

접탄성보로 보강된 평판의 진동해석

Vibration Analysis on plates Stiffened with Viscoelastic Beams

최장우,* 정석주,** 정 강***
 Chang Woo Chol, Suk Choo Chung, Kang Chung

ABSTRACT

This paper treats the vibration analysis of a simply supported rectangular plate stiffened with viscoelastic beams. The effect of viscoelastic beams on the vibration of the plate is analyzed by using Dirac delta function and the equation of motion can be expressed only one equation. The frequency equation is obtained by applying Laplace transformation. The effect of volumes, numbers and aspect ratios of beam on the frequency of the plate is analyzed.

- | | |
|--|--|
| A_j : Cross sectional | J_{b_j} : Torsional constant(mm^4) |
| D : Bending rigidity($\text{kgf}\cdot\text{mm}$) | m : Positive integer |
| $E_{b_j}^*$: Complex Young's modulus
(kgf/mm^2) | t : Time(sec) |
| E_{b_j}, G_{b_j} : Real part of complex moduli(kgf/mm^2) | u : Unit step function |
| G_j : Complex shear modulus(kgf/mm^2) | Y : Complex mode function |
| I_j : Secondary moment of inertia for the beam cross section (mm^4) | r : Aspect ratio of plate |
| I_{p_j} : Secondary polar moment of inertia(mm^4) | r_b : Aspect ratio of beam cross section(Height/Width) |
| | η_{E_j}, η_{G_j} : Loss factor |
| | ρ : Mass per unit volume |

1. 서 론

자동차, 조선 및 우주항공 등의 많은 산업분야에서 설계시 고려되어야 할 인자들은 무수히 많다. 그 중에서도 진동의 영향은 다른 필수적 인자들과 함께 규명되어야 할 중요한 사항으로서 기계 및 구조물 구성요소의 설계

* 정회원 : 홍익대학교 기계공학과
 ** 정회원 : 서울산업대학 기계설계학과
 *** 정회원 : 홍익대학원 기계공학과

에 대한 안전성 여부에 반드시 고려된다. 즉, 이러한 진동은 구조물의 체결상태를 완성이므로써 조기파괴에 이르게 할 수 있고, 또한, 공진현상을 유발시키기도 함으로써 구조물의 안전성에 큰 영향을 끼치게 된다.

따라서, 이러한 진동의 중요성을 고려하여 그동안 구조물 구성요소의 진동에 대한 많은 연구결과가 발표되어 왔다. 그러나, 많은 구조물 구성요소 중에서 진동해석의 어려움이 뒤 따르는 구조물 구성요소가 있는데, 본 연구에서는 이러한 구조물 중, 자동차, 조선및 우주항공 등의 많은 산업분야에서 널리 이용되고 있는 판 구조물 가운데 보로서 보강된 보강판을 모델로 선택하여 진동 해석한다.

보강평판은 평판에 길이방향, 가로방향 또는 격자형의 각종 보강재를 부착시켜 강성을 높인 구조요소이다. 근대산업의 급격한 발전으로 인하여 중량은 감소되는 반면에 강성이 큰 구조물이 요구되는 선박의 deck-plate 나 교량의 상판 및 항공기의 동체등에 사용되는 보강평판은 실질적으로 중요한 구성요소이다. 보강평판은 등방성 압연재료로 제작되지만 그 구조적 특성에 따라 역학적 성질은 방향성을 갖게 된다. 또한 보강재를 부착시키는 방법에 따라 판의 중앙면에 대하여 대칭 또는 비대칭으로 부착된 양면 보강판과 사용상의 제약으로 한쪽면에만 부착한 편면 보강판으로 크게 구별된다. 이러한 보강평판은 그 특성에 의하여 넓은 응용범위를 갖고 있으므로 많은 연구자들에 의하여 현재까지 연구 이용되고 있다.

사각형판의 진동에 관한 연구로는 1936년 Timotika¹⁾가 4변 고정된 직교 이방성판의 자유진동에 관해 series method 를 이용함으로써 연구하였고, 1960년 Lin²⁾은 많은 stringer로 보강된 평판의 자유진동에 관하여 에너지 방법(energy method)를 이용하여 연구하였다. 여기서 Lin은 운

