

波浪荷重 算定을 위한 無限要素 Infinite Elements for the Evaluation of Wave Forces

朴佑善*·尹楨邦*·片宗根**

Woo Sun Park*, Chung Bang Yun* and Chong Kun Pyun**

要 旨 : 본 연구에서는 무한요소의 개념을 선형파의 회절 및 방사문제에 적용하는 방법에 대해서 연구하였다. 유체의 동압에 의한 하중은 관성력이 중요하다고 가정하여, 점성효과는 무시하였다. 물체 주변의 내부영역은 통상적인 유한요소를 사용하여 모형화하였으며, 외부영역은 특수한 형상함수를 갖는 무한요소로 모형화하였다. 본 연구에서 개발된 무한요소의 형상함수는, 외부영역의 속도포텐셜을 보다 잘 나타내기 위하여, 외부영역의 해를 해석적 고유함수로 표시하였을 때 나타나는 진행파향과 첫번째 산란파향의 점근적인 형태를 사용하여 결정하였으며, 수치해석상의 효율성을 증가시키기 위하여, 무한요소의 시스템행렬 구성시 나타나게 되는 무한방향으로의 적분을 해석적으로 수행하였다. 본 무한요소의 효율성 및 타당성을 입증하기 위하여, 실제 많이 응용되고 있는 연직 축대칭 구조물을 대상으로 수치해석을 수행하였다. 수치해석결과, 아주 적은 수의 요소로 유체영역을 분할했음에도 불구하고, 적분방정식을 이용한 기존의 여러결과들과 아주 잘 일치함을 알 수 있었다. 또한, 해석의 효율성과 해의 정확도에 직접적으로 영향을 주는 무한요소의 위치와 유한요소의 크기에 대한 기준설정을 위한 수치실험도 수행하였다.

Abstract□ In this paper, the concept of the infinite element is applied to the linear wave diffraction and radiation problems. The hydrodynamic pressure forces are assumed to be inertially dominated, and viscous effects are neglected. The near field region surrounding the solid body is modelled using the conventional finite elements, and the far field region is represented using the infinite elements. In order to represent the scattered wave potentials in the far field region more accurately, the infinite elements are developed using special shape functions derived from the asymptotic expressions for the analytical eigenseries solution of the scattered waves. The system matrices of the infinite elements are constructed by performing the integration in the infinite direction analytically to achieve computational efficiency. Numerical analyses are carried out for vertical axisymmetric bodies to validate the infinite elements developed here. Comparisons with the results by other available numerical solution methods show that the present method using the infinite elements gives fairly good results. Numerical experiments are performed to determine the suitable location of the infinite elements and the appropriate size of the finite elements which directly affect accuracy and efficiency of the solution.

1. 서 론

대형 해양구조물에 작용하는 파랑하중은 주로 선형회절이론(linear diffraction theory)에 의해 산정된다. 일반적으로 이와 같은 경계치 문제를 해결하기 위해 많이 사용되는 기법으로는 적분방정식(integral equation)을 이용하는 방법과 유한요소법(finite element method)을 이용하는 방법을 들 수 있다. 불행히도 통상 많이 사용되고 있는 적분방

정식을 이용하는 방법에는 유일한 해가 존재하지 않는 특이 진동수(critical frequencies)가 존재하고, 날카로운 모서리를 갖는 구조물을 모형화하는데 어려움이 있다는 문제점이 있다. 반면에 유한요소법에 기초를 둔 해석기법은 이와 같은 문제점이 없어 상당히 흥미롭다 하겠다.

선형회절이론에의 유한요소법의 적용기법은 무한원방 경계조건(radiation condition)의 모형화방법에 따라 다음 네 가지로 분리할 수 있다. 첫째로,

*韓國科學技術院 土木工學科(Department of Civil Eng., Korea Advanced Institute of Science and Technology, Chungryang P. O. Box 150, Seoul, Korea)

**明知大學校 土木工學科(Department of Civil Eng., Myong Ji University, Seoul 120-728, Korea)

가장 간단하다고 할 수 있는 방법으로, 물체로부터 유한한 거리에 직접 무한원방 경계조건을 적용하는 방법(Bai, 1972; Huang, 1985), 둘째로, 유체영역을 둘로 분리하여 내부영역은 통상의 유한요소로 모형화하고 외부영역은 해석적 고유함수로 나타내어 두 영역의 정합면에서의 조건을 도입하여 문제를 해결하는 방법(Bai, 1974; Mei, 1978; Taylor, 1981), 셋째로, 두번째 방법의 해석적 고유함수 대신에 외부영역을 Green 함수로 나타내는 방법(Bai, 1974; Zienkiewicz, 1977; Taylor, 1981), 넷째로는 외부영역을 무한요소(infinite element)로 모형화하는 방법(Bettess, 1977)을 들 수 있다. 본 논문에서는 무한요소를 이용하는 방법에 대해서 연구하였다.

Zienkiewicz와 Bettess(1977)가 처음으로 무한요소를 선형회절 문제에 도입하였으나, 이들이 사용한 무한요소는 실제 외부영역 산란파의 거동과는 다른 지수적으로 감소하는 함수를 형상함수(shape function)로 사용함에 따른 문제점을 보완하고 계산상의 효율을 얻기 위해 Newton-Coates 형태의 적분방법을 사용함으로써 인한 수치 적분상의 문제점을 안고 있다(Huang, 1985).

본 논문에서는 실제 외부영역의 산란파 거동을 보다 잘 나타내도록 하기 위하여, 외부영역의 해를 해석적 고유함수로 표시하였을 때 나타나는 진행파와 첫번째 산란파향의 점근적인 형태(asymptotic form)를 사용하여 무한요소의 형상함수를 결정하였다. 또한 무한요소의 시스템행렬 구성시 나타나게 되는 무한방향으로의 적분을 해석적으로 수행하여 수치적분상에서 발생하는 문제점을 제거하였으며, 계산의 효율을 증가시켰다.

