階層的構造를 갖는 시스템의 FUZZY GOALS에 관한 硏究
A study on fuzzy goals of system with hierarchical structure—

朴 柱 寧*
宋 瑞 日**

ABSTRACT

In this thesis, each objective functions with hierarchical system Bi-level linear programming (BLPP) Problem applications to fuzzy set theory conducted multiple objective programming problem. Using linear fuzzy membership functions make a change typical BLPP and presents modified method turn to account established BLPP method, presents operation results lead to example. Fuzzy Bi-level linear programming problem (FBLPP) can be natural describe realities of life then BLPP.

(要約)

本 硏究는 階層構造를 갖는 시스템의 各目的函數들에 퍼지(FUZZY)集合 概念을 適用한 이단계 선형계획 모형을 多目的計劃法으로 다루었다. 선형멤버쉽 함수를 利用하여 典型的인 Bi-level Linear Programming Problem(BLPP)으로 變形시켰으며, 기존의 BLPP 解法을 이용한 변형된 해법을 提示하고 例題를 통한 計算結果를 提示하였다. 퍼지二段階線型計劃 (FBLPP)은 BLPP보다 실제環境을 自然스럽게 描寫할 수 있다. FBLPP는 각 意思決定者가 多目的函數를 갖는 다목적 이단계수리계획 모형의 有效解를 구하는데 이용할 수 있다.

1. 序 論

急速한 變化를 가져온 現代文明社會에서의 意思決定이란 確實한 狀況下에서 이루어지기 보다는 不確實한 狀況下에서 意思決定이 이루어지고 있는것이 현재의 趨勢이다. 그래서 一般的인 實狀況의 意思決定에 使用되는 여러가지 목적들은 그 목적들을 적정하게 정하기가 어렵거나 또는 그 목적들의 成就希望水準인 그 목적의 重要程度를 明確하게 規定하기 어렵기 때문에 最近에 와서는 불확실한 상황하에서의 의사결정방법에 많은 關心이 모아지고 있다.

퍼지計劃法(Fuzzy Programming : FP)은 퍼지集合理論을 바탕으로 의사결정 과정에서의 不確實性을 處理하고자 하는 接近方法이다. 간단히 말하자면, 意思決定者(Decision Maker : DM)의 각 目標에 대한 價値를 멤버쉽함수를 使用하여 計量化 시키고 이를 이용하여 最適意思決定을 구하고자 하는 方法이다.

意思決定問題는 대부분이 各各의 目的函數들이 時間에 滿足되어져야 하는것이 일반적인 것으로 다루어 왔다. 그러나 오늘날의 複雜한 産業構造속에서는 서로가 追求하는 目標들이 相衝된다. 이러한 구조를 갖는 시스템을 階層的構造(Hierarchical structure)를 갖는 시스템이라고 한다. 즉, 各階層에서는 서로다른 의사결정자가 있고 이들이 追求하는 目標는 서로 相衝되며, 各階層에 있는 意思決定者는 다른 계층에 비해서 獨立的으로 遂行하는 活動變數를 갖고있다. 그리고 이들의 의사결정은 계층구조에 따라 順序的으로 이루어진다. 이와같이 계층구조를 갖는 시스템의 狀況을 適切하게 描寫하기 위해서 퍼지集合理論을 이용한 二段階線型計劃 模型을 提示하고 이것을 꼭지점 探索法중 Bilas & Karwan[7]의 "Kth—Best" 알고리즘을 이용한 解와 多目的 FBLPP를 變形된 多目的數理計劃法으로 解決한 最適解를 比較檢討하고 이들 解法의 擴張性과 應用性에 대해

*蔚山專門大學 工業經營科
**東亞大學校 產業工學科
접수 : 1989. 10. 29.

서 論하고자 한다.