동방정식을 stringer가 붙어있는 보강판요소에 대하여 설정을 하고 경계조건을 대입하여 해석을 하였다. 1968년 S. M. Dickinson³⁾은 4변이 고정된 직교 이방성판에 일정한 면내하중이 작용할때 그 면내하중에 따른 판의 고유진동수 변화와 좌굴하중을 이론적으로 구하였다. 그는 판이 인장력을 받을때에는 진동현상이 파형(sine-wave)과 같은 모양으로 나타남을 보였다. 1972년 Duffield와 Willems⁴⁾는 sinusoidal dynamic force를 받는 단순지지 보강판에 대한 parametric instability에 대해 연구함에 있어 보강재를 discrete 한 요소로 취급함으로써 보강판의 해석에 발전을 가져왔다. Lagrange의 운동 방정식과 에너지 방법(energy method)을 이용하여 parametric resonance를 해석하였다. 1973년 Elishakoff⁵⁾는 문제의 해를 4변 단순지지된 판의 경우에 대한 해와 유사하게 놓고 Levy type으로 된 보조방정식으로부터 미지수를 구함으로써 4변 고정된 직교 이방성판의 고유진동수와 모드형상(mode shape)를 구하였다. 1983년 David Hui와 A. W. Leissa⁶⁾는 면내하중을 받는 단순지지된 판의 고유진동수에 초기결합이 미치는 영향에 대해 연구하였다.

이상의 연구논문들에서는 보강재를 탄성한도 이내에서 해석을 하여 좌굴하중 및 고유진동수와 모드형상을 구하였다. 보강평판에서 보강재를 해석함에 있어 점탄성체로 해석한 논문은 1977년 Saito⁷⁾가 점탄성체로 보강된 판의 진동에 대한 해석을 변환 매트릭스(transfer matrix)방법을 이용하여 해석한 것이 있다. 이상의 연구논문들의 진동해석 방법은 보강재의 갯수가 증가하게 되면 매트릭스 크기가 커진다든지 하여 비교적 복잡한 진동해석을 유발시킨다. 보강재를 점탄성체로 하였을 경우 보강재는 강성효과 뿐만아

니라 점탄성의 영향인 damping 효과의 두 가지 양상을 나타낼 것이다.

본 연구에서는 길이방향 대칭보강된 보강판의 지배방정식이 보강재를 discrete 하게 처리할 수 있는 Dirac delta function을 이용함으로써 유도되었다. 단순지지된 판의 경계조건을 만족하는 해의 함수 형태를

지배방정식에 대입하고 Laplace변환을 하여 진동수방정식을 유도하였다. 특히 보강재의 점성이 진동특성에 미치는 영향을 보강재의 체적과 갯수, 그리고 보강재의 단면형상에 따라 비점탄성보조 보강된 평판의 진동해석결과와 비교하였다.

2. 이 론

2.1 운동 방정식

본 연구에서는 Fig.1과 같이 길이방향으로만 장방형 보강재로 대칭 보강된 보강판의 진동특성에 대해서 연구하였다. 보강평판의 진동특성 해석에 관한 연구는 Energy method나 변환 매트릭스 방법(Transfer matrix method)등을 사용함으로써 해석되어 왔지만, 보강된 보의 갯수가 증가함에 따라서 그것을 해석하는 방법은 점차로 복잡하게 된다.

본 연구에서는 판에 대한 보의 영향을 Dirac delta function을 사용하여 나타내줌으로써 길이방향 대칭 보강평판의 지배방정식을 하나의 식으로 얻을 수 있게 되었다.

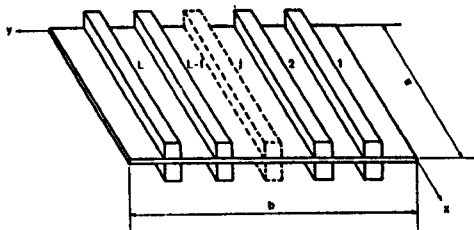


Fig.1 Simply supported rectangular plate stiffened with viscoelastic beams.

보강재의 치수 및 보강간격을 일정하게 두고 보강을 하였으며, 판에 대해서 보의 전단력과 굽힘 모멘트의 불연속성이 나타나고, Fig.2와 같이 j번째 붙어있는 보의 미소요소의 x축에 관한 힘의 평형을 고려해 보면 굽힘모멘트에 관한 다음과 같은 식이 유도된다.

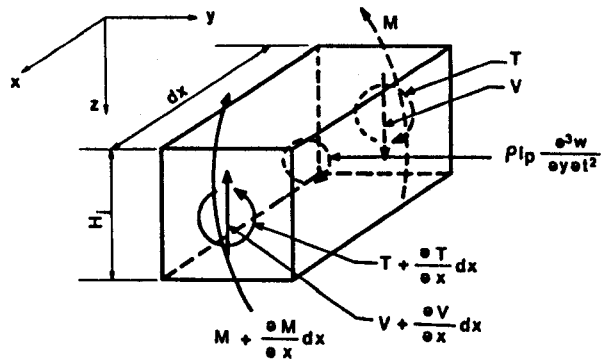


Fig.2 Moment and force components of beam element.

$$-T + T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - \rho_b I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$$T = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$M_j = G_j^* J_{pj} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \rho_{bj} I_{pj} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \dots (1)$$

