역산란 문제에서의 비유일성

(Nonuniqueness in Inverse Scattering Problems)

金 世 潤*, 羅 正 雄**

(Se Yun Kim and Jung Woong Ra)

要 約

모멘트 방법에 근거한 파수영역의 역산란 계산기법을 이용하여, 유전체 기둥 단면내의 유전율 분포의 재구성이라는 역산란 문제에 관한 해의 비유일성을 수치계산이라는 면에서 살펴보았다. 또한 다중측정, 다양한 입사파등의 추가적인 처리방안도 유일성을 보장하는데 효과가 없음을 보였다.

Abstract

The nonuniqueness of solutions to inverse scattering problems for the reconstruction of cross sectional permitivity distributions on dielectric cylinder is illustrated in view of numerical analysis based on the spectral inverse scattering scheme with the moment-method procedures. It is also shown that some additional treatmenents such as multiple measurements, various incidences, etc. are not effective to assure the uniqueness.

I. 서 론

숨겨진 물체의 위치, 크기, 종류등을 원격탐지하거나 임의의 물체의 내부구조를 비파괴적으로 조사하는 것을 통칭하여 역산란 문제라고 한다.[1] 이러한 문제중 대표적인 것으로 X-선 또는 초음파 CT를 이용한 의용진단, 레이다신호를 SEM (singularity expansion method)로 처리하여 비행물체 인식 또는 SAR (synthetic aperture radar) 기법에 의한 지표면 원격탐사, 각종 저주파수대 신호를 이용한 지하자원탐사, 빛을 이용한 홀로그래피 (holography) 영상등을 들 수 있다. 역산란 문제에서 사용할 수 있는 초기입력자로는 임의의 알려진 파동을 구하고자하는 물체에 인가시 이 물체로 부터 산란된 파동을 측정하여 얻은 산란신호 정보와 이때 인가한 입력신호정보이다. 이러한 초기자료를 적절한 역산란식에 대입하여 산란체에 대한 정보를 구하는 것이 역산란문제이다. 따라서 산란체에 대한 자세한 정보를 구하기 위해서는 정확한 산란신호의 측정과 엄밀한 역산란식의 유도가 필수적이다.

그런데 이 분야에서 지금까지 논란이 되고 있는 것은 정확한 산란신호를 엄밀한 역산란식에 대입하더라도 원래의 산란체에 대한 정확한 정보를 구할 수 없다는 점이다. 이를 역산란문제에서 해의 비유일성 (nonuniqueness)[2]이라고 부르는데, 물리적으로는 산란체 또는 전원을 포함하는 임의의 제한된 영역외부의 산란파를 영으로 만드는 비복사 전원(nonradiating

*正會員, 韓國科學技術研究院 應用電子研究室
(Lab. of Appl. Electronics, KIST)

**正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字 : 1989年 6月 9日

source)[3,4]때문에 이러한 산란파로는 역산란문제의 유일한 해를 얻을 수 없다고 알려지고 있다. 그림 1에서 보듯이 영역 S내의 임의의 전기 전원 j_0에서 복사되는 전계 u_R을 폐곡선 R상에서 측정할 경우, 영역 S와 폐곡선 R사이에 서로 겹치지 않는 2개의 폐곡선 L_1과 L_2상에 u_R과 같은 복사파를 주는 전기및 자기 전원인 j_1, m_1과 j_2, m_2를 각각 만들 수 있다. 따라서 폐곡선 R상에서 측정한 파로 부터 원전원 j_0를 유일하게 얻을 수 없다. 왜냐하면 u_R을 주는 전원은 원래 영역 S내에 분포한 j_0뿐 아니라 $j_0+(j_1+m_1-j_2-m_2)$도 똑같은 복사파를 만든다. 이 경우 $(j_1-j_2+m_1-m_2)$와 같은 임의의 폐곡선상에 분포한 전원을 비복사 전원이라고 한다. 그런데 역산란문제는 먼저 산란파를 측정하여 얻은 자료로 부터 먼저 산란체에 유기되는 등가전원을 구해야 하므로, 결국 이러한 비복사 전원의 존재는 역산란문제에서 해의 비유일성을 주는 원인이 된다.

최근 전자파 산란문제에서 널리 사용되는 모멘트 방법(moment method)의 계산과정을 역으로 적용한 역산란 계산방법[5,6]이 개발되었으며, 이를 공간주파수(spatial-frequency)영역에서도 적용할 수 있도록 개선되었다[7,8]. 본 논문에서는 역산란 문제의 비유일성 여부를 비복사 전원의 존재에 관한 여러 경우의 수학적인 관점에서 다룬 기존의 결과와는 달리 모멘트 방법을 이용한 역산란 계산식을 이용하여 조사하였다. 편의상 본 논문에서는 단일 주파수의 전자파를 이용한 2차원 비유전율분포의 재구성에 관하여 다루었으며, 시간 조화함수는 $e^{j\omega t}$를 채택하였다.

