째는 수학의 개념표현에서 학생들의 이해과정을 고려치 못한 부분이 있다.

(예) 변수, 역함수, 분수

세째는 학생들의 이해 수준을 측정하는 측정도구를 개발할 필요가 있다.

네째는 학생들이 보이는 수학적 행위를 잡아낼 연구방법이 개발되어야한다.

위에서 세째, 네째는 연구방법의 탐구가 되겠고 첫째, 둘째는 이 방법들에 의해서 해결되어져야 하는 수학내용의 선정 및 계열에 관련이 있다. 만일 연구방법이 잘 탐구되면 첫째와 둘째가 생기는 원인을 알게되고 이들을 수정하기 위하여 다음과 같은 알맞은 접근방법을 생각해 낼 수 있다.

(1) 비형식적 준비과정 (informal readness - building)을 보조교재를 통해 마련한다. 여기서는 직관과 개념의 비형식적 표현이 강조된다.

(2) 특정한 수학적 개념에 대해서는 점진적 발전단계를 제시한다. (예) 변수

(3) 문제해결기능(skills)에 대한 경험을 제공한다. (예) 패턴인식, 부분목표

본 연구에서는 4가지 모두를 만족시키는 방안을 탐구한다기보다 개념의 이해를 측정할 수 있는 측정도구와 학생들의 수학적 행위를 잡아낼 수 있는 방법을 개발하는데 관점이 모아진다.

3. 수학과 교육과정에서 내용구성의 연구방법

(1) 이해측정을 위한 테스트 문항개발

교육과정의 수학내용을 어떻게 배열하느냐 하는 문제는 다음과 같이 계획하게된다.

첫째는 내용선정을 한후 내용의 논리적 연결성을 우선한다. 예를들면 삼각함수 전에 비와 비례를 놓고, 비를 도입하기전에 나눗셈을 도입한다. 또, 이차함수 전에 일차함수를 일차함수 전에 함수의 일반적인 뜻과 그래프를 도입한다.

둘째는 수학의 개념들간에 순서적으로 배열하는 것이 명확치 않을때는 교사의 경험(테스트 결과도 중시)에 의해 수학내용을 계열화한다. 이 두가지 방법을 사용할때 주의할 점은 학생들의 개념에 대한 이해를 우선으로 참고해야 한다. 수학내용의 계열구성 및 개념표현 정도를 알아보기 위하여 사용되는 이해측정을 위한 테스트 문항이 잘 조직되었다면 이 결과에서 다음 몇 가지 중요한 아이디어를 얻게된다.

(1) 수학내용의 논리적 연결성이 잘되었는지 확인할 수 있다. 수학과 교육과정에 제시된 내용은 교육과정 설계자가 내용의 구조화라는 관점에서 교육과정에 선정된 수학내용을 논리적으로 정돈한 상태이기 때문 학생들의 인지 구조에 알맞게 계열화 되었는지 검토해야한다.

(2) 수학내용의 논리적 배열에 학생들의 이해정도가 크게 어긋날 때 비약(gap)으로 보며 비약된 부분을 어떻게 보완하느냐는 중요한 교재 개발의 연구가 된다.

(3) 수학내용의 논리적 연결이 불투명 할때는 지도 순서를 정하는데 중요한 자료를 제공한다.

(4) 학생들의 개념에 대한 비형식적 표현방법을 교사에게 제공한다.

따라서, 테스트 문항을 만들때는 현행교육과정에 없는 생략된 내용이나 표현방법까지도 고려함이 타당하다. 다음에서는 이해측정을 위한 테스트 문항의 작성 예를 들어본다. 연역적 체계를 강조한 유크리드 기하의 단점을 극복하기 위하여 변환기하학 (transformation Geometry) 을 도입한다. 변환기하학은 덜 공리론적이며 직관적이고, 대수적 구조를 공부할 때 도움이 되기때문에 자주 도입하는 경우가 많다. 변환기하학의 일부내용인 대칭개념을 교육과정의 각 학년에 알맞게 배열하기 위하여 이해측정을 위한 문항을 다음과 같이 구성하고 테스트 결과에 따라 알맞은 내용을 계열화하려한다 (현행 교육과정의 내용배열의 타당성을 검토할 수도 있다). 검사도구의 특징은 어떤 개념의 이해를 알아보기 위하여 한 문제를 묻지않고, 이해수준을 정하고 각 수준에 알맞은 문항을 5 ~ 10 개 설정했다. 같은 수학내용도 여러표현방법으로 제시하였다.