또한 y축에 관한 굽힘 모멘트의 평형관계를 고려해 보면 전단력에 관한 다음과 같은 식이 유도된다.

$$i) M - (M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) - Vdx - \frac{\partial V}{\partial x} dx \cdot dx$$

$$+ \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx + Vdx - \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} = 0$$

$$ii) -V + V + \frac{\partial V}{\partial x} dx - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx$$

$$F_j = E_{b_j}^* I_j \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_{b_j} A_j \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_{b_j} I_j$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4 \partial t^2} \dots\dots\dots (2)$$

$E_{b_j}^*$ 와 $G_{b_j}^*$ 는 복소계수(complex modulus)로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_{b_j}^* = E_{b_j} (1 + i\eta_{E_j}), \quad G_{b_j}^* = G_{b_j} (1 + i\eta_{G_j})$$

$$\dots\dots\dots (3)$$

판에 대한 전단력에 의한 영향과 굽힘모멘트에 의한 영향은 Dirac delta function을 사용함으로써 표현을 할 수 있고, 두 영향을 판의 운동방정식에 더하여 줌으로써 다음과 같은 지배 운동방정식을 얻게 된다.

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^L \{ \delta(y - c_j) F_j + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\{ \delta(y - c_j) M_j \} \dots\dots\dots (4)$$

여기서, D와 F_j^* 은 강성과 미분연산자를 나타내며 다음과 같다.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad F_j^* = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

2.2 이론해석

단순 지지된 판의 자유진동은 다음과 같은 형태의 해를 가지고 있다.

$$w(x, y, t) = h \sin \frac{m\pi x}{a} Y(y) e^{i\omega t} \dots (5)$$

식(4)에 식(5)을 대입하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$-\Omega^2 [Y + \sum_{j=1}^L \delta(\bar{y} - \bar{c}_j) (\alpha_{1j} + \alpha_{2j}) Y -$$

$$\sum_{j=1}^L \{ \delta(\bar{y} - \bar{c}_j) \alpha_{3j} Y' \}] + [(\beta' Y - \beta_2 Y''$$

$$+ Y''') + \sum_{j=1}^L \delta(\bar{y} - \bar{c}_j) \bar{E}_j^* Y$$

$$- \sum_{j=1}^L \{ \delta(\bar{y} - \bar{c}_j) \bar{G}_j^* Y' \}] = 0 \dots\dots\dots (6)$$

여기서,

$$\Omega = \omega / (D / \rho h b^4)^{\frac{1}{2}},$$

$$\bar{y} = y/b, \quad \bar{c}_j = c_j/b,$$

$$\alpha_{1j} = \rho_{b_j} A_j / \rho b h,$$

$$\alpha_{2j} = (m\pi)^2 \rho_{b_j} I_j / \rho b^3 h,$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (m\pi r)^4, \\ \beta_2 &= 2(m\pi r)^2, \\ r &= b/a, \\ \bar{E}_j^* &= \bar{E}_j(1 + i\eta_{Ej}), \\ \bar{E}_j &= (m\pi r)^4 E_{0j} I_j / Db, \\ \bar{G}_j^* &= \bar{G}_j(1 + i\eta_{Gj}), \\ \bar{G}_j &= (m\pi r)^2 G_j J, \\ j &= 1, 2, 3, \dots, L \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

(6)식에서 ()'는 무차원좌표 y에 대해서 미분한 것을 나타낸다. 경계조건은 y=0, b(즉 $\bar{y}=0, 1$)에서 다음과 같다.

$$Y(0) = Y(1) = Y'(0) = Y'(1) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

(6)식에 Laplace 변환을 하고 경계조건에서 y=0 ($\bar{y}=0$)인 경우를 대입하고 변환된 Y에 대해서 풀어 그 결과를 역변환 하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Y(\bar{y}) &= \sum_{j=1}^L P_j Y(\bar{c}_j) F_0(\bar{y}) u(\bar{y} - c_j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^L R_j Y'(\bar{c}_j) F_1(\bar{y} - \bar{c}_j) u(\bar{y} - \bar{c}_j) \\ &\quad - \beta_2 Y'(0) F_0(\bar{y}) + Y''(0) F_0(\bar{y}) + \\ &\quad Y'(0) F_2(\bar{y}) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} P_j &= \Omega^2 (\alpha_{1j} + \alpha_{2j}) - \bar{E}_j^* \\ R_j &= \Omega^2 \alpha_{3j} - \bar{G}_j^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0(\bar{y}) &= \{(1/\bar{a}) \sinh \bar{a}\bar{y} - (1/b) \sin \bar{b}\bar{y}\} / (\bar{a}^2 + \bar{b}^2) \\ F_i(\bar{y}) &= \frac{d^i F_0(\bar{y})}{d\bar{y}^i}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

이고, 윗 식들에서

$$\begin{aligned} \bar{a}^2 &= \{\beta_2 + (\beta_1^2 + 4\beta_2)^{1/2}\} / 2 \\ \bar{b}^2 &= \{-\beta_2 + (\beta_1^2 + 4\beta_2)^{1/2}\} / 2 \\ \beta_3 &= \Omega^2 - \beta_1 \end{aligned}$$

이다.