본 연구에서 개발한 무한요소의 효율성 및 타당성을 입증하기 위하여, 실제 많이 응용되고 있는 연직축대칭 구조물을 대상으로 수치해석을 수행하였다. 먼저, 해석의 효율성과 해의 정확도에 직접적으로 영향을 주는 무한요소의 위치와 유한요소의 크기에 대한 기준설정을 위한 수치실험을 수행하였으며, 이 해석결과로부터 얻어진 기준을 사용하여 원형 연직기둥, 유동장의 바닥면에 고정된 반구 및 수면에 떠 있는 원통 등에 대해서 수치해석을 수행하였다. 수치해석결과, 아주 적은 수의 요소로 유체영역을 분

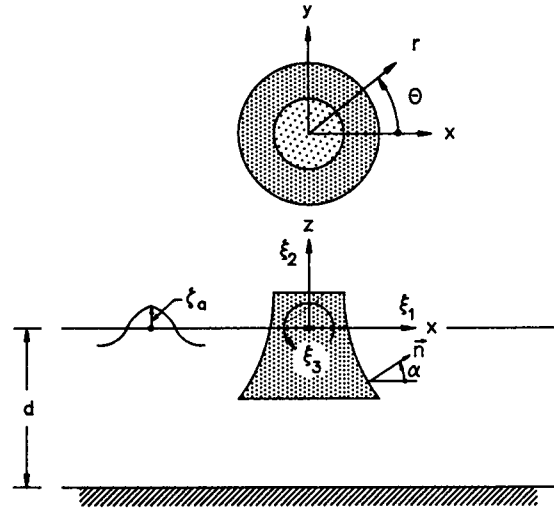


Fig. 1. Definition sketch.

할했음에도 불구하고, 적분방정식을 이용한 기존의 여러결과들과 아주 잘 일치함을 알 수 있었다. 이와 같은 결과로 볼 때, 본 연구에서 개발한 무한요소는 임의의 3차원 구조물의 회절 및 방사문제에도 적용이 가능할 것으로 판단된다.

2. 문제의 정식화

2.1 지배방정식 및 경계조건

파고가 ζ_a 이고 진동수가 ω 인 정현파가 수심 d 에 위치한 연직 축대칭 구조물에 입사할 경우의 문제를 정식화하기 위하여, Fig. 1에 나타난 바와 같이 직교좌표계와 원통형좌표계를 사용하였다. 유체를 비압축성, 비점성임을 가정하고, 비회전류라는 가정을 하게되는 선형파이론을 사용하면, 유동장은 다음과 같이 Laplace 방정식을 만족하는 속도포텐셜, Φ 로 나타낼 수 있게된다.

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, z; t) = 0 \quad (1)$$

또한, 경계조건의 선형화를 위해 입사파고가 충분히 작다는 가정을 하면, 자유수면, 유동장의 바닥면, 물체의 표면에 대한 경계조건은 아래와 같이 나타내진다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \Phi \quad (\text{자유수면: } S_f) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{유동장의 바닥면 : } S_d) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n \quad (\text{물체의 표면 : } S_b) \quad (4)$$

여기서, V_n 은 물체표면에서의 유체영역으로 향하는 수입자의 수직속도 성분을 의미하며, ω 는 입사파의 진동수, g 는 중력가속도를 나타낸다. 속도포텐셜, Φ 는 입사파의 포텐셜, Φ_0 와 산란파 및 구조물의 운동에 의해서 발생하는 방사파에 의한 포텐셜 Φ_s 로 분리하여 나타낼 수 있는데, 여기서, Φ_s 는 반드시 무한원방 경계조건을 만족해야 한다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial r} - ik_0 \Phi_s \right) = 0 \quad (\text{무한원방 : } S_r) \quad (5)$$

여기서 k_0 는 입사파의 파수를 의미하며, i 는 $\sqrt{-1}$ 을 나타낸다.

구조물의 축대칭성을 이용하면, 구조물의 운동은 Fig. 1에 정의된 바와 같이 Surge, Heave 및 Pitch 등 세 방향의 조화운동으로 나타낼 수 있다. 각 방향운동 성분을 하첨자 1, 2, 3으로 표시하였을 때, V_n 은 다음과 같이 나타낼 수 있게 된다.

$$V_n = \sum_{j=1}^3 -i\omega \cdot \xi_j \cdot n_j \cdot \exp(-i\omega t) \quad (6)$$

여기서, ξ_j 는 j -방향운동의 복소진폭을 나타내며, n_j 는 물체표면에서 유체영역으로 향하는 수직벡터의 각 방향 성분과 관련된 값으로, Fig. 1과 같이 수직벡터, \vec{n} 을 정의하면 다음과 같이 표시된다.

$$n_1 = \cos \alpha \cdot \cos \theta \quad (7a)$$

$$n_2 = \sin \alpha \quad (7b)$$

$$n_3 = z \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta \quad (7c)$$

속도포텐셜, Φ 는 아래와 같이 각 성분별 포텐셜의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi = (\phi_0 + \phi_4 + \sum_{j=1}^3 \phi_j \cdot \xi_j) \exp(-i\omega t) \quad (8)$$

여기서, ϕ_0 는 입사파에 의한 성분, ϕ_4 는 회절파에 의한 성분, ϕ_j 는 j -방향운동에 관련된 방사파에 의한 성분을 나타낸다.

선형회절이론에 의하면 식 (1)-(5)에 주어진 경계치 문제는 ϕ_0 와 ϕ_4 가 관련된 회절문제와 ϕ_j ($j=1,$

2, 3)가 관련된 방사문제로 분리할 수 있다. 따라서, 식 (6), (7)을 식 (4)에 대입 후, 회절문제와 방사문제로 분리하면, 물체표면에서의 경계조건은 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = \begin{cases} -i\omega \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta & (j=1) \\ -i\omega \cdot \sin \alpha & (j=2) \\ -i\omega \cdot (z \cdot \cos \alpha - r \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \theta & (j=3) \\ -\frac{\partial \phi_0}{\partial r} \cos \alpha - \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \sin \alpha & (j=4) \end{cases} \quad (9)$$

여기서, 입사파의 포텐셜은 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_0 = -i \frac{g \zeta_a}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_0(z+d)]}{\cosh(k_0 d)} \cdot \exp(ik_0 r \cos \theta) \quad (10)$$