수준 1: 수준 1 에 머므르는 학생들은 오른쪽 표본문항 1.1 ~ 1.3 을 처리하나 기울기를 잘못처리하는 경우이다.

즉, 대칭시에 점과 기울기, 방향과 거리를 거의 정확하게 해결하는 수준이다. 이와 비슷한 문항이 5 개 더 있다.

수준 2: 수준 2 에 머므르는 학생은 오른쪽 그림에서 2.1 ~ 2.3 을 성공적으로 해결하는 수준이다. 이때는 수준 1 에서 해결이 잘 안되었던 기울기를 잘 해결한다. 이와 비슷한 문항이 3 개 더 있다.

수준 3: 수준 3 에 머므르는 학생들은 오른쪽 그림과 같이 표본문항 3.1, 3.2 를 해결하는 수준이다. 이와 비슷한 문항이 4 개 더 있다.

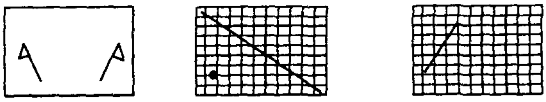
수준 4: 수준 4 에 머므르는 학생들은 오른쪽 그림과 같이 표본문항 4.1 ~ 4.3 을 잘 해결하는 수준이다. 이와 비슷한 문항이 4 개 더 있다.

수준 5: 수준 5 에 머무는 학생들은 변환식을 주었을때 그래프 조작을 통해 대칭변환임을 말할 수 있고, 주어진 방정식을 x 축, y 축, $x = y$ 에 대칭이동한 방정식을 구하는 수준이다. 각 문항의 난이도 별로 나타내어 보면 다음과 같다. 이 단계에서는 기호나 식을 잘 이해하는 수준으로 비슷한 문항이 5 개 더 있다.

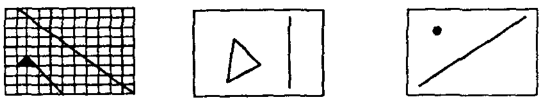
5.1 꼭지점의 좌표가 A(0, 0), B(3, 0), C(4, 2) 인 삼각형 ABC 를 그려라.

이 삼각형을 다음 식에 의하여 Δ A'B'C' 으로 변환할 때 Δ A'B'C' 을 좌표평면에 그려라. 이 변화 $\Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$ 는 어떤 변환인가 ?

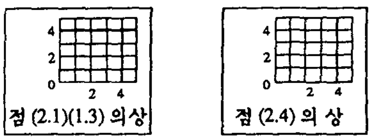
$$x' = y, \quad y' = x$$



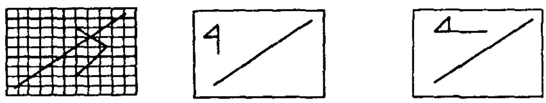
1.3 1.2 1.1



2.3 2.2 2.1



3.2 3.1



4.3 4.2 4.1

5.2 방정식 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 x 축, y 축, $y = x$ 에 대하여 각각 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

5.3 좌표평면위의 직선 $y = 2x - 2$ 는 다음의 일차변환에 의하여 어떤도형으로 이동되는가 ?

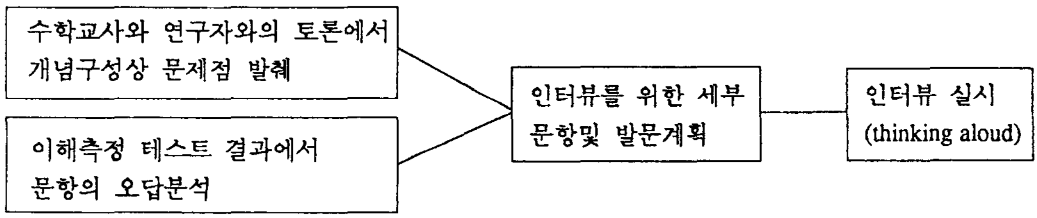
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) 학생들이 보이는 오류와 전략을 통한 내용구성 방법

피아제는 많은 학생들이 일관성있게 보인 오류 (error) 는 그 문제에 접근하는 학생들의 인지구조를 나타내는 것이다라고 말하였다. 수학교사가 가르친것과 학생들이 배운것 사이에는 차이가 있