2. 理論的 背景

多段階數理計劃模型(Multilevel mathematical programming problem)은 階層的構造를 갖는 시스템에서의 意思決定問題를 다루는 數理計劃模型으로 Candler & Townsley[9]가 처음으로 定義하였다. 이들의 重要한 特徵은 계층구조에서 한수준의 의사결정자의 目的函數와 意思決定領域은 다른 수준의 의사결정자들에 의해서 決定된다. 덧붙여서 意思決定者들의 개개인의 管理指針(Instruments)들은 다른 수준의 政策들에 影響을 미칠 것이며 그로인해서 그자신의 목적함수를 改善시킨다. 이러한 管理指針들은 하위수준에서의 資源의 使用과 分配를 包含할 것이며 利益들은 다른 수준들과 協議를 한다. 따라서 多段階數理計劃問題들은 다음과 같은 特徵들을 가지고 있다.

(1) 시스템은 階層的構造내에서 서로 相互作用을 하는 意思決定單位들을 가진다.

(2) 各下位水準들은 上位水準의 決定이 이루어진 후에 그것들의 政策들이 處理된다.

(3) 각변수들은 다른 변수들에 대해서 獨立的으로 全體利益을 最大化한다. 하지만 그들 決定變數들의 反作用과 措置들에 의해서 影響을 받는다.

(4) 意思決定問題의 外的인 效果는 그들의 目的函數와 實行可能變數들의 集合 양쪽 모두 反映되어질 수 있다.

다단계 수리계획모형이 旣存의 수리계획모형과 다른점은 多段階數理計劃模型에서는 上位階層에 있는 의사결정자가 어떤 의사결정을 했을 때 이 決定의 效果로서 下位階層에 있는 의사결정자가 取할 수 있는 實行可能領域을 制限하게 되고 또 下位階層에 있는 意思決定者에 의해서 이루어지는 의사결정이 上位階層에 있는 意思決定者의 目的函數에 영향을 미치는 形態의 問題이다. 다단계 수리계획 모형을 이용할 수 있는 例로는 게임의 形態로서 게임의 順序가 정해지고 각게임 參加者가 取하는 戰略은 다른게임 參加者가 取하는 戰略에 相互從屬的인 N-名非零合게임(N-Person non-zero sum game)이다. 이 게임은 stacklegerg 게임이라고 알려져 있다. 이 게임의 應用例로는 最近에 각 企業體에서 發生하고 있는 勞使紛糾를 들 수 있다. 使用主와 勞組는 계층구조를 갖는 시스템으로 볼 수 있고 使用主는 從業員福祉, 賃金, 奬勵金등을 통해서 從業員들에게 影響力을 행사할 수 있으며 또 會社全體의 目的을 위해서 適正利潤을 追求한다. 勞組는 賃金引上, 賞勵金引上, 福祉厚生施設등의 問題에 관하여 勤勞者들을 代表하여 使用主에게 要求를 하고 또 이를 貫徹시키기 위해서 罷業이나 態業을 誘導할 수도 있다. 따라서 使用主와 勞組는 서로다른 目標가 있고 使用主는 賃金, 勤勞時間, 賞勵金 등을 통해서 從業員에게 影響을 주고 노조는 사용주가 取하는 戰略에 따라 勤務姿勢, 缺勤率, 移職, 罷業등과 같은 手段으로 대응한다고 볼 때 이것을 stacklegerg게임의 一部라고 볼 수 있고 또 이것을 다단계 수리계획모형으로 定式化할 수 있다.

階層的構造를 갖는 問題를 幾何學的으로 보면 각계층에 있는 의사결정자의 목적함수가 선형함수이고 制約條件도 선형함수로 주어져도 여기서 얻어지는 實行可能領域이 볼록집합(Convex set)으로 정의되지않고 비볼록집합(Nonconvex set)으로 되어진다. 따라서 最適解條件을 滿足시키는 실행가능영역 안에 包含되어 있는 어떤 施行解가 실제로는 문제 전체를 만족시키는 全體最適解(Global optimum)이기 보다는 문제를 部分的으로 滿足시키는 部分最適解(Local optimum)일 수도 있는 特異한 形態의 模型이다.

本 硏究는 첫째, 다단계수리계획 모형의 일부인 이단계선형계획모형(Bi-level Linear Programming Problem : BLPP)을 정의하고 둘째, 二段階數理計劃模型을 퍼지集合理論을 적용하여 모형을 典型的인 선형계획모형으로 變化시키고 셋째, 典型的인 선형계획모형을 多目的計劃法으로 모형화해서 解를 구한후 네째, 旣存의 解法들과 比較를 해보고 이 解法의 擴張性 및 應用性에 대해서 論議하고자 한다.

