製造工程 Network의 改善을 위한 W－函數
W－function for the Improvement of the Network in Manufacturing Proces

李　相　道*
朴　基　柱**

ABSTRACT

In this paper, GERT network in modeled to improve the network of manufacturing process with feedback loop. A lot of information on the GERT network can be derived from the equivalent W-function and MGF(moment generating function) using Mason's rule. These equations are used in calculating the variations of the performance measure and in improving the system performance. System improvement in manufacturing process is achieved by increasing the equivalent probabilities of each branches and by decreasing the expected equivalent time.

1. 序　論

제조공정에 대한 network를 그래프에 의해 表現(graphic representation)하면 system 全體를 視覺化한다는 利點외에 여러 成分間의 關係를 쉽게 알 수 있고 GERT(Graphical Evaluation and Review Technique)를 이용하여 製品의 製造工程에 대한 等價期待確率, 等價期待時間 등의 유익한 정보를 얻을 수 있다. 이 정보를 定量的인 基準 尺度로 삼아 제품의 製造工程 및 System의 개선이나 의사결정의 필요한 기본자료로 이용할 수 있다. 製造工程의 network는 그 구조나 작업과정에 있어서 선택적이거나 대체적인 경우가 많으며 이런 경로를 따르는 理論的 節點을 포함하여 實現된 Activity를 다시 實現하도록 하는 self loop나 feedback 사상이 포함되게 된다. 이와 같은 논리적 특성을 가진 Network를 確率的 Network라 부르고 이 Network를 利用하여 製造工程의 Network를 GERT Model化 하여 感度(Sensitivity) 분석이 可能하다. System의 개선이나 의사결정에 필요한 기본자료로서 이 방정식의 계수를 조성하여 等價期待確率을 증가시키거나 期待時間을 줄일 수 있어 Network의 Sytem개선의 목적 달성이 可能하다.

제조공정의 network를 GERT network化 하여 Topological equation과 Mason's rule을 適用하여 Network의 상등함수(W_E)를 유도하고, 이 등가 W－函數로써 공정완수에 따른 等價期待時間과 等價期待確率을 구하여 이를 바탕으로 製造工程에 미치는 影響을 알아보며 GERT에 의한 製造工程의 管理可能性을 考察해 보는데 있다.

2. W－function과 相等函數(Equivalent function)

製造工程의 경우와 같이 feedback loop나 self loop를 가지는 network는 始點(origin)과 終點(terminal)을 연결시켜 等價요소를 산출할 수 있도록 원래의 network를 單純化(simplification)하거나 縮略(reduction)함으로써 GERT의 Node와 Activity에 대해서 두 절점(Node)사이의 경과時間의 조건부 Moment 函數와 두 Node사이를 연결시키는 한 개의 有向性分의 branch(directed branch) 實現確率로서 이루어진다. 確率的 Network에서 Event는 여러 개의 母數(parameter)로 이루어지는데 母數에는 1차母數(primary parameter)와 2次 母數(secondary parameter)로 구분된다. Activity의 완성 時間에 대한 時間 변수는 그 성질상 가법성(additative property)이나 GERT의 確率요소는 乘法性(multipliplicative)임으로 時間요소를 처리하는데 문제가 惹起된다.

*東亞大學校 工科大學 產業工學科
**慶北產業大學 產業工學科
接受日字：1989年 10月 7日

그러나 Moment Generating Function(MGF)는 獨立變數의 合의 MGF는 각각의 變數의 MGF의 積(product)과 같다는 성질이 잘 알려져 있는 통계적 사실이므로 時間에 대한 確率變數는 時間分布에 의해 정해진 MGF의 형태에 따라 특정지워질 수 있다. 대부분의 分布는 MGF의 변환에 의해 $E(e^{st})$로 나타낼 수 있다. 특정사건에 대한 相等函數는 그 사건의 실행 確率과 媒介函數의 곱으로 定義되고 媒介函數란 時間이나 經費 등과 같이 加法性의 母數를 乘法性의 母數로 다루기 위한 하나의 函數이다.