Ⅱ. 모멘트 방법을 이용한 역산란 계산방법

그림 2와 같이 임의의 단면 S내에 비유전율 $\varepsilon(x, y)$이 분포된 유전체 기둥의 축방향인 z방향으로 분극된 평면파 u^i가 $+x$축 방향으로 입사할 경우 전체전계 u는 다음과 같은 적분방정식으로 표현된다[6].

$$u(x, y) = u^i(x, y) + \frac{jk_0^2}{4}\iint_S dx'\,dy'\,[\varepsilon(x', y') - 1]$$

$$\times u(x', y')\, H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\right) \qquad (1)$$

여기서 k_0는 단면 S의 외부영역인 균일 매질내에서의 파수(wavenumber)를 나타내고, $H_0^{(2)}$는 제 2종 0차 Hankel함수로서 파동방정식의 2차원 Grenn함수를 의미한다. 식(1)의 양변을 변수 y에 대해 Fourier 변환을 취하여 이를 복소변수 β로 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다[8].

$$U(x, \beta) = U^i(x, \beta) + F(x, \beta)\, I(\beta) \qquad (2)$$

여기서

$$F(x, \beta) = -\frac{jk_0^2}{2}\frac{e^{\mp j\sqrt{k_0^2-\beta^2}x}}{\sqrt{k_0^2-\beta^2}} \qquad (3)$$

$$I(\beta) = \iint_R dx\,dy\,[\varepsilon(x, y) - 1]\,u(x, y)\, e^{\pm j\sqrt{k_0^2-\beta^2}x + j\beta y} \qquad (4)$$

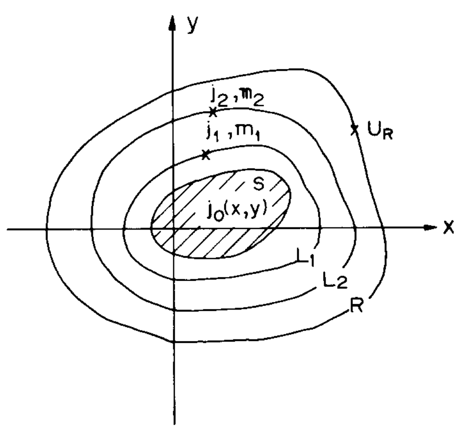

그림 1. 비복사 전원의 존재에 대한 간단한 도해

Fig. 1. A simple illustratration on the existence of nonradiating sources.

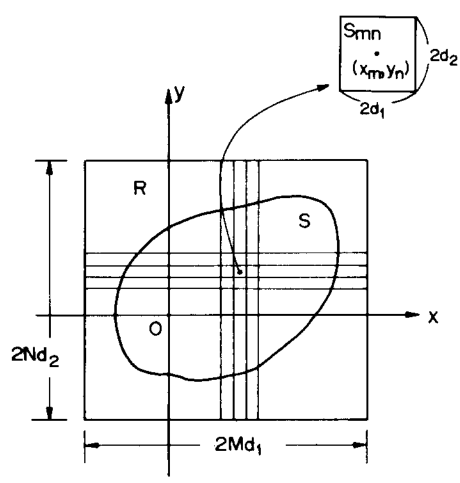

그림 2. 비균일한 유전체 기둥 단면의 분할

Fig. 2. Discretization of the cross sectional area of inhomogeneous dielectric cylinder.

식(3)과 (4)의 복부호중 윗 부호는 $x > x'$일 경우이고, 아랫부호는 그 반대 경우에 사용한다. 식(4)의 적분 영역 R은 원래의 유전체 단면 S를 포함하는 임의의 직사각형인데, 이는 역산란 문제를 풀 경우 숨겨진 유전체의 비유전율 분포 뿐만 아니라 위치및 모양까지 구해야만 할 경우를 다루기 위함이다.