ㅔ 마련인데, 학생들의 문제풀이 과정을 분석함으로서 그 차가 무엇인지를 알수있고 학생들의 약점을 발견하여 높은 수준의 이해과정으로 들어가도록 도와주고 교육과정에서 비형식적 개념표현법을 찾아낼 수 있다. 이 비형식적 표현법은 교과서나 보조자료를 개발하는데 중요한 자료가 된다. 피아제나 아스벨(Ausbel)이 제시한바 있는 인지구조는 교과구조 측면을 발전시키는데 중요한 변인이 된다. 피아제는 그의 실험(예를들면 직교좌표에서 어린이들이 보이는 인지구조)을 통해서 인간의 인지구조를 밝히려 노력했다. 그러나, 학교에서 교과지도시 이를 폭넓게 활용할 수 있도록 제시하지는 못했다. 결국 학생들이 보이는 오류와 전략은 인지구조를 밝히는 데 큰 역할을 한다. 본 연구에서는 다음과 같은 연구절차를 통해 교육과정의 내용선정과 계열구성에 한 방법을 제시한다.

(1) 1 단계: 학생 개인별 인터뷰 방법을 통하여 개념의 이해 과정에서 생기는 오류를 분석한다. 앞에서는 성취도를 통해 많은 학생들의 개념 이해를 측정하고 이를 통해 내용의 선택 및 계열구성을 한다고 했다. 성취도 검사를 할때 정답과 오답의 종류를 파악하고 오답이 나온 이유를 인터뷰를 통해 파악하므로서 현행 교육과정에 제시된 내용계열이 학생들의 인지구조에 알맞게 구성되었는가를 검토하는 것이다. 이러한 작업을 다음과 같은 순서에 의하여 진행된다.



문자사용에 대한 오류를 인터뷰해보면

T : e+2 에 5을 곱하면 무엇인가?

S : 5× e2

T : 왜 5×e2 라 했는가?

S : 5곱하기 e2 이기 때문이다. 이 뜻은 e더하기 2 에 5를 곱한 것이다.

(2) 2 단계: 실험을 위한 지도모듈(teaching module)을 시안하기 위한 가설을 설정한다. 여기서 제시되는 가설은 인터뷰를 통해 얻은 결과를 분석함으로써 학생들의 이해약점과 비형식적 표현법을 가설형태를 제시하는 단계이다. 예를들면,

학생들은 문자의 번역에 어려움이 있다.

(i) 3x+5y 와 같은 추상적 문제에서 문자를 물건으로 본다. (예) 8xy

(ii) 변수를 수의 범위에서 취급하지 않고 특정한 수로 생각한다.

(3) 3 단계: 실험을 위한 지도모듈을 작성한다.

앞에서 제시한 가설을 중심으로 지도모듈을 작성한다. 가정에서 제시된 오류문형은 규모가 적은 표본을 선정하여 worksheet를 통해 지도하게 된다. 예를들면

일반화 모듈 : 문자사용때 수의 범위를 나타내는 문자를 어떻게 사용하는지 방법을 제시한다. 예를들면, 학생 A는 6을 내가 원하는 어떤 수에 더하려 한다.

$x+6=\square$

$x=4$ $\square$, $x=110$ $\square$, $x=\square\ \square$

결론적으로 본 연구에서 제시한 이해측정 방법, 오류와 전략방법등은 몇 명의 연구자들이 하는것보다 수학교사들이 경험을 바탕으로 이러한 연구를 함이 적절하다. 현행 수학과 교육과정에서 내용선정 및 내용계열 구성을 연구하기 위하여서는 다음 몇 가지를 더 밝혀야 한다. 첫째는 학생들이 수학의 형식적 지도절차를 어렵게 생각하는 이유, 둘째는 학생들이 사용하는 비형식적 방법이 어떻게 형식적 지도절차에 연결되는가, 세째는 학생들의 이해를 통한 인지구조의 파악등이

다. 이러한 노력은 우수아 집단, 평균화된 집단, 학습 속도가 느린 집단에 관련된 교육과정의 연구에 필요한 일이 된다.

참고문헌

1. Dessard. D. J. *Curriculum. Mathematics Education Research Implication for 80*'s, VA : NCTM, 1980
2. Flavell. J. H. "The developmental Psychol ogy of Jean Piaget". New York : Nostrand company, 1962
3. Freudanthal. H. "Didactical Phenomenology of mathematics structures". Reidel. 1983
4. Howson, A. G. "School mathematics in the 1990s". Cambridge : Cambridge University Press, 1988
5. Polya, G. "How to Solve it". New York : Dauble Day, 1945
6. Usiskin, Z. *Algebra through application with Probability and statistics*, VA : NCTM, 1979