Dummy variable로 S를 사용하여 2次 母數(parameter) t 에 대한 매개函數 $M_t(s)$는

$$M_t(S)=E\{e^{st}\}=\begin{cases}\int_t e^{st}f(t)dt & \text{if } t \text{ is a continuous Variable.}\\ \sum_t e^{st}\, f(t) & \text{if } t \text{ is a discrete Variable.}\end{cases}$$

여기서 $f(t)$란 t의 密度函數(density function)이다. 만약 $t=t_0$인 常數라면 $M_t(s)=e^{st_0}$이다. 또 $f(t)$는 密度函數이므로 $f(t)\ dt=1, M_t(0)=1$이 된다. 2次 母數의 原點에 관한 i번째 Moment μiE는

$$\mu iE=\frac{\partial^i}{\partial s^i}[M_E(S)]\ |_{s=0} \qquad \cdots\cdots (1)$$

로 부터 2次母數의 平均値, 分散 歪度(skewness), 尖度(kurtosis)는 계산되고 이들로부터 2次母數의 특성에 따른 근사적 分布를 구할 수 있다. 2次母數가 時間(t)와 費用(c)의 두 개의 母數를 가지는 경우 System의 相等函數를 scalar 경우의 표기와 같이

$$W_E(S_1,\ S_2)=P_E\cdot M_E(S_1,\ S_2) \qquad \cdots\cdots (2)$$

이며 時間(t)에 해당하는 dummy variable로 S_1, 費用(C)에 S_2로 하여 等價 W-函數를 구할 수 있고 이에 따라서

$$\mu_{itE}=\frac{\partial^i}{\partial s_1 i}M_E(S_1,\ S_2)\ |_{S_1=0,\ S_2=0}$$
$$\mu_{icE}=\frac{\partial^i}{\partial s_1 i}M_E(S_1,\ S_2)\ |_{S_1=0,\ S_2=0} \qquad \cdots\cdots (3)$$

으로서 等價期待時間과 等價期待費用을 구하는 것이 可能하게 된다.

條件附 確率 (P_{ij})와 Activity를 實現하는 時間의 積律母函數 ($M_{ij}(s)$)의 곱으로 定義하여 나타내면 그 기본적 요소를 Fig. 1과 같이 표현하여 이 $W_{ij}(s)$를 W-function이라 부른다.

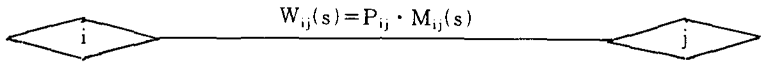

Fig. 1. GERT Element

특정통로(path)와 Loop에 대한 W-函數는 그 통로의 實現確率(p)와 통로의 특성을 나타내는 分布函數의 곱으로 定義되므로

$$W(S)=P\cdot M_t(S) \qquad \cdots\cdots (4)$$

통로(path)나 Loop에 관련된 W-函數는 path나 Loop를 구성하는 각 branch의 W-函數의 積(product)이므로 path나 Loop를 L로 표시하면

$$W_L(S)=\prod_{i\in L}W_i(S) \qquad \cdots\cdots (5)$$

이고 Loop나 path의 確率(P_L)은

$$P_L=W_L(0)=\prod_{i\in L}W_i(0)=\prod_{i\in L}P_i \qquad \cdots\cdots (6)$$

이들 값들로 출력통계량을 얻기 위해 位相方程式(Topological equation)이나 Mason's rule에 의해 system의 相等函數 $W_E(S)$를 구해보면 다음과 같다.

$$W_E(S)=\frac{A(S)[1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\sum_{K=1}^{n_i}W_{LK}^{(i)}(S)]}{1+\sum^{\infty}(-1)^i\sum^{n_i}W_{Li}^{(j)}(S)}=\frac{A(S)B(S)}{D(S)}=\frac{N(S)}{D(S)} \qquad \cdots\cdots (7)$$

여기서

A(S) : 구하고자 하는 통로 A상에 있는 모든 branch값의 積(product)

$W_{L,K(i)}(S)$: 통로 A와 공통의 절점을 갖지 않는 차의 비접촉(nontouching) Loop들의 값의 積(product)

n_i : i차 비접촉(nontouching) Loop로 구성된 Loop들의 갯수

$W_{L,K(j)}(S)$: j차 비접촉(nontouching) Loop의 값들의 積(product)

n_j : j차 비접촉(nontouching) Loop들로 구성된 Loop들의 갯수

B(S), N(S), D(S)는 置換式이다.