3. 問題의 定式化

3.1 二段階線型計劃模型(BLPP)

BLPP模型은 다음과 같이 定式化된다.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } F=ax+by \text{ where Y solves}\\
&(P1)\quad \text{Max } f=cx+dy\\
&\qquad\quad \text{s.t. } Ax+By\leq U\\
&\qquad\quad \text{and } x,\ y\geq 0
\end{aligned}
$$

여기서 a, c, x;n_1벡터

b, d, y;n_1벡터

U;m벡터

A;$m\times n_1$행렬

B;$m\times n_2$행렬

rank(A, B)=m으로 주어진다.

x;첫번째 意思決定者(DM1)의 決定變數

y;두번째 意思決定者(DM2)의 決定變數

위와같은 문제는 서로 階層關係에 있는 각 의사결정자가 서로 相衝되는 目的을 갖고 있고, 또 서로를 調節할 수 있는 獨立된 活動變數를 갖고 있으며, 의사결정이 上位階層에 있는 의사결정자(DM1)로 부터 順序的으로 이루어질때 發生된다. 문제 (P1)이 다른 標準數理計劃 模型에 比較해서 다른점은 問題(P1)의 實行可能領域이 暗示的으로 주어지는 점이 다른 數理計劃模型과 다르다고 볼 수 있다.

實行可能領域에 대한 用語를 定理하면 다음과 같다.

實行可能領域 : $S=\{(x,\ y) : Ax+By\leq U\}$

첫번째 意思決定者의 實行可能領域 : $P=\{x : y \text{ s.t. } Ax+By\leq U\}$

두번째 意思決定者의 實行可能領域 : $S(\bar{x})=\{y : By\leq u-A\bar{x},\ y\geq 0\}$

주어진 $\bar{x}$에 대해서 $Y(\bar{x})$를 $\max\{dy : y\in s(x)\}$로 定義되는 내부문제를 푸는 最適解의 集合이라고 하면 問題(P1)은 다음과 같은 條件을 滿足하는 (x, y)를 구하는 (P2) 문제로 정의된다.

$$
\begin{aligned}
(P2)\quad &\text{Max}\{ax+by : x\in P,\ y\in Y(x)\}\\
&=\text{Max}\{ax+by : (x,\ y)\in S,\ y\in Y(x)\}
\end{aligned}
$$

문제 (P1)에 대한 施行可能條件 및 最適解 條件을 정의하면 다음과 같다.

[定義 1] $(x^*,\ y^*)$는 $x^*\in P$이고 $y^*\in Y(x^*)$이면 문제 (P1)인 BLPP에 施行可能하다.

[定義 2] $(x^*,\ y^*)$가 다음 3가지 條件을 滿足하면 BLPP에 대한 最適解이다.

(i) $(x^*,\ y^*)$가 施行可能하다.

(ii) 모든 $y^*\in Y(x^*)$에 대하여 ax^*+by^*가 唯一하게 定義된다.

(iii) 모든 施行可能解 $(x,\ y)\in S$에 대하여 $ax^*+by^*\geq ax+by$이다.

문제 (P1)이 잘 정의되도록 하기위해 S와 모든 $x\in P$에 대한 S(x)가 空集合이 아닌것을 假定한다. 그렇지만 이 假定은 문제 (P1)이 단 한개만의 最適解를 갖는것을 保障하는 것은 아니다. 만일 주어진 x에서 내부문제 즉 下位階層에 있는 의사결정자(DM2)의 최적해 문제의 最適解가 두개 이상 發生한다면 DM1의 目的函數값도 唯一하게 발생한다는 것을 保障할 수 없다. 이러한 어려움을 없애기 위해 BLPP는 唯一한 解를 갖는다는 것을 假定한다.