(9)식에 경계조건(8)식의 두번째와 네번째식을 대입하면 다음과 같은 식들로 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L P_j Y(\bar{c}_j) F_0(1 - \bar{c}_j) - \sum_{j=1}^L R_j Y'(\bar{c}_j) F_1(1 - \bar{c}_j) - \beta_2 Y'(0) F_0(1) + Y''(0) F_0(1) + \\ Y'(0) F_2(1) = 0 \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L P_j Y(\bar{c}_j) F_2(1 - \bar{c}_j) - \sum_{j=1}^L R_j Y'(\bar{c}_j) F_3(1 - \bar{c}_j) - \beta_2 Y'(0) F_2(1) + Y''(0) F_2(1) + \\ Y'(0) F_4(1) = 0 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

y = \bar{c}_n 를 (9)식에 대입하고 y에 대해서 유도하면 다음과 같은 식들이 구해진다.

$$\begin{aligned} Y(\bar{c}_n) &= \sum_{j=1}^{n-1} P_j Y(\bar{c}_j) F_0(\bar{c}_n - \bar{c}_j) - \sum_{j=1}^{n-1} R_j Y'(\bar{c}_j) \\ &\quad (\bar{c}_j) F_1(\bar{c}_n - \bar{c}_j) - \beta_2 Y'(0) F_0(\bar{c}_n) \\ &\quad + Y''(0) F_0(\bar{c}_n) + Y'(0) F_2(\bar{c}_n) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$Y'(\bar{c}_n) = \sum_{j=1}^{n-1} P_j Y(\bar{c}_j) F_1(\bar{c}_n - \bar{c}_j) - \sum_{j=1}^{n-1} R_j Y'$$

$$(\bar{c}_j)F_2(\bar{c}_n - \bar{c}_j) - \beta_2 Y'(0)F_1(\bar{c}_n) + Y''(0)F_1(\bar{c}_n) + Y'(0)F_3(\bar{c}_n) \dots (13)$$

$$n = 1, 2, \dots, L$$

(10)식 부터 (13)식 까지에서 다음과 같은 진동수 방정식을 얻는다.

$$f(w) = \begin{vmatrix} e^{(1,1)} & e^{(1,2)} & e^{(1,3)} \\ e^{(2,1)} & e^{(2,2)} & e^{(2,3)} \\ e^{(3,1)} & e^{(3,2)} & e^{(3,3)} \end{vmatrix} = 0 \dots (14)$$

여기서

$e^{(1,1)}, e^{(1,2)}, e^{(2,1)}, e^{(2,2)} : L \times L$ 매트릭스

$e^{(1,3)}, e^{(2,3)} : L \times 2$ 매트릭스

$e^{(3,1)}, e^{(3,2)} : 2 \times L$ 매트릭스

$e^{(3,3)} : 2 \times 2$ 매트릭스

이고, 그 성분들은 Appendix에서 보여준다.

3. 수치해석결과 및 고찰

수치계산에 있어서는 보강재의 체적을 일정하게 유지하면서 보강재의 단면형상계수(γ_b : 보강재의 높이(H2)/보강재의 폭(H1))가 1인 경우와 2인 경우, 그리고 보강재의 높이(H2)를 일정하게 유지하면서 보강재의 갯수를 증가시켜 나갈때 점탄성의 영향에 대해서 고찰해 보았다.

Fig.1은 본 연구에서 사용한 시편형상을 보여주고 있으며, Fig.3은 보가 $c_j = b / L + 1$ 의 일정한 간격으로 보강되어 있음을 보여준다. 윗쪽에 붙어 있는 보강재와 아랫쪽

에 붙어있는 보강재가 평판에 주는 영향은 똑같다. 이러한 사실들로 부터 2개의 보에 대한 단면 2차 관성 모우멘트, 극 2차 단면 관성모우멘트, 보의 단면적과 비틀림 상수는 다음과 같다.

$$I_j = 2 \left\{ \frac{H1 \times H2^3}{12} + \frac{H2^2(H2+h)^2}{4} \right\}$$

$$I_{pj} = I_j + \frac{H1 \times H2^3}{6}$$

$$A_j = 2 \times H1 \times H2$$

$$J_p = 2 \times H1^3 \times H2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^3} \frac{H1}{H1+H2} \tanh \left\{ \frac{\pi(H2+H2)}{2 H1} \right\} \right]$$

판과 점탄성보의 물성치(material property)와 기하학적 형상(geometry)은 다음과 같은 경우를 다루었다.