식(4)를 직접 해석적인 방법으로 풀 수 없으므로, 모멘트 방법을 이용한 수치해석적으로 풀기로 한다. 이를 위해서는 영역을 그림2와 같이 MN개의 소영역으로 잘게 나누며, 이때 mn번째 소영역 S_{mn}의 중심은 (x_m, y_n)이고 크기는 $2d_1 \times 2d_2$인 직사각형이 된다. 만약 길이 d_1과 d_2가 모두 주변 매질에서의 파장(wavelength)에 비해 매우 작으면, 각 소영역내의 비유전율과 전계분포는 거의 변화하지 않으므로 각 소영역의 중심에서의 비유전율과 전계 값으로 근사화시킬 수 있다.

$$\varepsilon(x, y) \simeq \varepsilon(x_m, y_n) = \varepsilon_{mn}, \quad S_{mn} \tag{5 a}$$

$$u(x, y) \simeq u(x_m, y_n) = u_{mn}, \quad S_{mn} \tag{5 b}$$

식(5)를 식(4)에 대입하여 적분하면 다음과 같은 $I(\beta)$를 얻을 수 있다[8]

$$I(\beta) = B(\beta) \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} G_{mn}(\beta)\; P_{mn} \tag{6}$$

여기서

$$B(\beta) = \begin{cases} \dfrac{4\sin\left(\dfrac{\sqrt{k_0^2-\beta^2}\,d_1}{2}\right)}{\sqrt{k_0^2-\beta^2}} \exp\left(j\dfrac{\sqrt{k_0^2-\beta^2}\,d_1}{2}\right) \cdot \dfrac{2\sin(\beta d_2)}{\beta}, & x = x_m \quad (7\text{ a}) \\[2ex] \dfrac{2\sin\left(\sqrt{k_0^2-\beta^2}\,d_1\right)}{\sqrt{k_0^2-\beta^2}} \cdot \dfrac{2\sin(\beta d_2)}{\beta}, & x \neq x_m \quad (7\text{ b}) \end{cases}$$

$$G_{mn}(\beta) = \exp\left(j\sqrt{k_0^2-\beta^2}\,x_m + j\beta y_n\right) \tag{8}$$

$$P_{mn} = (\varepsilon_{mn} - 1)\, u_{mn} \tag{9}$$

식(6)을 식(2)에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$U(x, \beta) = U^i(x, \beta) + F(x, \beta)\; B(\beta) \times \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} G_{mn}(\beta) P_{mn} \tag{10}$$

역산란 문제에서 미리 주어지는 초기 자료로는 입사파 $u^i(x, y)$와 구하고자 하는 유전체 외부에서 측정한 전계 $u(x, y)$가 있다. $u^i(x, y)$는 전 영역에서 알수 있으나, $u(x, y)$는 측정점상에서만 알 수 있는 양이다. 편의상 그림3과 같이 임의의 $x = x_0$선상을 따라 L개의 점에서 전계를 측정하여 이를 불연속 푸리에 변환(discrete Fourier transform)을 취하면 L개의 파수영역의 변수 β_l에 대한 전계의 스펙트럼인 $U(x_0, \beta_l)$을 구하게 된다. 따라서 식(10)은 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$\frac{U^s(x_0, \beta_0)}{F(x_0, \beta_l)\; B(\beta_l)} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} G_{mn}(\beta_l)\; P_{mn}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, L. \tag{11}$$

여기서 $U^s(x_0, \beta_l)$은 다음과 같이 유전체로 부터 산란된 전계의 스펙트럼으로 아는 양이다.

$$U^s(x_0, \beta_l) = U(x_0, \beta_l) - U^i(x_0, \beta_l) \tag{12}$$

만약 파수영역의 변수 β_l을 MN개 취하면 식(11)을 MN×MN 행렬이 되므로, 이를 역변환시키면 MN개의 등가유기전류인 P_{mn}을 구할 수 있다. 계산된 P_{mn}을 식(10)에 대입하고, 변수 x를 영역 R내부로 옮겨서 M개의 x_m으로 취하여 계산하면 M개의 $U(x_m, \beta)$를 얻을 수 있다. $U(x_m, \beta)$를 역프리에 변환하면 N개의 $u(x_m, y_n)$ 즉 u_{mn}을 구할 수 있으므로, 영역 R 내부의 모든 소영역내의 전계를 계산하게 된다. 따라서 모든 소영역내의 P_{mn}과 u_{mn}을 알므로, 식(9)의 관계로 부터 모든 소영역내의 비유전율 값인 ε_{mn}을 쉽게 재구성하게 된다.

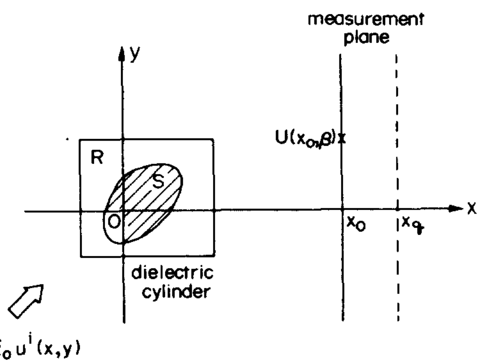

그림 3. 2차원 스칼라 역산란 문제에 대한 구조

Fig. 3. A geometry for 2-dimensional scalar inverse scattering problem.