3.2 二段階線型計劃模型의 퍼지 模型化(Fuzzy Bi-level linear Programming Problem : FBLPP)

퍼지數理計劃模型이 다른 數理計劃模型에 비해서 가지고 있는 가장 큰 장점은 制約條件에서 柔軟性 즉 可用資源의 柔軟性을 提供하고 可用資源의 柔軟性으로 인하여 目的函數 또한 不確實한 점이 발생할 수 있는데 퍼지 모형에서는 이를 解決할 수 있어 실제 意思決定問題를 模型化하는데 더 큰 現實性을 賦與할 수 있다.

퍼지集合理論은 Zadeh[14]에 의해서 처음으로 提示되었다. 그뒤로 Bellman & Zadeh[6]의 論文 "Fuzzy 環境에서의 意思決定"에서 처음으로 意思決定論에 퍼지槪念이 導入되었으며 수리계획모형 分野에서는 Zimmermann[13]이 처음으로 선형멤버쉽함수와 最大—最小오퍼레이터(Max-min operator)를 이용하여 퍼지선형계획법

을 典型的인 선형계획법으로 變換시켜 풀었다.

퍼지수리계획모형에 대한 一般的 接近方法은 다음과 같다. X를 可能한 代案들의 集合이라고 정의했을때, 任意의 한 代案 $x \in X$에 대하여 퍼지目標 G(x)는 $\{(x, \mu_G(x)) \mid x \in X, 0 \leq \mu_G(x) \leq 1\}$로, 퍼지制約條件 $C_i(x)$는 $\{(x, \mu_{C_i}(x)) \mid x \in X, 0 \leq \mu_{C_i}(x) \leq 1\}$로 정의된다. 여기서 $\mu_G(x)$, $\mu_{C_i}(x)$는 各各의 滿足度를 나타내는 멤버쉽函數이다. 또 퍼지意思決定 D(x)는 퍼지目標 G(x)와 퍼지制約條件 $C_i(x)$의 交集合으로 다음과 같이 정의된다.

$D(x) = \{(x, \mu_D(x)) \mid \mu_D(x) = \min(M_G(x), M_{C_i}(x))$ for each $x \in X\}$ Bellman & Zadeh[6]의 최대-최소原則은 퍼지意思決定중에서 멤버쉽함수를 最大로 하는 代案, 즉 Max $\min(\mu_G(x), \mu_{C_i}(x); i=1, 2, \cdots, m)$로 되는 대안 x를 구하는 것이다.

퍼지이단계선형계획모형(FBLPP)은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} &\widetilde{\text{Max}}\ F = ax + by \text{ where Y solves} \\ \text{(P3)}\quad &\widetilde{\text{Max}}\ f = cx + dy \\ &\quad \text{s.t. } Ax + By \lesssim U \\ &\quad \text{and } x, y \geq 0 \end{aligned}$$

여기서 "~"는 fuzzyfier를 나타낸다. DM1의 決定變數 x가 $\bar{x}$로 주어졌을때 DM2는 다음과 같이 정의되는 (P4) 문제를 最適化 하도록 決定變數 y를 選擇해야 한다.

$$\begin{aligned} &\widetilde{\text{Max}}\ f \hat{=} by \\ \text{(P4)}\quad &\text{s.t. } By \lesssim u - Ax \end{aligned}$$

DM1이 모든 결정변수를 정한다고 할 때 문제(P4)는 다음과 같이 정의되는 (P5) 문제로 模型化된다.

$$\begin{aligned} &\widetilde{\text{Max}}\ F = ax + by \\ \text{(P5)}\quad &\text{s.t. } Ax + By \lesssim U \end{aligned}$$

確定的인 模型인 境遇 문제 (P5)의 最適解의 目的函數값은 문제 (P3)의 上限役割을 하게되고 또한 문제 (P3)의 最適解가 문제 (P5)의 꼭지점에서 存在하게된다[8]. 따라서 (P3)의 最適解를 찾는것은 문제 (P5)의 決定變數 y가 문제 (P4)와 같아지도록 x값을 決定하는 것과 같다.