3. Loop의 概念과 Topological Equation

Flowgraph 理論에서 Topological equation은 그 근본적인 의미가 단순하지만 깊은 함축성이 내포되어 있다. 이 방정식은 복잡한 Flowgraph를 풀이하는데 기초를 제공하고 있으며 Loop면에서 보면 닫힌 Loop(closed lop)에서 비접촉 Loop(nontouching loop, disjoint loop)의 차수에 따라 n차 Loop의 값은 n개의 비접촉 Loop의 transmittance에 대한 積(product)과 같게 된다. Topological equation H는 모든 닫힌 Flowgraph(closed flowgrah)에 대하여 定義되며 다음과 같은 형태를 가진다.

$$
\begin{aligned}
H &= 1 - L_1 + L_2 - L_3 \cdots\cdots + (-1)^i L_i + \cdots \\
&= 1 + (-1)^i \sum_{i=1}^{n} L_i \\
&= 0 \quad (\text{단, } L_i = i\text{次 Loops})
\end{aligned}
\tag{8}
$$

그러나 Topological equation은 closed Flowgraph에 적용되나 열린(open) Flowgrah에도 사용이 可能하다. 이 경우에는 닫힌(closed) Flowgraph로 만들기 위한 架空的인 transmitance를 利用해야 한다. 그러나 System 전체에 대한 相等 Network를 만들어 Mason'rule을 적용하여도 구할 수 있다.

Mason'rule이란 각 path에 따른 transmittance의 積(product)을 구하고 그 path에 이르는 비접촉 Loop들의 transmittance를 곱하여 수정되어 구해진 path의 transmittance를 合한 다음 그 값을 열린(open) Flowgraph에 있는 모든 Loop의 合으로 나누어 구하는 方法으로

$$
T = \frac{\Sigma(\text{path} \times \Sigma\,\text{nontouching Loops})}{\Sigma\,\text{Loops}} \tag{9}
$$

이 계산의 결과는 Topological equation에서 얻은 결과와 같아지며 열린(open) Flowgraph에서의 Mason's rule의 적용이 사용상 편리할 때가 있다. 복잡한 System의 Network는 여러 개의 Loop나 path로 구성되고 Topological equation에 의해서 $W_{ij}(S) = P_{ij} \cdot M_{ij}(S)$로 定義된 W－函數를 유용하게 利用하기 위하여 각 branch의 $W_{ij}(S)$ 函數의 정보에서 Netwok의 等價函數 $W_E(S)$의 관계를 표시하는 Topological equation은 다음과 같이 定義되고 있다.

$$
H(S) = 1 + \sum_{m} \sum_{i} (-1)^m (m, s) \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
L_i(m, s) &= L_1(1, s) \times L_2(1, S) \times \cdots\cdots \times L_m(1, s) \\
&= \prod_{k=1}^{m} L_k(1, s)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$L_i(m, s)$는 m차의 i번째 Loop이다. m차 i번째 Loop와 1차 Loop m개의 관계는 식 (11)에 나타나 있다. n개의 W－函數로 구성되는 경우 1차 Loop는

$$
\begin{aligned}
L_i(1, S) &= W_1(S) \times W_2(S) \times \cdots\cdots\cdots \times W_n(S) \\
&= \prod_{i=1}^{n} W_i(S)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Network에서 시점(start)과 종점(terminal)의 두 Node 사이에 1개의 가공적인 path $W_A(S)$를 부수적으로 추가함으로써 닫힌(closed) Network가 된다.

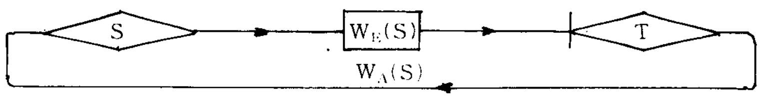

Fig. 2. A Closed Stochastic Network

이 Network에서는 단 1개의 Loop 즉 $W_E(S)\ W_A(S)$가 존재하고 이때 닫힌 Network의 Topological equation $H(S)=0$로 定義되며 다음과 같다.

$$H(S)=1-W_E(S)\ W_A(S)=0 \quad \cdots\cdots (13)$$

이 식에서 $W_A(S)=\frac{1}{W_E(S)}$이 얻어지고 path $W_A(S)$는 열린 Network의 等價인 branch 函數 $W_E(S)$의 역수임을 알 수 있다. 이 $W_E(S)$는 等價 W-函數(Equivalent W-Function)이라 부른다.

Mason's rule에 의해 全 System의 相等 W-函數 $W_E(S)$를 직접 구하는 식이 식(7)로 제시되어 있으나 가공적인 path $W_A(S)$를 부가하여 Topological equation을 만들고 다음식을 利用하여 $W_E(S)$를 구할 수 있다. 즉

$$H(S)=H(S)\mid_{W_A=0}+W_A(S)\cdot\frac{\partial H(S)}{\partial W_A(S)} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$W_E(S)=\frac{1}{W_A(S)}=\frac{\dfrac{\partial H(S)}{\partial W_A(S)}}{H(S)\mid_{W_A=0}} \quad \cdots\cdots (15)$$

$H(S)\mid_{W_A=0}$는 $W_A(S)=0$인 경우의 $H(S)$ 값을 의미한다.