2.2 파랑하중

유체의 동압력, $p(r, \theta, z; t)$ 는 선형화된 Bernoulli 방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p = \text{Re} \left(-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \text{Re} \left\{ i\rho \omega (\phi_0 + \phi_4 + \sum_{j=1}^3 \phi_j \cdot \xi_j) \exp(-i\omega t) \right\} \quad (11)$$

여기서, $\text{Re}(\cdot)$ 는 실수부를 나타낸다. 수평, 수직하중 및 원점에 대한 모멘트 등의 각 방향하중은 압력을 물체표면에 대해서 적분함으로써 구할 수 있다.

$$F_j = - \int_{S_b} p n_j dS_b = \text{Re} \left\{ (F_j^e + \sum_{k=1}^3 F_{jk}^r \xi_k) \exp(-i\omega t) \right\} \quad (j=1, 2, 3) \quad (12)$$

여기서, F_j^e 는 $\phi_0 + \phi_4$ 에 관련된 파랑기진력을 의미하며, F_{jk}^r 는 방사포텐셜, ϕ_k 에 관련된 힘으로 부가질량계수, a_{jk} 와 파랑감쇠계수, b_{jk} 로 나타낼 수 있다.

$$F_j^e = -i\omega \rho \int_{S_b} (\phi_0 + \phi_4) n_j dS_b \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} F_{jk}^r &= -i\omega\rho \int_{S_b} \phi_k n_j dS_b \\ &= -\omega^2 a_{jk} - i\omega \cdot b_{jk} \end{aligned} \quad (13b)$$

여기서, a_{jk} 와 b_{jk} 는 아래와 같이 나타내지며,

$$a_{jk} = -\frac{1}{\omega^2} \operatorname{Re}(F_{jk}^e) \quad (14a)$$

$$b_{jk} = -\frac{1}{\omega} \operatorname{Im}(F_{jk}^e) \quad (14b)$$

$\operatorname{Re}(\cdot)$ 와 $\operatorname{Im}(\cdot)$ 는 각각 실수부와 허수부를 의미한다.

물체의 축대칭성을 이용하여, ϕ_j 를 Fourier 급수로 전개하면 다음과 같이 나타내진다.

$$\phi_j = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_{jl} \cos(l\theta) \quad (j=0, 1, 2, 3, 4) \quad (15)$$

여기서,

$$\phi_{0l} = -i \frac{g \zeta_a}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_o(z+d)]}{\cosh(k_o d)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i J_l(k_o r) \quad (16)$$

여기서, $J_l(\cdot)$ 은 제 1종 l -차 Bessel 함수를 나타내며, $l=0$ 일 때는 $\beta_l=1$, $l \geq 1$ 일 때는 $\beta_l=2i^l$ 이다. 식 (7)과 (15)를 식 (12)에 대입한 후, θ 에 대한 적분을 0에서 2π 까지 수행하면, F_j^e 와 F_{jk}^r 는 더욱 간단한 형태로 정리된다.

$$F_1^e = -i\pi\omega\rho \int_{S_b} r(\phi_{01} + \phi_{11}) \cos\alpha d\bar{S}_b \quad (17a)$$

$$F_2^e = -2i\pi\omega\rho \int_{S_b} r(\phi_{00} + \phi_{10}) \sin\alpha d\bar{S}_b \quad (17b)$$

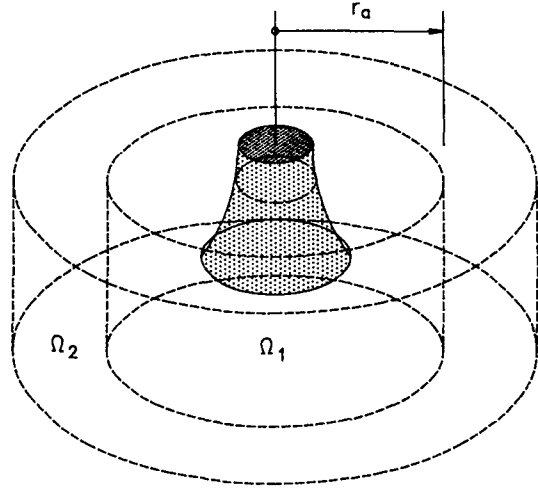
$$F_3^e = -i\pi\omega\rho \int_{S_b} r(\phi_{01} + \phi_{11})(z \cdot \cos\alpha - r \cdot \sin\alpha) d\bar{S}_b \quad (17c)$$

$$F_{1k}^r = -i\pi\omega\rho \int_{S_b} r \cdot \phi_{k1} \cdot \cos\alpha d\bar{S}_b \quad (17d)$$

$$F_{2k}^r = -2i\pi\omega\rho \int_{S_b} r \cdot \phi_{k0} \cdot \sin\alpha d\bar{S}_b \quad (17e)$$

$$F_{3k}^r = -i\pi\omega\rho \int_{S_b} r \cdot \phi_{k1} (z \cdot \cos\alpha - r \cdot \sin\alpha) d\bar{S}_b \quad (17f)$$

식 (17a)-(17f)에 나타난 바와 같이 수직방향의 파력(F_2^e , F_{2k}^r)은 $l=0$ 인 경우만 관련되고, 수평력(F_1^e , F_{1k}^r) 및 모멘트(F_3^e , F_{3k}^r)는 $l=1$ 인 경우



Ω_1 : Finite Element Region
 Ω_2 : Infinite Element Region

Fig. 2. Division of fluid domain.

만 관련된다. 따라서, 물체에 작용하는 파력을 구하기 위해서는 ϕ_{k0} 와 ϕ_{k1} 만 구하면 된다.

3. 유한요소법을 이용한 해의 도출

3.1 범함수

유한요소법을 사용하여 식 (1)-(5)를 만족하는 속도포텐셜을 구하기 위해서, Fig.2와 같이 유체장을 두 영역으로 분리하여, 원점으로부터 r_a 떨어진 원통형 경계면을 갖는 내부영역은 유한요소로, 외부영역은 특수한 형상함수를 갖는 무한요소로 모형화하였다.