目的函數 및 각 제약조건에 대한 멤버쉽함수는 다음과 같이 정의된다. 먼저 DM1의 入場에서 目的函數 F의 達成하고싶은 目標값을 F^1, 도저히 받아들일 수 없는 目標값을 F^2라고 정의하고 또 각 제약조건의 餘裕限度를 P_i라고 할 때 目的函數와 制約條件에 該當되는 선형멤버쉽함수 $\mu_G(x, y)$, $\mu_{C_i}(x, y)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_G(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (ax+by)_i \geq F^1 \\ \dfrac{(ax+by)_i - F^2}{F^1 - F^2} & \text{if } F^2 \leq (ax+by)_i \leq F^1 \\ 0 & \text{if } (ax+by)_i \leq F^2 \end{cases}$$

$$\mu_{C_i}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (Ax+By)_i \leq U_i \\ 1 - \dfrac{(Ax+By)_i - U_i}{P_i} & \text{if } U_i \leq (Ax+By)_i \leq U_i + P_i \quad i=1, 2, \cdots, m \\ 0 & \text{if } (Ax+By)_i \geq U_i + P_i \end{cases}$$

또 DM2의 境遇도 주어진 $\bar{x} \in X$에 대해서 目的函數와 각 제약조건에 대한 멤버쉽함수를 $\mu_G(y \mid x)$, $\mu_{C_i}(y \mid x)$로 주어질 때 이들은 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_G(y \mid x) = \begin{cases} 1 & \text{if } by \geq f^1 \\ \dfrac{by - f^1}{f^1 - f^2} & \text{if } f^2 \leq by \leq f^1 \\ 0 & \text{if } by \leq f^2 \end{cases}$$

$$\mu_{C_i}(y \mid x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (By)_i \leq (U-A\bar{x})_i \\ 1-\dfrac{(By)_i-(U-Ax)_i}{q_i} & \text{if } (U-A\bar{x})_i \leq (By)_i \leq (U-A\bar{x})_i+q_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ 0 & \text{if } (By)_i \geq (U-A\bar{x})_i+q_i \end{cases}$$

여기서 f^1는 DM2가 가능한 한 達成하고싶은 목적함수값, f^2는 DM2가 도저히 滿足할 수 없는 目的函數값, q_i는 DM2에게 주어신 制約條件의 餘裕限度이다.

Bellman과 Zadeh의 最大－最小原則에 依據하여 각 DM에게 關聯된 의사결정문제를 다음과 같이 定式化할 수 있다.

(P6) : 〈DM1의 意思決定問題〉

$$\begin{aligned} &\text{Max } \alpha \\ &\text{s.t. } -\alpha(F^1-F^2)+ax+by \geq F^2 \\ &\qquad \alpha P_i+(Ax+By)_i \leq U_i+P_i, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ &\qquad \alpha \leq 1 \\ &\text{and } \alpha,\ x,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

(P7) : 〈DM2의 意思決定問題〉

$$\begin{aligned} &\text{Max } \beta \\ &\text{s.t. } -\beta(f^1-f^2)+by \geq f^2 \\ &\qquad \beta q_i+(By)_i \leq (U-Ax)_i+q_i, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ &\qquad \beta \leq 1 \\ &\text{and } \beta,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

(P6)과 (P7)를 統合하여 典型的인 BLPP문제로 模型化하면 (P8)과 같다.

(P8) : 典型的인 BLPP

$$\begin{aligned} &\text{Max } \alpha \ \text{ where } (\beta,\ y) \text{ solves} \\ &\text{Max } \beta \\ &\text{s.t. } -\alpha(F^1-F^2)+ax+by \geq F^2 \\ &\qquad \alpha P_i+(Ax+By)_i \leq U_i+P_i, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ &\qquad \alpha \leq 1-\beta(f^1-f^2)+by \geq f^2 \\ &\qquad \beta q_i+(By)_i \leq (U-A\bar{x})_i+q_i, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ &\qquad \beta \leq 1 \\ &\text{and } \alpha,\ \beta,\ x,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

(P8)의 最適解는 $(\alpha,\ x,\ \beta(\alpha,\ x),\ y(\alpha,\ x))$로 주어지는데 $\beta(\alpha,\ x)$와 $y(\alpha,\ x)$는 DM1의 決定變數가 α, x로 주어졌을 때 DM2의 意思決定問題인 (P7)의 最適解가 β, y로 決定됨을 意味한다.