$$h = 1, \quad \nu = 1/3, \quad m = 1, \quad \gamma = 2$$

$$\rho_b = \rho, \quad E_b = E, \quad \eta = 0.2$$

보의 체적과 평판체적의 비율인 \bar{A} 는 다음과 같은 경우에 대해서 계산하였다.

$$\bar{A} = \text{보의 체적} / \text{평판체적} = 0.1 \sim 2.0$$

$$\left(\bar{A} = \sum_{j=1}^L A_j / abh = 2LH^2 / bh \right)$$

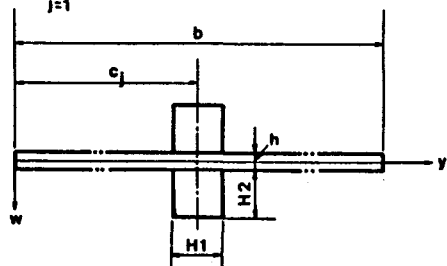


Fig. 3 Viscoelastic beams attached at $y = c_j = jb / (L + 1)$

Fig. 4는 보의 단면형상계수가 1일때, 보의 갯수가 1인 경우 \bar{A} 가 0.5까지 증가할 때 고유진동수도 따라서 증가하지만 \bar{A} 가 그 이상으로 증가하여도 고유진동수는 증가하지 않고 거의 일정한 값을 유지한다. \bar{A} 가 1.0 부근 전까지는 보의 갯수가 2개 일때 가장 높은 값을 보이고 있으며 그 이상에서는 보의 갯수가 3개일 때 가장 큰 값으로 증가하고 있다.

Fig. 5에서는 보의 단면형상계수가 2인 경우 일정 체적하에서 보의 갯수가 증가할 때 \bar{A} 가 0.3 부근까지는 고유진동수가 작은 값으로 증가하지만 \bar{A} 가 0.5를 지나면서 보의 갯수가 1개, 2개, 3개, 일때 큰 값의 차이를 보이고 있다. Fig. 6은 보의 갯수가 1개일때, 보의 단면형상 계수가 1인 형상을 보의 높이(H2)을 일정하게 유지시키면서 보의 갯수를 증가시켜 나갈 때 고유진동수의 변화를 나타내고 있다. 이 경우 보의 단면형상계수를 1로 유지하면서 보의 갯수를 증가시킬 때 보다 훨씬 큰 값으로 증가함을 보이고 있다. Fig. 7은 보의 갯수가 1개 일때, 보의 단면형상 계수가 2인 형상을 보의 높이(H2)를 일정하게 유지시키면서 보의 갯수를 증가시켜 나갈때 고유진동수의 변화를 나타내고 있다. 이 경우 보의 단면형상 계수를 2로 유지하면서 보의 갯수를 증가시킬때 보다 훨씬 큰 값으로 증가함을 보이고 있다.

Fig. 4에서는 점탄성의 영향을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 고유진동수 차이는 \bar{A} 가 0.5까지는 7.0% 내외의 오차를 보이고 있으나 일정 체적하에서 보의 갯수가 증가할 때와 일정한 보의 갯수에서 체적이 증가할 때 그 차이는 점점 줄어든다. Fig 5에서는 보의 단면형상계수가 1인 경우보다 큰 값으로 고유진동수가 증가하고 있는것을 나타내고 있고 점탄성의 영향은 Fig. 4

와 비슷한 양상을 나타내고 있다. Fig. 6과 Fig. 7은 보의 높이(H2)을 일정하게 유지하면서 R의갯수를 증가시켜 보의 강성효과가 커졌기 때문에 점탄성의 영향은 Fig. 4나 Fig 5의 경우보다 낮은 양상을 나타내고 있다.

각 경우에 대한 비교치는 Appendix에서 보여준다. 일정 체적하에서 보의 단면형상계수가 커질 때와 보의 갯수가 고정되어 있을 때 \bar{A} 가 커지면서 점탄성의 영향이 줄어드는 이유는 보의 강성효과가 증대됨에 따라 점탄성의 영향인 damping효과가 줄어드는데 있다.

