불량률의 사전분포와 로트크기를 고려한 계수규준형 샘플링검사의 수정검사방식

—Rectifying inspection for single sampling by attributes with lot size N and prior distribution of p—

李 度 炅*
李 根 熙**

ABSTRACT

A rectifying sampling plan which assums a prior distribution on the lot percent defective is considered. This sampling is developed for finite lot size N with matching OC curves and generated from an initial plan selected from single sampling by attributes.

1. 서 론

현재 사용중인 샘플링검사 정책의 결정에 있어서 이들 검사방식에 대한 추가의 정보가 주어지거나, 기존 검사방식의 취약점을 보완한 수정검사정책(rectifying inspection) 및 효율적인 샘플링검사정책(ESP : effective sampling plan)에 대해 많은 연구가 진행되고 있다.

기존 검사정책에서는 로트불량률 p에 대해 과거 자료에 의한 특정값 즉, 상수로 처리하였으나 로트불량률의 분포를 파악할 수 있는 경우에는 이를 고려함으로써 보다 효율적인 샘플링검사 정책을 수립할 수 있다.

이러한 Bayesian 샘플링에서는 기존의 샘플링검사표의 수정이 필요하게 된다. 본 연구에서는 그 대상을 계수규준형 샘플링검사방식으로 제한하며, 로트불량률 p가 감마분포를 취하는 gamma-prior Bayesian 샘플링 개념을 도입한 새로운 검사방식을 제시하고 있으나, 계수규준형 샘플링검사에서는 로트크기가 매우 큰 수라는 가정하에 이항분포에 의하여 작성되어져 있다. 그러므로 시료 크기가 작은 경우에는 Bayesian 샘플링을 실시하기 전에 이를 수정하는 선행단계가 필요하게 된다. 즉, 기존 검사정책의 검사특성곡선에 가능한 위배되지 않는 범위내에서 주어진 유한의 특정 로트크기에 대해 새로운 수정정책이 필요하게 된다.

현재 많은 논문들이 불량률의 사전분포 형태로써 베타분포를 채택하고 있으나 본 연구에서는 로트불량률 수준이 낮은 경우에 그 분포형태를 잘 나타낼 수 있는 감마분포에 의한 모델을 제시한다.

2. 모델의 전개

2-1 용어 해설

p_0	: 합격시키고 싶은 품질수준의 상한치
p_1	: 불합격시키고 싶은 품질수준의 하한치
n_1, c_1	: 계수규준형 샘플링검사에 의한 시료크기와 합격판정갯수
n_2, c_2	: 로트크기가 고려된 수정검사정책의 시료크기와 합격판정갯수
n_3, c_3	: Bayesian 샘플링에 의한 수정검사정책의 시료크기와 합격판정갯수
a, b	: 감마분포의 parameter
μ_p, σ^2_p	: 감마분포에 의한 로트불량률의 평균및 분산
n_*, c_*	: 로트크기와 사전분포가 고려된 최종검사정책의 시료크기와 합격판정갯수

*한양대학교 산업공학과 박사과정
*한양대학교 산업공학과 교수

접수 : 1989. 10. 20.

2.2 로트크기가 고려된 수정된 계수규준형 샘플링검사

계수규준형 샘플링검사는 로트크기에 대해서는 고려되어 있지 않다. 즉, 시료크기 n에 비해 로트크기 N이 매우 크다는 가정하에 이항분포에 의해 작성되어 있는데, 이론적으로 $N/n>10$을 기준으로 하고 있으나 이것은 사용상의 편이성을 위한 개략적인 기준에 불과하며 실제 사용시에는 이 기준조차 지켜질 수 없는 것이 보통이다. 따라서 주어진 정보 즉, 로트크기의 활용을 위하여 Hamaker [6]의 이론을 사용하여 계수규준형 샘플링검사를 수정할 수 있다.

이 수정이론은 무한크기의 로트에 대한 검사방식(n, c)는 그 로트크기가 특정 유한값 N으로 주어질 때, 기존 검사방식 (n_1, c_1)에 대해 새로운 검사방식 (n_2, c_2)는 아래의 두 식을 만족해야만 한다. 기존의 계수규준형 샘플링검사에서의 검사방식을 (n_1, c_1)이라 할 때, (n_2, c_2)와의 관계식은 다음과 같다.

$$n_2=n_1(c_2+\frac{2}{3})/(c_1+\frac{2}{3}+\frac{n_1}{3N}) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$n_2 \geq Nn_1/(N+n_1) \quad \cdots\cdots (2)$$

기존의 (n_1, c_1)의 OC곡선에 대해 수정검사방식의 OC곡선이 정확하게 일치할 수는 없다. 하지만 2)의 부등식을 등식으로 그 제약을 완화시키면 가장 유사히 일치하게 되는데, 이 때의 두 식을 현 단계에서 구하고자 하는 n_2, c_2에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$n_2=Nn_1/(N+n_1)$$

$$c_2=(Nc_1-\frac{n_1}{3})/(N+n_1)$$

윗 식에서 수정검사방식의 (n_2, c_2)는 N에 의한 함수이며 로트크기 N이 무한히 커지면 n_2, c_2 값은 n_1, c_1에 접근함을 알 수 있다. 이는 역으로 N이 작은 수 일수록 기존 검사방식은 오차가 커짐을 의미한다.