3.3 FBLPP의 多目的數理計劃模型化

目標計劃法은 몇개의 目的이 同時에 考慮되어야 하는 문제의 취급에 매우 有用한 道具이다. 그러나 이는 각 목적에 목표를 設定함을 要求하는데, 그 작업을 뜻있게 하기란 항상 可能한 것은 아니다. 任意의 目的은 가능한 한 많은 進前을 願하는 性格이어서 이정도면 滿足하다고 느낄만한 어떤 最小目標가 存在하지 않을 수도 있다(예를들면 利潤의 極大化가 있다.). 이러한 性格의 目的들이 모두가 동시에 좋은 進前을 보이는 것이 重要할 境遇에 우리는 "모든 目的을 向한 最小進前을 極大化" 하는 것이 더 適切할 것이다.

이 概念을 定式化 하자면 K개의 目標를 假定하자.

$$Z_1=\sum_{j=1}^{n} C_{j1} X_j \qquad (\text{目標}-1)$$

$$Z_2=\sum_{j=1}^{n} C_{j2} X_j \qquad (\text{目標}-2)$$

⋮

$Z_k=\sum_{j=1}^{n} C_{jk}X_j$ (目標－k)

이 모든 目標들을 同時에 增加시키기를 願하므로 全體的 目的函數는

Maximize $Z=\text{minimum}\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_k\}$

가 되며 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 最適解는 가장 작은 $Z(=1, 2, \cdots, k)$를 極大化 하는 것이다. 이 모형은 분명히 선형계획모형이 아니다. 그러나 이것은 다음의 선형계획모형과 對等하다.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z=z\\
&\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} C_{jk}X_j-z\geq 0,\ k=1, 2, \cdots, k\\
&\qquad \text{원래모형의 선형계획 制約式들}\\
&\text{and } x_j\geq 0,\ j=1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

그 理由는 새로운 變數 Z의 最大可能値는 最小 $Z_k=\sum_{j=1}^{n} C_{jk}X_j$와 같아야 하므로 最適解는 제일작은 Z_k를 가능한 한 크게 할 것이다. 그러므로 多目的數理計劃法을 使用하여 最適解를 찾을 수 있다. 만일 Z_k가 共通單位로 測定되지 않으면 適切한 常數로 곱하여 共通의 測定單位로 轉換 시켜야 한다.

3.4 例題

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\text{Max}}\ F=-x-y \text{ where } y \text{ solves}\\
&\widetilde{\text{Max}}\ f=5x-y\\
&\text{s.t. } x+0.5y\geq 2\\
&\qquad -0.25x+y\leq 2\\
&\qquad x+0.5y\leq 8\\
&\qquad x-2y\leq 4\\
&\text{and } x, y\geq 0
\end{aligned}
$$

위 例題에서 x는 DM1의 決定變數이고 y는 DM2의 決定變數이다. 각 制約條件에 대한 餘裕限度는 DM1이 $P=(0.5, 0.5, 0, 0)$, DM2가 $q=(0, 1, 1, 1)$로 주어졌다. 또 DM1의 입장에서 達成하고 싶은 目的函數값을 $F^1=-2$, 도저히 받아들일 수 없는 目的函數값을 $F^2=-9.78$로 주어지고 마찬가지로 DM2의 對應되는 目標값이 각각 $f^1=32/9$, $f^2=0$으로 주어졌다. DM1의 멤버쉽의 程度를 나타내는 變數를 α, DM2의 멤버쉽變數를 β라고 할 때 위의 문제를 퍼지屬性을 없앤 典型的인 BLPP로 나타내면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } \alpha \text{ where } (\beta, y) \text{ solves}\\
&\text{Max } \beta\\
&\text{s.t. } 7.78\alpha+x+y\leq 9.78\\
&\qquad 0.5\alpha-x-0.5y\leq -1.5\\
&\qquad 0.5\alpha-0.25x+y\leq 2.5\\
&\qquad\quad x+0.5y\leq 4\\
&\qquad\quad x-2y\leq 4\\
&\qquad\quad \alpha\leq 1\\
&\qquad\quad 3.56\beta-y\leq 0\\
&\qquad\quad x+0.5y\geq 2\\
&\qquad\quad \beta+0.25x+y\leq 3\\
&\qquad\quad \beta+x+0.5y\leq 9\\
&\qquad\quad \beta+x+2y\leq 5\\
&\qquad\quad \beta<1
\end{aligned}
$$