두 Node 사이의 branch의 實現確率을 P_E, 두 Node 사이에 소요되는 時間의 分布函數에 대한 MGF를 $M_E(S)$라 하면 $W_E(S)=P_E\cdot M_E(S)$이고

$M_E(S)\mid_{s=0}=M_E(0)=1$이므로

$$P_E=W_E(0) \quad \cdots\cdots (16)$$

W-函數의 定義에 의해

$$M_E(s)=\frac{W_E(s)}{P_E}=\frac{W_E(s)}{W_E(0)} \quad \cdots\cdots (17)$$

따라서 $W_E(S)$에는 Network의 두 Node 사이의 MGF와 確率을 계산하기 위한 모든 정보가 들어 있다. 等價期待時間은 等價 branch의 원점에 관한 1차 모멘트(Moment)이고 일반적으로 n차 모멘트는 다음의 식에 의해 구할 수 있다.

$$\mu_{nE}=\frac{\partial^n M_E(s)}{\partial S^n}\ S=0\mid=\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[\frac{W_E(s)}{W_E(0)}\right]_{s=0} \quad \cdots\cdots (18)$$

4. GERT Network

Feedback loop를 가지는 工程의 과정을 GERT Network로 나타내는 것이 可能하다. 이것을 效率的으로 분석하기 위하여 각 branch의 확율과 Activity에 관련되는 모수(parameter)의 변동에 따른 공정의 GERT Network를 Fig. 3에 표시하고 Topological equation과 Mason's rule을 이용하여 등가 W-함수를 誘道하는데 필요한 각 branch의 實現確率 및 Activity의 시간에 대한 Data는 Table 1과 같다.

Table 1. Probability and MGF of each branch parameter

branch(ij)	W	Prob.	$M_t(s)$
2.3	W_1	1	e^{3s}
3.4	W_2	1	e^{7s}
4.5	W_3	1	e^{12s}
5.6	W_4	0.75	e^{5s}
5.7	W_6	0.25	e^{s}
6.8	W_{11}	0.01	e^{2s}
6.9	W_5	0.99	e^{0}
7.5	W_7	0.7	e^{3s}
7.8	W_8	0.3	e^{0}
8.3	W_{10}	0.05	e^{2s}
8.4	W_9	0.95	e^{0}

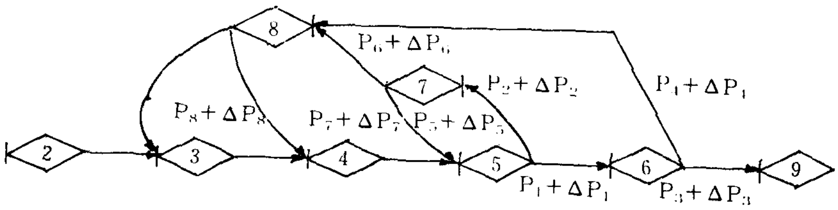

Fig. 3 Network of QC Circle Process with Parameter Variations

path from 2 to 9 $= W_1W_2W_3W_4W_5$

Σ nontouching loops $= 1 - (\Sigma$ first-order nontouching loops$)$

$= 1$

Σ loops in system $= 1 - (\Sigma$ first-order loops$)$

$$= 1 - (W_2W_3W_6W_8W_{10} + W_2W_3W_4W_{11}W_{10} + W_3W_6W_8W_9 + W_3W_4W_{11}W_9 + W_6W_7)$$

$$= 1 - \sum_{i=2}^{6} L_i$$

$$\therefore T = \frac{(\text{path} \times \text{nontouching loops})}{\Sigma \text{ loops}}$$

$$= \frac{W_1W_2W_3W_4W_5}{1 - \sum_{i=2}^{6} L_i} \; (= W_E)$$

Table 2. List of for network of Fig. 3

loop	Element of loop	Nontouching associated loop	Value of Loops
L_1	$W_1W_2W_3W_4W_5W_A$	–	$0.7425\ e^{27s} \cdot W^A$
L_2	$W_2W_3W_6W_8W_{10}$	–	$0.00357\ e^{22s}$
L_3	$W_2W_3W_4W_{11}W_{10}$	–	$0.000375\ e^{28s}$
L_4	$W_3W_6W_8W_9$	–	$0.07123\ e^{13s}$
L_5	$W_3W_4W_{11}W_9$	–	$0.007125\ e^{19s}$
L_6	W_6W_7	–	$0.175\ e^{4s}$