변분법을 이용하면, 식 (1)-(5)를 만족하는 속도포텐셜을 이들과 관련된 범함수, $\Pi(\phi_j)$ 를 최소화함으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi(\phi_j) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{S_f} \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} (\phi_j)^2 dS_f \\ &\quad - \int_{S_r} \frac{1}{2} i k_o (\phi_j)^2 dS_r \\ &\quad + \int_{S_b} \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \phi_j dS_b \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, Ω 는 유체영역, S_f 는 자유수면, S_r 은 무한

원방 경계면, S_b 는 물체의 표면을 의미한다. 앞절에서 언급한 바와 같이 ϕ_j 는 Fourier 급수를 사용하여 전개할 수 있다. 식 (15)를 (18)에 대입 후, θ 에 대한 적분을 $(0-2\pi)$ 수행하면, 범함수, $\Pi(\phi_j)$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$\Pi(\phi_j) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i(\phi_{ji}) \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_i(\phi_{ji}) = & \int_{\bar{s}} \frac{1}{2} \left[r \left(\frac{\partial \phi_{ji}}{\partial r} \right)^2 + \frac{l^2}{r} (\phi_{ji})^2 \right. \\ & \left. + r \left(\frac{\partial \phi_{ji}}{\partial z} \right)^2 \right] d\bar{\Omega} \\ & - \int_{\bar{s}_r} \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot r (\phi_{ji})^2 d\bar{S}_r \\ & - \int_{\bar{s}_r} \frac{1}{2} \cdot ik_o r (\phi_{ji})^2 d\bar{S}_r \\ & + \int_{\bar{s}_b} \frac{1}{2} \cdot C_{ji} \cdot r \cdot \phi_{ji} d\bar{S}_b \end{aligned} \quad (19b)$$

여기서, C_{ji} 은 물체표면 경계조건에 관련된 계수로 아래와 같다.

$$C_{1i} = \begin{cases} -i\omega \cdot \cos\alpha & (l=1) \\ 0 & (l \neq 1) \end{cases} \quad (20a)$$

$$C_{2i} = \begin{cases} -i\omega \cdot \sin\alpha & (l=0) \\ 0 & (l \neq 0) \end{cases} \quad (20b)$$

$$C_{3i} = \begin{cases} -i\omega(z \cdot \cos\alpha - r \cdot \sin\alpha) & (l=1) \\ 0 & (l \neq 1) \end{cases} \quad (20c)$$

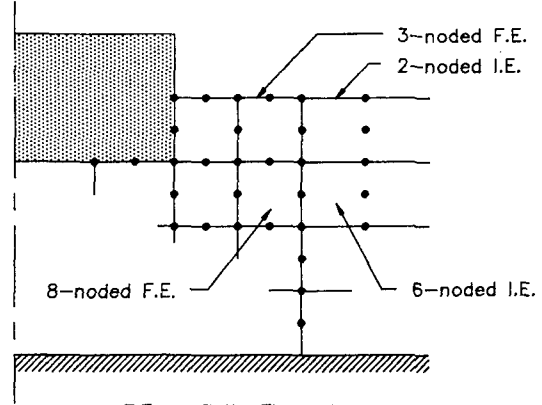
$$C_{4i} = -\frac{\partial \phi_{0i}}{\partial r} \cdot \cos\alpha - \frac{\partial \phi_{0i}}{\partial z} \cdot \sin\alpha \quad (20d)$$

3.2 유체영역의 모형화

유한요소법을 사용하여 유체영역을 분할하기 위해서는 분할된 각 요소내의 포텐셜, ϕ_{ji} 를 각 절점포텐셜, $\{\phi_{ji}^e\}$ 과 형상함수, $\{N^e\}$ 로 나타내어야 한다.

$$\phi_{ji} = \{N^e\}^T \{\phi_{ji}^e\} \quad (21)$$

이 식을 식 (19b)에 대입 후, 절점포텐셜, $\{\phi_{ji}^e\}$ 에 대해서 최소화하면, 다음과 같은 식을 얻게 된다.



F.E. = Finite Element
I.E. = Infinite Element

Fig. 3. Modelling of fluid regions.

$$\frac{\partial \Pi_i(\{\phi_{ji}^e\})}{\partial (\{\phi_{ji}^e\})} = [K_{ji}^e] \{\phi_{ji}^e\} - \{P_{ji}^e\} \quad (22)$$

여기서, $[K_{ji}^e]$ 은 요소의 시스템행렬을, $\{P_{ji}^e\}$ 은 하중벡터를 나타내며, 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} [K_{ji}^e] = & \int_{\bar{\Omega}^e} \left[r \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial r} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial r} \right\}^T + \frac{l^2}{r} \{N^e\} \{N^e\}^T \right. \\ & \left. + r \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\}^T \right] d\bar{\Omega}^e \\ & - \int_{\bar{S}_r^e} \frac{\omega^2}{g} r \{N^e\} \{N^e\}^T d\bar{S}_r^e \\ & - \int_{\bar{S}_r^e} ik_o r \{N^e\} \{N^e\}^T d\bar{S}_r^e \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\{P_{ji}^e\} = - \int_{\bar{S}_b^e} C_{ji} r \{N^e\} d\bar{S}_b^e \quad (23b)$$

모든 요소의 각 시스템행렬과 하중벡터를 조합하면, 다음과 같은 선형 대수방정식을 얻게 되는데,

$$[K_{ji}] \{\phi_{ji}\} = \{P_{ji}\} \quad (24)$$

여기서, $[K_{ji}]$ 은 대칭성을 지닌 띠행렬(banded matrix)로 구성되므로, 컴퓨터의 기억용량에 관련된 문제와 계산상의 효율적인 문제에 있어서 상당히 유리하게 된다.

3.2.1 유한요소영역

내부영역, Ω_1 은 Fig. 3에 보인 바와 같이 자유수면 및 유체영역을 각각 3절점 및 8절점 등매개변수

요소(isoparametric element)를 사용하여 모형화 하였으며, 각 요소의 시스템행렬은 Gauss 적분공식을 사용하여 구성하였다.