III. 비유일성에 관한 검토

앞장에서 기술한 역산란 방법으로 간단한 유전체 모형에 대한 수치계산 결과 산란파 측정시 원래의 유

전율 분포를 파장이하의 초분해능(superresolution)으로 재구성할 수 있음을 보였다.[9,10] 특히 산란파의 측정오차나 잡음등이 없으며 수치계산시 round-off등의 오차가 없다면, 소영역의 크기를 줄일수록 즉MN 갯수를 많이 할수록, 이에 비례하여 재구성된 비유전율분포의 분해능(resolution)이 좋아질 수 있다. 만약 정확한 산란전계의 스펙트럼을 측정할 수 있으며 식(11)과 (10)을 이용한 수치계산시의 오차가 전혀없는 이상적인 경우, 영역 R을 무난히 잘게 나누고 $x=x_0$선상에서 L을 무한개로 산란파의 스펙트럼을 측정하면 완전히 이론적인 견지에서는 원래의 정확한 비유전율 분포 $\varepsilon(x, y)$를 구할 수 있을 것처럼 보인다. 왜냐하면 식(10)과 (11)의 유도시 사용한 유일한 가정은 식(5.a)와 (5.b)인데, 소영역 S_{mn}이 무한히 작아지면 한개의 점이되어 이들 식의 가정 또한 정확하게 된다. 따라서 식(10)과 (11)을 사용한 역산란 계산은 어떠한 가정도 포함하지 않은 엄밀한 방법이 되기 때문이다.

그러나 이 경우 식(11)에서 영역 R이 아무리 작을지라도 구하고자 하는 미지수 P_{mn}의 총 갯수 MN에 비해 $U^s(x_0, \beta_1)$의 총 갯수 L이 항상 작게 된다. 위상수학(topology)개념을 도입하면, 임의의 선분상의 한 점은 무한 직선상의 한점과 일대일 대응(one-to-one mapping)이 된다. 따라서 임의의 면적을 갖는 영역 R내의 한점은 $x=x_0$의 무한 직선상의 한점과 일대일 대응이 않되고 항상 영역 R내의 한 선분과 $x=x_0$의 무한 직선상의 한점간에 일대일 대응이 된다. 그러므로 산란파의 측정점 수 L을 무한개로 취하더라도, 특히 수치계산상의 문제를 배제하더라도 정확한 비유전율 분포 $\varepsilon(x, y)$를 유일하게 구할 수 없음을 알수 있다. 왜냐하면 그 경우 미지수 MN갯수가 방정식수 L보다 항상 많으므로, 무한개의 해가 존재하게 된다. 따라서 본 역산란 문제에서의 비유일성을 쉽게 증명할 수 있다.

그러면 산란전계의 $x=x_0$선상에서만 측정하지 않고, 그림 3과 같이 서로 다른 Q-1개의 $x=x_q$선상에서 측정한 산란전계 $U^s(x_q, \beta_1)$은 식(3)에서 정의된 $F(x_q, \beta_1)$로 나누므로, 식(11)의 우변은 측정선의 위치에 상관이 없음을 볼 수 있다. 이는 다음과 같은 식으로 쉽게 표현할 수 있다.

$$\frac{U^s(x_0, \beta_1)}{F(x_0, \beta_1)} = \frac{U^s(x_q, \beta_1)}{F(x_q, \beta_1)}, \quad q=1,\ 2,\ ...,\ Q-1 \tag{13}$$

따라서 $x=x_q$선상에서 측정된 산란전계는 $x=x_0$선상에서 측정한 산란전계로 부터 정확히 계산할 수 있으므로 새로운 정보가 될 수 없다. 그러므로 $x=x_0$이외의 다른 어떠한 위치에서의 정보도 $x=x_0$선상에서 측정한 산란전계에 새로운 정보를 주지 못하므로, 이 경우에도 유일한 역산란 해를 얻을 수 없음을 알 수 있다.