2.3 사전분포에 의한 검사방식의 수정

과거 자료에 의해 로트불량률 p가 로트사이에서 분포를 취하는 경우 이를 고려함으로써 보다 효율적인 샘플링검사방식을 수립할 수 있다. 이렇게 p에 분포를 고려하는 Bayesian 샘플링에는 Lauer[7], Guenter[3] [4]와 같이 베타분포를 이용하기도 하며, Collani[1]는 로트내의 불량갯수가 k_0이하일 확률을 알 수 있다는 가정하에서 α −최적 샘플링검사방식을 발표하였다.

불량률의 분포에 대하여 다양한 형태를 제시할 수 있는 베타분포가 주로 사용되어 지고 있으나, 본 연구에서는 감마분포를 사용한다. 이는 기술적인 발전 추세에 따라 모든 제품의 불량률은 매우 낮아질 것으로 확실시되는데, 감마분포 경우는 특히 로트불량률이 낮을 때 주어진 상황을 잘 반영할 수 있기 때문이다.

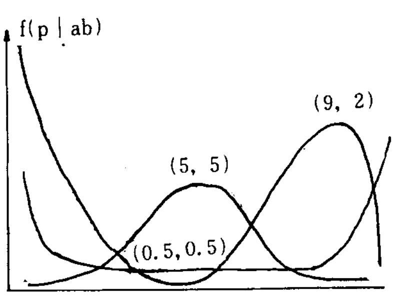

FIGURE 1 Beta Distribution

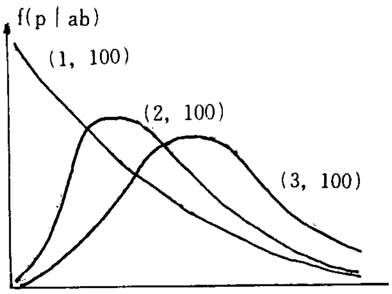

FIGURE 2 Gamma Distribution

로트불량률 p의 감마분포 p.d.f는 다음과 같다.

$$g(p)=\frac{b^{a}}{\Gamma(a)}p^{n-1}\exp^{-bp} \quad \cdots\cdots (3)$$

a, b의 감마분포를 취하는 확률변수 p의 poisson분포에 대한 조건부 확률의 OC곡선에서의 검사정책을 (n_3, c_3)라 할 때, 시료크기가 n_1이고 로트불량이 p′인 poisson분포의 p.d.f는 다음과 같다.

$$k(y \mid n_1p')=(n_1p')^{y}\exp^{-n_1p'}/y! \quad \cdots\cdots (4)$$

위의 두 식 (3), (4)를 아래의 Bayes 이론식에 대입하면,

$$g(p' \mid y)=g(p')k(y \mid n_1p')/f(y)$$

단, $f(y)=\int_{p'}g(p')k(y \mid n_1p')dp$

그러므로

$$g(p \mid y=c;n_1,\ c_1)=\frac{n_1^{c1+1}p^{c1}}{\Gamma(c_1+1)}\exp^{-n_1p}$$

$$g(p \mid y=c;n_3,\ c_3)=\frac{(b+n_3)^{a+c3}}{\Gamma(a+c_3)}p^{a+c3-1}\ \exp^{-(b+n3)p}$$

위의 식으로부터 (n_1, c_1)과 (n_3, c_3)의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{cases} n_1=n_3+b \\ c_1=c_3+a-1 \end{cases}$$

로트불량률 p의 사전감마분포에 의한 평균과 표준편차를 각각 μ_p, σ_p라 할 때, 사전감마분포와 조건부 poisson 분포는 다음과 같다.

$$f(p : a,\ b)=b^{a+1}\ p^{a}\exp^{-bp}/a! \quad a=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ b=0+,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$f(y \mid np)=(np)^{y}\exp^{-np}/y!$$