3.2.2 무한요소영역

외부영역, Ω_2 는 무한원방 경계조건을 만족하는 특수한 형상함수를 지닌 6절점 무한요소와 2절점 무한요소로 모형화하였다. 본 연구에서 개발된 6절점 및 2절점 무한요소의 형상함수는 외부영역의 해를 고유함수로 나타내었을 때 나타나는 진행파항과 첫 번째 산란파항을 근사화시켜 결정된 것으로 아래와 같이 표시된다.

$$\{N^e\} = \begin{Bmatrix} M_a(\xi) \{\bar{N}(\eta)\} \\ M_b(\xi) \{\bar{N}(\eta)\} \end{Bmatrix} \quad (6\text{절점 무한요소}) \quad (25a)$$

$$\{N^e\} = \begin{Bmatrix} M_a(\xi) \\ M_b(\xi) \end{Bmatrix} \quad (2\text{절점 무한요소}) \quad (25b)$$

여기서, $\{\bar{N}(\eta)\}$ 는 Lagrange 형상함수벡터를 나타내며, $M_a(\xi)$ 와 $M_b(\xi)$ 는 반경방향 포텐셜의 거동을 나타내는 함수로, 진행파를 나타내는 $f_a(\xi)$, 첫 번째 산란파항을 나타내는 $f_b(\xi)$ 의 함수로 표시된다.

$$\begin{Bmatrix} M_a(\xi) \\ M_b(\xi) \end{Bmatrix} = [F]^T \begin{Bmatrix} f_a(\xi) \\ f_b(\xi) \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서,

$$f_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi+r_a}} \exp\{ik_o(\xi+r_a) - \varepsilon\xi\} \quad (27a)$$

$$f_b(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi+r_a}} \exp\{-k_1(\xi+r_a)\} \quad (27b)$$

$$[F] = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_a}} \exp(ik_o r_a) & \frac{1}{\sqrt{r_a}} \exp(-k_1 r_a) \\ \frac{1}{\sqrt{r_b}} \exp(ik_o r_b) & \frac{1}{\sqrt{r_b}} \exp(-k_1 r_b) \end{Bmatrix}^{-1} \quad (27c)$$

여기서, ε 은 해석적으로 무한요소의 시스템행렬을 구성할 때 발생하는 문제를 해결하기 위하여 도입한 것으로(이를 도입하지 않으면 ξ -방향의 적분치가 존재하지 않음), 양(+)의 아주 작은 실수값($\varepsilon \ll k_o$)을 갖게 되며, 무한요소의 시스템행렬에는 나타나지 않게 된다. k_o 와 k_1 은 각각 아래의 분산방정식으로부터 구할 수 있는데,

$$k_o \tanh(k_o d) = \frac{\omega^2}{g} \quad (28a)$$

$$k_1 \tan(k_1 d) = -\frac{\omega^2}{g} \quad (28b)$$

여기서, k_1 은 식 (28b)의 첫 번째 근을 의미한다.

6절점 무한요소의 형상을 Fig. 3에 나타낸 바와 같은 사각형으로 제한시켜, 무한요소의 시스템행렬을 ξ -방향에 대해서는 해석적으로, η -방향에 대해서는 Gauss 적분공식을 사용하여 아래와 같이 구성하였다.

6절점 무한요소

$$\begin{aligned} [K_{ij}^e] &= \int_{\bar{a}^e} [r \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial r} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial r} \right\}^T + \frac{l^2}{r} \{N^e\} \{N^e\}^T \\ &\quad + r \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\}^T] d\bar{\Omega}^e \\ &= \begin{Bmatrix} (\bar{A}_{11} + \bar{B}_{11}) [K_{\eta}] & (\bar{A}_{12} + \bar{B}_{12}) [K_{\eta}] \\ (\bar{A}_{12} + \bar{B}_{12}) [K_{\eta}] & (\bar{A}_{22} + \bar{B}_{22}) [K_{\eta}] \end{Bmatrix} \\ &\quad + \begin{Bmatrix} \bar{C}_{11} [K_{\eta}] & \bar{C}_{12} [K_{\eta}] \\ \bar{C}_{12} [K_{\eta}] & \bar{C}_{22} [K_{\eta}] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (29a)$$

2절점 무한요소

$$\begin{aligned} [K_{ij}^e] &= - \int_{\bar{s}^e} \frac{\omega^2}{g} \{N^e\} \{N^e\}^T d\bar{S}^e \\ &= - \frac{\omega^2}{g} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (29b)$$

여기서, \bar{A}_{ij} , \bar{B}_{ij} 와 \bar{C}_{ij} 는 ξ -방향적분과 관련된 복소계수이고(부록참조), $[K_{\eta}]$ 와 $[K_{\eta}]$ 은 η -방향의 적분과 관련된 3×3 행렬로 다음과 같다.

$$[K_{\eta}] = \int_{z^e} \{\bar{N}^e\} \{\bar{N}^e\} dz^e \quad (30a)$$

$$[K_{\eta}] = \int_{z^e} \left\{ \frac{\partial \bar{N}^e}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{N}^e}{\partial z} \right\} dz^e \quad (30b)$$

4. 수치해석 및 결과분석

본 연구에서 개발된 무한요소를 이용한 파랑하중 산정기법의 타당성 및 효율성을 입증하기 위하여 여러종류의 예제해석을 수행하였다. 먼저, 수치해석의 효율성 및 해석결과에의 정확도에 직접적으로 영향을

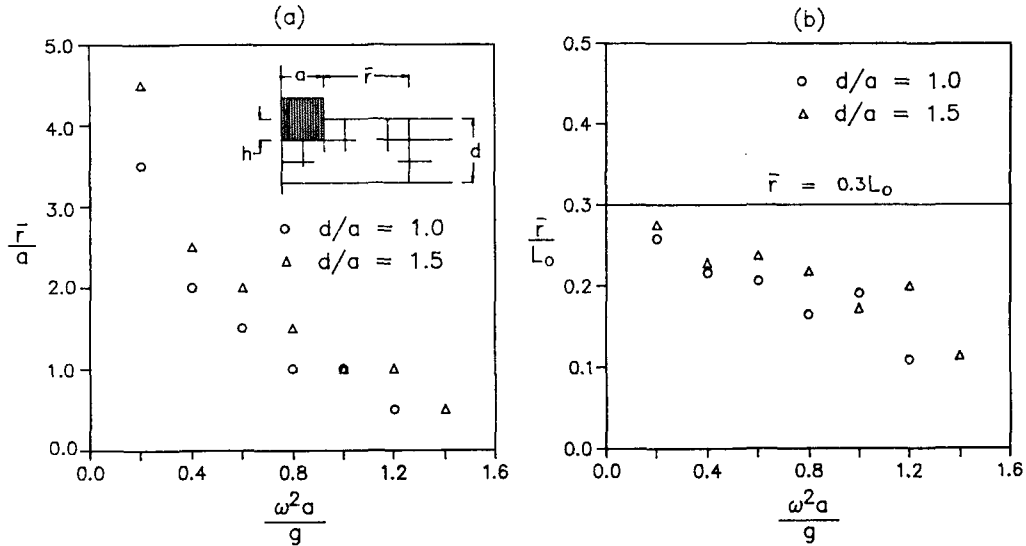


Fig. 4. Locations of infinite elements within 1.0% relative errors for floating cylinders with $a/h = 2.0$, $d/a = 1.0, 1.5$.