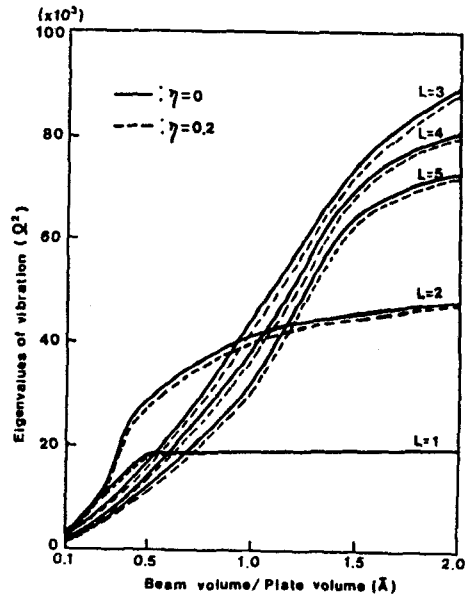


Fig. 4 Eigenvalues of vibration vs. \bar{A} ($\gamma=2, \gamma_b=1$)

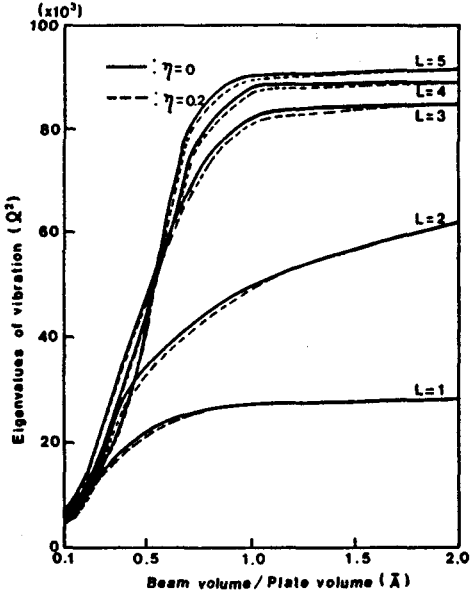


Fig. 5 Eigenvalues of vibration vs. \bar{A} ($r=2, r_b=2$)

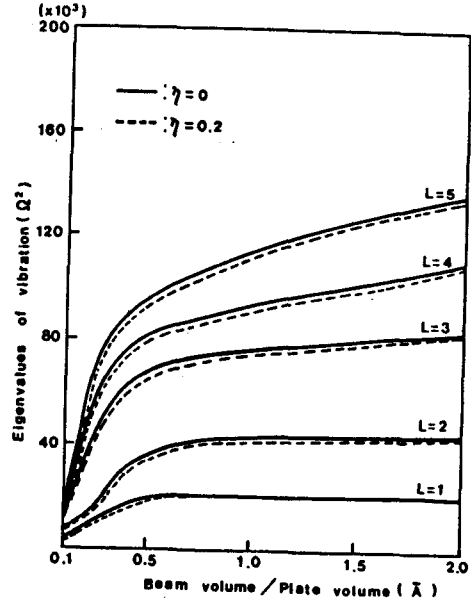


Fig. 6 Eigenvalues of vibration vs. \bar{A} ($H_2 = \text{constant}, A = 0.1; r_b = 1$)

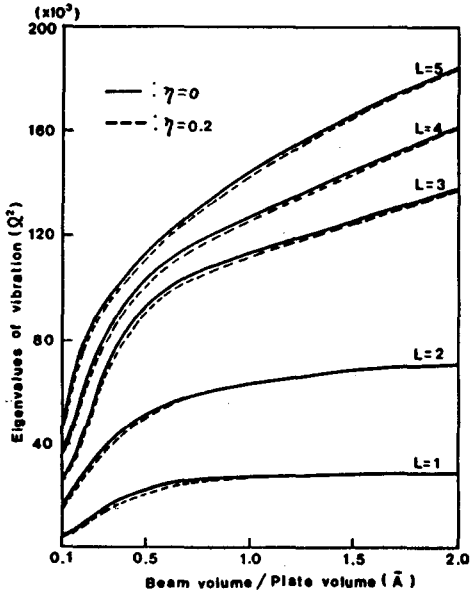


Fig. 7 Eigenvalues of vibration vs. \bar{A} ($H_2 = \text{constant}, A = 0.1; r_b = 2$)

4. 결 론

본 연구에서 길이방향 대칭보강된 보강판의 지배방정식은 보강재를 discrete하게 처리할 수 있는 Dirac delta function을 이용함으로써 유도하였다. 단순 지지된 판의 해의 형태를 지배방정식에 대입하고 Laplace 변환을 하여 진동수 방정식(frequency equation)을 유도하였다. 특히 보강재의 점성이 진동특성에 미치는 영향을 고찰할 수 있는 식을 제시하였다. 이 영향은 보강재의 체적을 일정하게 한 상태에서 보강재의 단면형상과 갯수에 따라 비교함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 보의 단면형상계수($r_b = \text{보의 높이} / \text{보의 폭}$)가 1인 경우, 보강재의 체적을 일정하게 하고 보 강재의 갯수를 변화시킬때의 고유치는 \bar{A} 가 0.1이하에서는 보의 갯수가 2개인 경우 최대를 나타내고 있고, \bar{A} 가 0.1 이상에서

는 보의갯수가 3개인 경우가 최대를 나타내고 있다.