Bayes 이론에 의한 불량률 p의 사후분포는

$$f(p \mid y=c_3;n_1,\ c_1)=n_1^{c1+1}\ p^{c1}\exp^{-(n1p)}$$

감마분포와 poisson 분포의 관계에 의한 누적밀도함수 F(pi | y=c:c_1, n_1)은

$$F(p_1 \mid c_1,\ n_1)=\int_0^{p_1}f(p \mid y=c_3;c_1,\ n_1)dp$$

$$=\Sigma_{x=c_2+1}^{\infty}(n_1p_i)^{x}\exp^{-n1pi}/x!$$

그러므로 a=b=0일 때는 초기상태의 검사정책 즉, (n_1, c_1)과 동일하게 된다. 위의 관계식에 의하여

$$\mu_p=a/b \quad \sigma_{p^2}=a/b^2$$

윗 식을 a, b에 대하여 정리하면

$$\begin{cases} a=(\dfrac{\mu_p}{\sigma_p})^2 \\ b=\dfrac{\mu_p}{\sigma_{p^2}} \end{cases}$$

따라서 (n_1, c_1)에서 사전감마분포에 의한 새로운 검사방식 (n_3, c_3)는 다음과 같다.

$$(n_3,\ c_3)=(n_1-\mu_p/\sigma_{p^2},\ c-(\frac{\mu_p}{\sigma_p})^2+1)$$

여기서 μ_p와 σ_p에 대해서는 추정이 필요하며 주로 과거 데이타에 의한 범위 R(range)을 사용한다(상세한 내용은 생략).

2.4 로트크기와 사전분포에 의한 검사방식의 수정

위의 두가지 검사방식의 수정방법 즉, 계수규준형 샘플링검사방식 (n_1, c_1)에 사전감마분포가 고려되고 특정 로트크기 N이 주어질 때의 최종검사방식 (n_*, c_*)의 (n_1, c_1)과의 관계는 다음과 같다.

$$n_* = \frac{Nn_1}{N+n_1} - \frac{\hat{\mu}_p}{\hat{\sigma}_p^2}$$

$$c_* = \frac{Nc_1 - n_1/3}{N+n_1} - \left(\frac{\hat{\mu}_p}{\hat{\sigma}_p}\right)^2 + 1$$

윗 식에 의해서 최종수정검사방식 (n_*, c_*)는 최초의 검사방식 (n_1, c_1)에 두가지 영향이 추가됨을 알 수 있다. 즉, 각 식의 로트크기 N에 대한 것과 사전감마분포에 대한 것으로서 $\hat{\mu}_p$, $\hat{\sigma}_p$의 변화에 대한 것이다. 즉, 분산이 작아질수록 시료크기 n_*와 합격판정갯수 c_*는 줄어들게 되는데 이는 산포의 폭이 줄어 듦을 고려해 줌으로써 이에 해당되는 추가의 정보에 대한 시료크기의 감소가 이루어 짐을 식을 통하여 직접 확인할 수 있게 해준다.

3. 결 론

계수규준형 샘플링검사방식은 소비자와 생산자를 동시에 고려하며 사용상의 편이성은 좋은 검사방식이나 주어진 정보와 상황을 고려하지 못하므로 인해 그 효율성은 떨어진다. 이러한 단점은 로트크기에 대한 유한수정계수를 설정하고 로트불량률의 분포를 고려하여 줌으로써 보다 효율적인 검사방식이 제시될 수 있다. 최종검사방식을 수리적 예를 통하여 (n_1, c_1), (n_2, c_2), (n_3, c_3)와 비교해 본 결과 (n_*, c_*)의 값이 감소함을 알 수 있었다. 이 때 합격판정갯수는 그 표시형태가 정수라는 조건 때문에 최종검사방식에 의해 산출되는 합격판정갯수 c의 완만한 변화가 검사방식에 충분히 반영되지 않는 면이 지적될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Collani, E. V., "The α-Optimal Acceptance Sampling Scheme", Journal of Quality Technology, Vol. 18, No. 1, Jan. 1986.
2. Dodge, H. F. and Romic, H. G.(1959), Sampling Inspection Tables, John Wieley & Sons, Inc. New York.
3. Guenther, W. C., "Rectifying Inspection for Nonconforming Items and Hald Linear Cost Model", Journal of Quality Technology, Vol. 17, No. 2, April 1985.
4. Guenther, W. C., "Determination of Rectifying Inspection Plans Single Sampling by Attributes", Journal of Quality Technology, Vol. 16, pp. 56-63. 1984.
5. Guild, R. D. and Raka, Ida, Effective Sampling Plans Based on a Prior Distribution", Journal of Quality Technology, Vol. 12, No. 2, April 1980.
6. Hamaker, H. C., "Adjusting Single Sampling Plans for finite Lot Sizes", Applied Statistics, Vol. 8, pp. 210-214, 1959.
7. Lauer, Nicholas G., "Acceptance Probabilities for Sampling Plans where Proportion Defective has a Beta Distribution", Journal of Quality Technology, Vol. 10, No. 2, April 1978.