주는 무한요소의 위치 및 유한요소의 크기 결정에 대한 기준설정을 위한 수치실험을 수행하였으며, 이 해석결과로부터 얻어진 기준을 사용하여 여러종류의 구조물에 대해서 예제해석을 수행하였다.

4.1 무한요소의 위치

타당하고도 효율적으로 해석결과를 얻을 수 있는 적절한 무한요소의 위치를 결정하기 위하여, 반경 (a)대 흘수심(h)의 비가 2.0이고, 수심(d)대 직경의 비가 1.0, 1.5인 두 종류의 부유원통을 수치실험 대상구조물로 선택하였다. 유한요소의 크기는 흘수심과 같도록 고정시키고, 무한요소의 위치를 원통의 표면으로부터 흘수심의 1-10배까지 변화시켜가며 해석한 결과를 Fig.4에 나타내었다. 이 그림은 무한요소를 흘수심의 10배에 위치시켰을 때의 결과에 대한 각 위치에서의 결과의 상대오차가 1% 이내인 무한요소의 위치를 물체의 반경 및 입사파장의 비로 나타낸 것이다. 물체의 반경에 대한 비로 나타낸 (a)는 무차원 진동수($\omega^2 a/g$)가 높은 영역에서는 무한요소를 물체에 가깝게 위치시켜도 좋은 결과를 얻을 수 있지만, 입사파장이 긴 낮은 진동수영역에서는 상당히 멀리 위치시켜야 만족할만한 결과를 기대할 수 있음을 나타내고 있고, 입사파장의 비로 나타낸 (b)는 무한요소의 위치를 입사파장의 0.3배 정도에 위치시키면 타당한 결과를 얻을 수 있음을

나타내고 있다.

4.2 유한요소의 크기

수평 및 수직 2차원 문제에서 유한요소의 크기는 입사파장의 1/4 보다 작아야 한다는 연구결과가 Smith(1974), Huang(1985)에 위해서 보고된 바 있다. 본 연구에서는 이에 대한 기준을 마련하기 위하여, 무한요소의 위치 선정을 위해 사용한 부유원통에 대해서 수치실험을 수행하였다. 무한요소의 위치를 원통표면으로부터 입사파장(L_0)의 0.3배에 고정시키고, 유한요소의 수평방향 크기는 원통의 표면으로부터 무한요소까지 거리의 1등분에서 6등분까지 변화시켜 가며 해석을 수행하였다. 그 결과, 높은 진동수영역에서는 입사파장의 1/4 보다 작아야 한다는 Smith(1974) 및 Huang(1985) 등의 결과와 같은 결론을 얻었으나, 입사파장이 상당히 큰 낮은 진동수에서는 좀 더 작게 결정해야 함을 알 수 있었다.

4.3 예제해석

본 연구에서 개발된 무한요소를 사용한 유한요소 프로그램을 이용하여, 해석적 해가 존재하는 원형 연직기둥, 해저에 고정된 반구 및 수면에 떠 있는 원통에 대해서 해석을 수행하여 타 문헌의 결과와 비교하였다. 모든 예제해석의 결과는 무한요소를 물

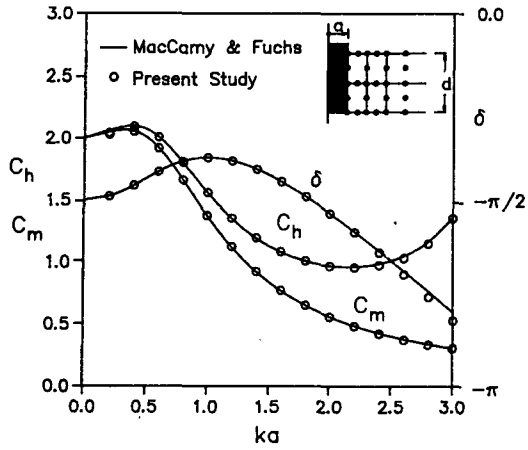


Fig. 5. Variations of C_h , C_m and δ with ka for a circular cylinder with $d/a = 3.0$.

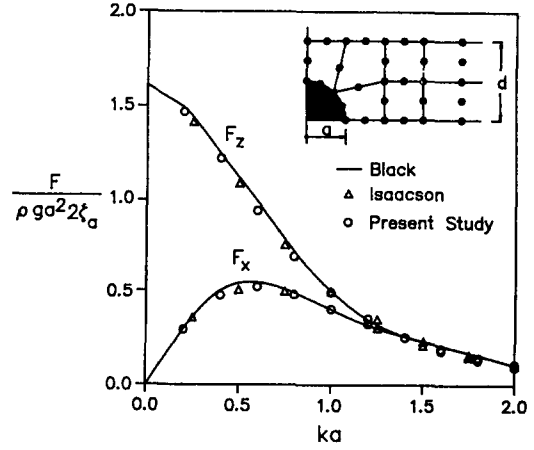
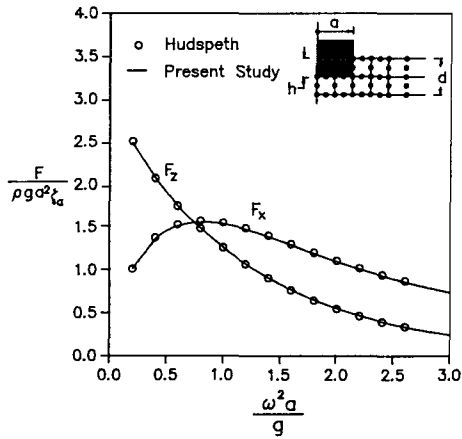
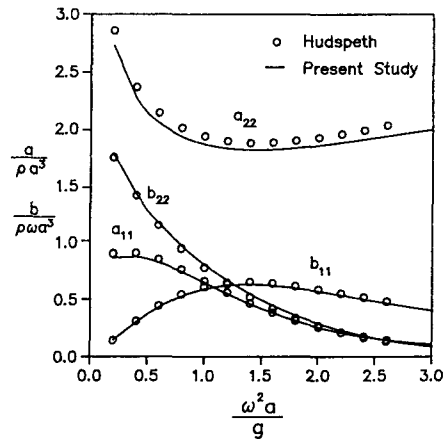


Fig. 6. Horizontal and vertical force coefficients for a hemisphere on seabed with $d/a = 2$.