2. 보의 단면형상계수가 2인 경우,보강재의 체적을 일정하게 하고 보의 갯수를 변화시킬때, \bar{A} 가 0.5이상일때의 고유치는 보의 갯수가 늘어남에 따라 증가한다.

3. 일반적인 보강판의 해석에서 보강재의 강성이 증가하면 점탄성효과는 무시하여도 무방함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

1. Tomotika, S., "On the Transverse Vibration of a Square Plate Clamped at four Edges", Philosophical Magazine, Vol. 21, Ser. 7, No. 142, 1936, pp. 745-760.
2. Lin, Y. K., "Free Vibration of Continuous Skin-Stringer Panels", ASME Jour. of Appl. Mech Vol. 27, 1960, pp. 669-676.
3. Dickinson, S. M., "The Flexural Vibration of Rectangular orthotropic Plate", Jour. of Appl Mech., Vol. 36, Trans. ASME, Vol. 91, Series E, 1969, pp. 101-106.
4. Duffield, R. C., & Willems, N., "Parametric Resonance of Stiffened Rectangular Plates", ASME Jour. of Appl. Mech., Vol. 39, 1972, pp. 217-226.
5. Elishakoff, I. B., "Vibration Analysis of Clamped Square Orthotropic Plate", AIAA Jour Vol. 12, No. 7, 1974, pp. 921-924.
6. Divid Hui & Lissa, A. W., "Effect of Geometric Imperfections on Vibrations of Biaxially Compressed Rectangular Flat Plates", Jour. of Appl Mech, Trans. ASME, Vol. 50, 1983, pp. 750-755.
7. Saito, H., & Suzuki, Y., "Vibration of Plate Stiffened With Viscoelastic Materials", Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers (in Japanese), Vol. 43, 1977, pp.114-119
8. Dickinson, S. M., "Bolotin's Method Applied to the Buckling and Lateral Vibration of Stressed Plates", AIAA Jour., Vol 13, No. 1, 1975, pp. 109-110.
9. Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N., Theory of Elasticity, McGraw Hill, New York, 1970, pp.309-313.

Appendix-A

Expression of e

$$e_{kn}^{(1,1)} = \begin{cases} 0 & k < n \\ -1 & k = n \\ P_n F_n(\bar{c}_k - \bar{c}_n) & k > n \end{cases}$$

$$e_{kn}^{(1,2)} = \begin{cases} 0 & k \leq n \\ -R_n F_n(\bar{c}_k - \bar{c}_n) & k > n \end{cases}$$

$$e_{kn}^{(1,3)} = -\beta_1 F_n(\bar{c}_k) + F_n(\bar{c}_k)$$

$$\begin{aligned}
 e_{k_n^{(1,1)}} &= F_n(\bar{c}_k) & e_{2_n^{(3,1)}} &= P_n F_2(1 - \bar{c}_n) \\
 e_{k_n^{(2,1)}} &= \begin{cases} 0 & k \leq n \\ P_n F_1(\bar{c}_k - \bar{c}_n) & k > n \end{cases} & e_{1_n^{(2,2)}} &= -R_n F_1(1 - \bar{c}_n) \\
 e_{k_n^{(2,2)}} &= \begin{cases} 0 & k < n \\ -1 & k = n \\ -R_n F_2(\bar{c}_k - \bar{c}_n) & k > n \end{cases} & e_{2_n^{(3,2)}} &= -R_n F_2(1 - \bar{c}_n) \\
 e_{1_1^{(2,3)}} &= -\beta_2 F_1(\bar{c}_k) + F_2(\bar{c}_k) & e_{1_1^{(3,3)}} &= -\beta_2 F_0(1) + F_2(1) \\
 e_{1_2^{(2,3)}} &= F_1(\bar{c}_k) & e_{1_2^{(3,3)}} &= F_0(1) \\
 e_{1_n^{(2,1)}} &= P_n F_n(1 - \bar{c}_n) & e_{2_1^{(3,3)}} &= -\beta_2 F_2(1) + F_4(1) \\
 & & e_{2_2^{(3,3)}} &= F_2(1)
 \end{aligned}$$

$k, n = 1, 2, 3, \dots, L$

appendix-B

Numerical Results w. r. t \bar{A} and Number of beams(L)

Table. 1 $r_b = 1, r = 2$

\bar{A} \ L	1	2	3	4	5
0.1	$\frac{3914}{3632}$	$\frac{4014}{3695}$	$\frac{3121}{2867}$	$\frac{2952}{2721}$	$\frac{2783}{2560}$
	92.80	92.05	92.15	92.18	92.00
0.5	$\frac{18624}{17320}$	$\frac{28560}{26847}$	$\frac{17556}{16485}$	$\frac{14801}{13898}$	$\frac{12046}{11343}$
	93.00	94.01	93.90	94.00	94.16
1.0	$\frac{19904}{19824}$	$\frac{42191}{40039}$	$\frac{44441}{42219}$	$\frac{27999}{36099}$	$\frac{31557}{29989}$
	99.60	94.90	95.10	95.00	96.25
1.5	$\frac{19963}{19950}$	$\frac{46865}{45740}$	$\frac{74827}{73031}$	$\frac{70012}{68424}$	$\frac{65150}{63676}$
	99.04	97.60	97.60	97.73	97.74
2.0	$\frac{19984}{19980}$	$\frac{49740}{48572}$	$\frac{89303}{87545}$	$\frac{81194}{80197}$	$\frac{72900}{71945}$
	99.08	98.70	98.10	98.78	98.69