and $\alpha, \beta, x, y \geq 0$

위의 문제를 변형된 多目的數理計劃法으로 定式化하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & Z = z \\
\text{s.t. } & \alpha - z \geq 0 \\
& \beta - z \geq 0 \\
& 7.78\alpha + x + y \leq 9.78 \\
& 0.5\alpha - x - 0.5y \leq -1.5 \\
& 0.5\alpha - 0.25x + y \leq 2.5 \\
& x + 0.5y \leq 4 \\
& x - 2y \leq 4 \\
& \alpha \leq 1 \\
& 3.56\beta - y \leq 0 \\
& x + 0.5y \geq 2 \\
& \beta + 0.25x + y \leq 3 \\
& \beta + x + 0.5y \leq 9 \\
& \beta + x + 2y \leq 5 \\
& \beta \leq 1 \\
\text{and } & \alpha, \beta, x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

이 문제는 典型的인 BLPP문제를 變形된 多目的 計劃法으로 定式化한 것이다.

3.5 解法 및 結果分析

典型的인 BLPP問題에 대한 해법의 硏究는 Simplex法을 利用한 꼭지점探索法[7, 9]이 있고, Kuhn-Tucker 條件을 이용하여 문제를 混合 0-1整數計劃 문제로 변형시켜 푸는 방법[5, 8] 그리고 두개의 目的函數를 갖는 多目的線型計劃模型과 BLPP문제와의 關係를 밝혀 다목적선형계획모형의 해법을 變形시켜 BLPP문제를 푸는 방법[2, 12] 등으로 多樣하게 硏究되어왔다. 앞의 例題를 變形된 多目的線型計劃法으로 풀기 위해서는 例題에 나타나 있는 것처럼 첫째, 각 DM의 멤버쉽函數를 정의하고, 둘째로는 이것을 典型的 BLPP로 변형시킨 후 셋째, 다목적계획법의 一部分인 "모든 目的을 向한 最小進前을 極大化"(Maximizing the minimum progress toward all objectives)의 模型으로 定式化해서 풀 수 있다. 本 硏究에서는 꼭지점探索法 중 Bilas와 Karwan [7]의 "Kth-Best" 알고리즘을 이용한 변형된 해법으로 구한 最適解와 多目的 FBLPP를 變形된 多目的數理計劃法으로 解決한 最適解를 比較 檢討하고 이들 해법의 擴張性과 應用性에 대해서 論하고자 한다.

以上의 節次에 의해서 구한 多目的 計劃法의 解는 $(\alpha, \beta, x, y, z) = (0.87, 0.61, 0.846, 2.18, 0.87)$이다. 이것은 目標計劃法의 프로그램중에서 다목적프로그램을 트라이젬 PC로 實行시켜 나온 結果이다. 그리고 변형된 Kth-Best 알고리즘의 解는 $(\alpha, \beta, x, y) = (0.86, 0.63, 0.89, 2.22)$가 導出되었다. 이와같은 結果들은 기존의 解法들에 퍼지개념이 導入되면서 변형된 解法들에 의해서 나온 것이다. 以上에서 본것처럼 두 해법 사이에는 약간의 差가 存在하고 있는데 어느 解法이 優越하다고 斷言 하기는 힘들지만 嚴密히 생각 해보면 階層的構造를 갖는 문제에 있어서 重要한 것은 意思決定의 順序이다. 이런점을 볼 때 각 계층의 의사결정자의 成就希望水準인 멤버쉽함수의 값이 下位階層에 있는 意思決定者의 멤버쉽함수값 보다는 下位階層에 있는 의사결정자의 멤버쉽함수값이 높아야 한다. 그렇기 때문에 의사결정문제에 관한 解法은 目標計劃法이 보다 더 融通性이 있는 것이 사실이다.