(a) Force



(b) Added Mass and Damping

Fig. 7. Force, added mass and damping coefficients for a floating circular cylinder with $a/h = 2.0$, $d/a = 1.0$.

체의 우측면으로 입사파의 0.3배에 고정시켜 구한 것이다.

Fig. 5는 원형 연직기둥에 대한 MacCamy와 Fuchs(1954)의 해석적 해와 본 방법에 의한 결과를 비교한 것이다. 그림에 보인 바와 같이, 내부영역은 유한요소 4개로 모형화하였으며, 외부영역은 2개의 무한요소로 분할하였다. 그림에서 C_h 는 실제 파력을 입사파만에 의한 파력을 의미하는 Froude-Krylov 력으로 나눈 회절계수(diffraction coefficient)를 나타내며, C_m 은 유효관성계수(effective inertia coefficient)를, δ 는 위상차(phase lag)를 나타낸다(Sarpkaya, 1981).

Fig. 6은 수심(d)대 반경(a)의 비가 2.0인 바닥에 위치한 반구에 작용하는 수평 및 수직방향 파력을 나타낸 것으로, 축대칭 Green's 함수를 이용하여 구한 Black(1971) 및 Isaacson(1982)의 결과와 비교하였다.

Fig. 7은 반경(a)대 흘수심(h)의 비가 2.0이고, 수심(d)대 반경의 비가 1.0인 수면에 떠 있는 원통의 회절 및 방사문제에 대한 해석결과를 나타낸 것이다. 비교결과는 Hudspeth 등(1980)이 축대칭 Green's 함수를 이용하여 개발한 알고리즘을 사용하여 본 연구에서 구한 것이다.

이 외에 Hogben과 Standing(1975)이 실험을

한 수중에 위치한 원형기둥, 수면에 떠 있는 구, 원뿔형 구조물 등에 대해서도 해석을 수행하여 타문헌의 결과와 비교해 본 결과, Fig. 5-7에 보인 바와 같은 정도의 결과를 얻을 수 있었다.

이상의 예제 해석결과는 본 연구에서 개발한 무한요소를 이용하는 방법의 타당성을 나타내고 있다고 할 수 있으며, 특히, 유한요소 영역을 아주 성글게 모형화해서 얻은 결과임을 생각해 볼 때, 본 방법의 효율성을 짐작할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 통상적인 유한요소기법을 이용하여, 파랑하중을 보다 효율적으로 산정할 수 있는 무한요소 개발에 대해서 연구하였다. 본 연구에서 개발한 무한요소의 형상함수는 외부영역의 산란파 거동을 보다 잘 나타낼 수 있도록 하기 위하여, 외부영역의 포텐셜을 해석적 고유함수로 표시하였을 때 나타나게 되는 진행파향과 첫번째 산란파향의 점근적 형태를 사용하여 결정하였다. 또한 무한요소의 강성행렬 구성시 나타나게 되는 무한방향의 적분을 해석적으로 수행하여 수치 적분상에서 발생할 수 있는 오차를 제거하였으며, 계산의 효율을 높였다.

수치해석의 효율성 및 해의 정확도에 직접적으로 영향을 미치는 무한요소의 위치 및 유한요소의 크기 결정에 대한 수치실험결과, 무한요소를 물체의 표면으로부터 입사파장의 0.3배 정도에 위치시키면 만족할만한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었고, 유한요소의 크기는 입사파장의 1/4 보다 작게 하되 파장이 상당히 큰 낮은 진동수영역에서는 이 보다 더욱 작게 결정해야함을 알 수 있었다. 이 기준을 사용하여 예제 해석한 결과를 기존의 적분방정식을 이용하여 구한 타 문헌의 결과와 비교해 본 결과, 본 연구에서 개발한 무한요소를 이용한 방법은 상당히 적은 수의 요소를 사용하여도 아주 만족할만한 결과를 얻을 수 있었다. 따라서, 본 연구에서 개발한 무한요소는 임의 형상을 갖는 구조물의 회절 및 방사문제에도 효율적으로 적용이 가능할 것으로 판단된다.

참고문헌

Bai, K.J., 1972. A variational method in potential flows

with a free surface, University of California at Berkeley, College of Engineering, Report No. NA72-2.

Bai, K.J. and Yeung, R.W., 1974. Numerical solution to free-surface flow problems, The 10th Symposium on Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research, Cambridge, Massachusetts: 609-647.

Bettess, P. and Zienkiwicz, O.C., 1977. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11: 1271-1290.

Black, J.L., Mei, C.C. and Bray, M.C.G., 1971. Radiation and scattering of water waves by rigid bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 46: 151-164.

Hogben, N. and Standing, R.G., 1975. Experience in computing wave loads on large bodies, *Proceedings of the Seventh Offshore Technology Conference*, OTC 2189: 413-431.

Huang, M.C., Leonard, J.W. and Hudspeth, R.T., 1985. Wave interference effects by finite element method, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division*, ASCE, Vol. 111, No. 1: 1-17.

Huang, M.C., Hudspeth, R.T. and Leonard, J.W., 1985. FEM solution 3-D wave interference problems, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division*, ASCE, Vol. 111, No. 4: 661-677.

Hudspeth, R.T., Nakamura, T. and Leonard, J.W., 1980. Floating vessel response simulator (FVRS) by an axisymmetric Green's function, Marathon Oil Company, 1980.