$\eta = 0 / \eta = 0.2$
$\frac{\eta = 0.2}{\eta = 0} \times 100 (\%)$

점탄성보호 보강된 평판의 진동해석

Table2. $r_b = 2, r = 2$

\bar{A} \ L	1	2	3	4	5
0.1	$\frac{4450}{4120}$	$\frac{4553}{4221}$	$\frac{4744}{4392}$	$\frac{4854}{4548}$	$\frac{4957}{4659}$
	92.59	92.71	92.60	93.70	94.00
0.5	$\frac{22122}{20895}$	$\frac{34570}{32461}$	$\frac{45690}{44273}$	$\frac{46831}{45801}$	$\frac{44450}{43204}$
	94.50	93.90	96.90	97.80	98.20
1.0	$\frac{27541}{27409}$	$\frac{50076}{48824}$	$\frac{82120}{80888}$	$\frac{87807}{86941}$	$\frac{90005}{89464}$
	99.52	97.50	98.50	99.10	99.40
1.5	$\frac{28101}{28092}$	$\frac{56628}{56514}$	$\frac{84120}{83278}$	$\frac{88570}{88007}$	$\frac{91410}{90952}$
	99.97	99.80	99.00	99.37	99.50
2.0	$\frac{28110}{28107}$	$\frac{61290}{61228}$	$\frac{85111}{84769}$	$\frac{89402}{88954}$	$\frac{91804}{91712}$
	99.99	99.90	99.59	99.50	99.90

Table3. $r = 2, L = 1 : r_b = 1 (H_2 = \text{constant})$

\bar{A} \ L	1	2	3	4	5
0.1	$\frac{3914}{3632}$	$\frac{7991}{7325}$	$\frac{10027}{9285}$	$\frac{11957}{11092}$	$\frac{13881}{12863}$
	92.80	92.60	92.59	92.77	92.67
0.5	$\frac{18624}{17320}$	$\frac{35605}{33577}$	$\frac{64907}{61272}$	$\frac{80020}{75491}$	$\frac{88015}{83027}$
	93.00	93.40	94.40	94.40	94.34
1.0	$\frac{19904}{19824}$	$\frac{42552}{40637}$	$\frac{75060}{72808}$	$\frac{95030}{92464}$	$\frac{115100}{112107}$
	99.50	95.50	97.00	97.30	97.40
1.5	$\frac{19963}{19950}$	$\frac{43430}{42344}$	$\frac{80853}{79316}$	$\frac{103500}{101772}$	$\frac{126150}{124257}$
	99.04	97.50	98.10	98.33	98.50
2.0	$\frac{19984}{19980}$	$\frac{44300}{43590}$	$\frac{85520}{84322}$	$\frac{110250}{108927}$	$\frac{135007}{133656}$
	99.98	98.40	98.60	98.80	99.00

Table4. $r=2$, $L=1 : r_b=2$ ($H_2 = \text{constant}$)

\bar{A} \ L	1	2	3	4	5
0.1	$\frac{4450}{4120}$	$\frac{16604}{15401}$	$\frac{26420}{25564}$	$\frac{37210}{36279}$	$\frac{48210}{46995}$
	92.59	92.76	96.76	97.50	97.48
0.5	$\frac{22112}{20895}$	$\frac{52102}{50999}$	$\frac{93910}{91937}$	$\frac{105400}{103186}$	$\frac{110300}{107984}$
	94.50	97.88	97.90	97.90	97.91
1.0	$\frac{27541}{26962}$	$\frac{63979}{63549}$	$\frac{113120}{111988}$	$\frac{127200}{125800}$	$\frac{145620}{143849}$
	99.52	99.33	98.99	98.90	98.80
1.5	$\frac{28101}{27693}$	$\frac{70110}{69619}$	$\frac{126370}{124987}$	$\frac{146200}{144690}$	$\frac{166210}{164550}$
	99.97	99.30	99.00	98.97	99.01
2.0	$\frac{28110}{28076}$	$\frac{71700}{71556}$	$\frac{138730}{137340}$	$\frac{162190}{160406}$	$\frac{184150}{182124}$
	99.99	99.80	99.01	98.99	99.03