4. 結 論

本 硏究에서는 階層的構造를 갖는 시스템의 퍼지目標에 관해서 例題를 使用하여 여기에 관련된 理論들을 適用하여 旣存의 BLPP해법을 이용한 변형된 해법의 結果와 퍼지槪念을 도입한 多目的 FBLPP를 변형된 다목

적수리계획법을 이용해서 計算結果를 提示하였다. FBLPP는 BLPP에 비해 실제環境을 自然스럽게 描寫할 수 있어 定式化가 용이하다. 그래서 FBLPP는 각 DM이 多目的函數를 갖는 多目的二段階數理計劃 模型의 有效解를 구하는데 이용할 수 있을뿐만 아니라, 實狀況의 意思決定問題들은 不確實性 속에서 하나의 目標보다도 多數의 目標들이 대두되면서 그들의 目標들을 滿足시키기 위해서 서로의 目標들이 相衝되는 일이 非一非再하다. 이러한 것을 보다 效果的으로 處理할 수 있는 技法이 多目的數理計劃法이라 생각되며 여기에 不確實性을 考慮하여 融通性(Flexibility)을 加味한 意思決定技法들이 이러한 방향에서 끊임없는 論證이 있었으면 한다.

참 고 문 헌

1. J. F. Bard, "An efficient point algorithm for a linear two-stage Optimization Problem," Ops. res., Vol. 31, No. 4, 1983.
2. J. F. Bard, "Optimality condition for the Bilevel programming problem," Naval Research Logistics Quarterly. Vol. 31, 1984.
3. J. F. Bard, "An investigation of the linear three level programming problem," IEEE Trans. sys., Man & Cyb., Vol. SMC−14, No. 5, 1984.
4. J. F. Bard, "Convex two level optimization," Math. Prog. 40, 1988.
5. J. F. Bard & J. E. Falk, "An explicit solution to the multilevel programming problem," Comput & Ops. Res., Vol. 9, No. 1, 1983.
6. R. E. Bellman & L. A. Zadeh, "Decision making in a fuzzy environment," Mgt. Sci., Vol. 17, 1970.
7. W. F. Bialas & M. H. Karwan, "On two-level optimization," IEEE Trans. Auto. Con., Vol. AC−27, No. 1, 1982.
8. W. F. Bialas & M. H. Karwan, "Two-level linear programming," Mgt. Sci., Vol. 30, No. 8, 1984.
9. W. Candler & R. Townsley, "A linear two-level programming problem," Comput. & Ops. Res., Vol. 9, No. 1, 1982.
10. Jose Fortuny-Amat & B. Mccarl, "A representation and economic interpretation of a two-level programming problem," J. Opl. Res. Soc., Vol. 32, 1981.
11. Ue-Pyng Wen & W. F. Bialas, "The hybrid algorithm for solving the Three-level linear programming problem," Comput. & Ops. Res., Vol. 31, No. 4, 1986.
12. G. Unlu, "A linear Bilevel programming algorithm based on Bicriteria programming," Comput. & Ops. Res., Vol. 14, 1987.
13. H. J. Zimmerman, "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions," Fuzzy Sets & Systems, Vol. 1, 1978.
14. L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," Information and control, Vol. 8, 1965.
15. Balas, E., "An infeasibility pricing decomposition method for linear programs," Oper. Res., Vol. 14, No. 5, 1966, pp. 846-873.
16. E. Horowitz, & S. Sahni, "Fundmentals of computer algorithms," Computer Science Press, Inc. 1978, pp. 370-421.
17. Hartley, "Operations research : A managerial emphasis," Goodyear, Inc., 1976, pp. 523-576.
18. B. E. Gillett, "Intro. to operations research," MoGraw-Hill, 1976, pp. 129-241.
19. GASS, "Linear programming," McGraw-Hill, 5ed. pp. 431-468.
20. 이상문, "오퍼레이션스 리서어치" 경음사, 1986, pp. 270-321.
21. 박순달, "O. R프로그램집 1, 2.", 大英社, 1983.
22. 박순달, "經營科學原論", 大英社, 1987, pp. 194-224.
23. 강석호, "經營科學槪論(OR/MS)", 英志文化社, 1986.