Isaacson, M., 1982. Fixed and floating axisymmetric structures in waves, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division*, ASCE, Vol. 108, No. WW2: 181-199.

MacCamy, R.C. and Fuchs, R.A., 1954. Wave forces on piles: A diffraction theory, U.S. Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board Technical Memo, No. 69.

Mei, C.C., 1978. Numerical methods in water-wave diffraction and radiation, *Annual Review Fluid Mechanics*, Vol. 10: 393-416.

Sarpkaya, T. and Isaacson, M., 1981. Mechanics of wave forces on offshore structures, Van Nostrand Reinhold Company.

Smith, D.A., 1974. Finite element analysis of the forced oscillation of ship hull forms, Master Thesis in Naval Postgraduate School at Monterey, California.

Taylor, R.E. and Zietsman, J., 1981. A comparison of localized finite element formulations for two-dimensional wave diffraction and radiation problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17: 1355-1384.

Yue, D.K.P., Chen, H.S. and Mei, C.C., 1978. A hybrid element method for diffraction of water waves by three-dimensional bodies, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12: 245-266.

Zienkiwicz, O.C., Kelly, D.W. and Bettess, P., 1977. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11: 355-375.

부록 : \bar{A}_{ij} , \bar{B}_{ij} 와 \bar{C}_{ij} 의 결정

무한요소의 시스템행렬에 나타난 계수 \bar{A}_{ij} , \bar{B}_{ij} 와 \bar{C}_{ij} 는 다음과 같이 행렬형태로 나타내 진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = [F]^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} [F]$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} = [F]^T \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} [F]$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} = [F]^T \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} [F]$$

여기서, $[F]$ 는 식 (27c)에 정의된 2×2 행렬이며, A_{ij} , B_{ij} 와 C_{ij} 는 ξ -방향적분과 관련된 복소계수들로 다음과 같이 정의된다.

$$A_{11} = \int_0^\infty \left\{ (ik_o - \varepsilon) - \frac{1}{2(r_a + \xi)} \right\}^2 \exp \{ 2ik_o(\xi + r_a) - 2\varepsilon\xi \} d\xi$$

$$A_{12} = \int_0^\infty \left\{ (ik_o - \varepsilon) - \frac{1}{2(r_a + \xi)} \right\} \left\{ -k_1 - \frac{1}{2(r_a + \xi)} \right\} \exp \{ (ik_o - k_1)(\xi + r_a) - \varepsilon\xi \} d\xi$$

$$A_{22} = \int_0^\infty \left\{ -k_1 - \frac{1}{2(r_a + \xi)} \right\}^2 \exp \{ -2k_1(\xi + r_a) \} d\xi$$

$$B_{11} = \int_0^\infty \frac{l^2}{(r_a + \xi)^2} \exp \{ 2ik_o(\xi + r_a) - 2\varepsilon\xi \} d\xi$$

$$B_{12} = \int_0^\infty \frac{l^2}{(r_a + \xi)^2} \exp \{ (ik_o - k_1)(\xi + r_a) - \varepsilon\xi \} d\xi$$

$$B_{22} = \int_0^\infty \frac{l^2}{(r_a + \xi)^2} \exp \{ -2k_1(\xi + r_a) \} d\xi$$

$$C_{11} = \int_0^\infty \exp \{ 2ik_o(\xi + r_a) - 2\varepsilon\xi \} d\xi$$

$$C_{12} = \int_0^\infty \exp \{ (ik_o - k_1)(\xi + r_a) - \varepsilon\xi \} d\xi$$

$$C_{22} = \int_0^\infty \exp \{ -2k_1(\xi + r_a) \} d\xi$$

ξ 에 대해서 0에서 ∞ 까지 적분한 후, 아주 미소한 양의 실수값을 갖는 ε 을 영으로 취하면 ($\varepsilon=0$), A_{ij} , B_{ij} 와 C_{ij} 는 k_o , k_1 , r_a 만의 함수로 결정된

다.

$$A_{11} = \frac{1}{4r_a} \exp(i2k_o r_a) - \frac{ik_o}{2} \{ \exp(i2k_o r_a) - \{ c_i(2k_o r_a) + i \cdot s_i(2k_o r_a) \} \}$$

$$A_{12} = \left(\frac{1}{4r_a} + \frac{ik_o k_1}{ik_o - k_1} \right) \exp \{ (ik_o - k_1) r_a \} + \frac{ik_o - k_1}{4} E_i \{ (ik_o - k_1) r_a \}$$

$$A_{22} = \frac{1}{4r_a} \exp(-2k_1 r_a) + \frac{k_1}{2} \{ \exp(-2k_1 r_a) - E_i(-2k_1 r_a) \}$$

$$B_{11} = \frac{l^2}{r_a} \exp(i2k_o r_a) - i2k_o l^2 \{ c_i(2k_o r_a) + i \cdot s_i(2k_o r_a) \}$$

$$B_{12} = \frac{l^2}{r_a} \exp \{ (ik_o - k_1) r_a \} - (ik_o - k_1) l^2 E_i \{ (ik_o - k_1) r_a \}$$

$$B_{22} = \frac{l^2}{r_a} \exp(-2k_1 r_a) + 2k_1 l^2 E_i(-2k_1 r_a)$$

$$C_{11} = \frac{i}{2k_o} \exp(i2k_o r_a)$$

$$C_{12} = -\frac{1}{ik_o - k_1} \exp \{ (ik_o - k_1) r_a \}$$

$$C_{22} = \frac{1}{2k_1} \exp(-2k_1 r_a)$$

여기서, $c_i(\cdot)$, $s_i(\cdot)$ 와 $E_i(\cdot)$ 는 아래와 같이 정의되는, cosine, sine 및 exponential 적분함수를 나타낸다.

$$c_i(\xi) = -\int_\xi^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \gamma + \ln(\xi) + \int_0^\xi \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

$$s_i(\xi) = -\int_\xi^\infty \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2} + \int_0^\xi \frac{\sin t}{t} dt$$

$$E_i(-\xi) = -\int_\xi^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \gamma + \ln(\xi)$$

$$-\int_0^\xi \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$

여기서, γ 는 Euler 계수(=0.577216)이고, $\ln(\cdot)$ 은 자연대수를 나타낸다.