$$W_E = \frac{1}{W_A} = \frac{W_1W_2W_3W_4W_5}{1 - \sum_{i=2}^{6} L_i}$$

$$= \frac{W_1W_2W_3W_4W_5}{1 - (W_2W_3W_6W_8W_{10} + W_2W_3W_4W_{11}W_{10} + W_3W_6W_8W_9 + W_3W_4W_{11}W_9 + W_6W_7)}$$

$$= P_1P_3e^{27s} / \{1 - (P_2P_6P_8e^{22s} + P_1P_4P_8e^{28s} + P_2P_6P_7e^{13s} + P_1P_4P_7e^{19s} + P_2P_5e^{4s})\}$$

$$= 0.7425e^{27s} / 1 - (0.00375e^{22s} + 0.000375e^{28s} + 0.07125e^{13s} + 0.007125e^{19s} + 0.175e^{4s})\}$$

$$P_E = W_E(0) = 0.7425e^{27s} / (1 - \sum_{i=2}^{6} L_i) \big|_{s=0}$$

$$= \frac{0.7425}{1 - 0.0.2575}$$

$$= 1$$

Moment Generating Function(MGF)에서 E(t)는

$$M_E(s) = \frac{W_E(s)}{W_E(s)\big|_{s=0}} = W_E(s)$$

$$E(t) = \frac{\partial}{\partial s} M_E(s) \mid_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{W_E(s)}{W_E(0)} \right) \mid_{s=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{0.7425e^{27s}}{1-(0.00375e^{22s}+0.000375e^{25s}+0.07125e^{13s}+0.007125e^{19s}+0.175e^{4s})} \right]_{s=0}$$

$$= \frac{16.2623}{0.5513}$$

$$= 29.4980$$

5. 結 論

製造工程의 network에서 특히 feedback loop를 가지는 경우 이를 GERT network로 表現하여 單純化 또는 縮略하여 等價 network를 만들고 이를 효과적으로 分析하는 것이 가능하다. 복잡한 system의 개선에 필요한 정보를 얻기 위해 이 network에서 等價 W－函數를 유도하여 보다 높은 차원의 moment 계산이 용이하므로 이 函數의 MGF를 구하여 意思決定 및 network 개선에 필요한 정보를 구할 수 있다. 예로든 GERT network에서 等價 W－函數를 구하여 이 函數의 MGF에서 Network를 완료($P_E=1$)하는데 소요되는 等價期待時間이 29.5단위 임을 보여주고 있다.

REFERENCES

1. Crowston, W. and Thompson, G. L., (1967), *Decision CPM : A Method for Simultaneous Planning, Scheduling and Control of Projects*, Operations Research, Vol. 15, No. 3, pp. 407-427.
2. Eisner, H., (1962), *A Generalized Network Approach to the Planning and Scheduling of a Research Project*, Operations Research, Vol. 10, No. 1, pp. 115-125.
3. Elmagraphy, S. E., (1977), *Acivity Network; Project Planning and Control by Network Models*, John Wiley and Sons, Inc., pp. 321-356.
4. Freeman, R. J., (1960), *A Generalized PERT*, Operations Research, Vol. 8, No. 2, p. 281.
5. Pritsker, A. A. B., and Happ, W. W., (May 1966), *GERT; Graphical Evaluation and Review Technique, Part I Fundamental*, Journal of Industrial Engineering, Vol. X Ⅶ, No. 5, pp. 267-274.
6. Pritsker, A. A. B., and Whitehouse, G. E., (June 1966), *GERT; Graphical Evaluation and Review Technique, Part Ⅱ, Probabilistic and Industrial Engineering Applications*, Journal of Industrial Engineering, Vol. X Ⅶ, No. 6, pp. 293-301.
7. Raju, G. V. S., (June 1971), *Sensitivity Analysis of GERT Network*, AIIIE Transactions, Vol. Ⅲ, No. 2, pp. 133-141.
8. Whitehouse, G. E. and Pritsker, A. A. B., (March 1969), *GERT; Part Ⅲ-Further Statistical Results; Counters, Renewal Times, and Correlations*, AIIE Transactions, Vol. Ⅰ, No. 1, pp. 45-50.
9. Whitehouse, G. E., (1973), *System Analysis and Design Using Network Techniques*, Prentic-Hall, Inc.,