이러한 역산란문제에서 해의 비유일성을 해결하는 방안으로 $x=x_0$선상에서 측정되는 산란전계의 정보량을 늘이는 것을 생각할 수 있다. 입사파 u^i의 입사방향을 바꾸거나 입사파형을 바꾸어서 Q개의 서로 다른 입사파를 각각 유전체에 인가시키고, 그 각각의 경우 산란전계를 $x=x_0$선상의 L개의 점에서 측정하면 총 LQ개의 초기자료를 얻을 수 있으므로 MN = LQ되도록 Q를 취하면 유일한 해를 얻을 것으로 보인다. 그러나 식(1)에서 입사파 u^i가 바뀌면 유전체 내부에 유기되는 전계 u도 달라져서, mn번째 cell의 등가유기전류 P_{mn}도 달라지게 된다. 따라서 입사파를 서로 다른 Q개 취하면 $x=x_0$선상에서 L개 sampling한 산란전계에 대한 총 자료수는 LQ개가 되지만, 식(11)에서의 P_{mn}에 대해 미지수 또한 총 MNQ 개가 되어 원래 입사파가 하나인 경우와 마찬가지로 비유일성 문제가 해결되지 않는다. 이는 마치 비유일성을 가진 원 문제를 독립적으로 각각 Q번 푸는 것과 같다.

역산란 문제에서 해의 비유일성을 해결하는 또 다른 방안으로 입사파 u^i의 주파수를 서로 다른 Q개로 취하여 각각의 산란파를 측정하는 것을 생각할 수 있다. 그러나 이 방안 역시 영역 S내의 비유전율 $\varepsilon(x, y)$가 주파수에 독립이라고 가정하더라도 유기되는 전계가 주파수에 따라 달라지므로 앞의 방안과 마찬가지로 유일한 해를 얻을 수 없다.

Ⅳ. 결 론

모든 역산란문제에 내재한 수학적인 결함인 역산란 해의 비유일성을 파수영역에서 유도한 역산란 계산방법으로 간단히 검증하였다. 본 논문에서 사용한 역산란 계산식은 다원 일차 선형방정식으로 미지수의 갯수가 방정식의 수보다 많으면 무한개의 해가 존재하게 되는데, 역산란 문제를 푸는 첫단계인 산란파의 측정갯수(방정식 수)에 비해 구해야 할 산란체 내부에 유기되는 등가전원의 정보수(미지수의 갯수)가 항상 많아서 유일한 등가전원을 구할 수 없음을 보였다. 일반적으로 이러한 비유일한 등기전원을 비복사 전원이라고 하는데, 어떠한 조건을 부가해야 비유일한 등가전원을 제거할 수 있는가가 큰 쟁점으로 되어 있다.[11,12] 본 논문에서도 직관적으로 생각할 수 있는 조건인 산란파의 측정점을 늘이거나 입사파의

방향, 파형, 주파수등을 여러가지로 변형하여 다중 입사시키는 방안을 살펴보았지만, 이들 방안 모두 비복사 전원을 제거할 수 없음을 보였다. 앞으로도 역산란 문제에서 해의 유일성을 보장하는 물리적으로 타당한 부가조건에 대한 연구가 계속되어야 할 것이다.

參 考 文 獻

[1] L. Collin, Ed., *Proc. of the Workshop on Mathemations of Profile Inversion,* Ames Research Center, Moffett field, CA, NASA Tech, Memo. x-62. 150, 1972.

[2] B.J. Hoenders, "The uniqueness of inverse problems," in *Inverse Source Problems in Optics,* H.P. Baltes, Ed., Springer, Berlin, pp. 43-82, 1978.

[3] N. Bleistein and J.K. Cohen, "Nonuniquences in the inverse source problem in acoustics and electromagnetics," *J. Math. Phys.* vol. 18, pp. 194-201, 1977.

[4] A.J. Devaney and E. Wolf, "Radiating and nonardiating classical current distributions and the fields they generate," *Phys. Rev. A.*, vol. 8, pp. 1044-1047, 1973.

[5] M.M. Ney, A.M. Smith, and S.S. Stuchly, "A solution of electromagnetic imaging using pseudo inverse transformation," *IEEE Trans. Medical Imaging,*, vol. 3, pp. 155-162, 1984.

[6] 김세윤, 이재민, 나정웅, "모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산 방법, I : 이론", 전자공학회논문지, 제25권, 제3호, pp. 6-14, 1988

[7] J.M. Lee, S.Y. Kim, and J.W. Ra, "Spectral inverse Technique for reconstruction of complex permittivity profiles," Electron. Lett., vol. 24, pp. 556-558, 1988.

[8] 김세윤, 이재민, 나정웅, "파수영역에서 모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란방법, I: 이론," 전자공학회논문지, 제25권, 제10호, pp. 1-9, 1988

[9] 최현철, 김세윤, 나정웅, "급수전개된 Basis를 갖는 모멘트 방법에 의한 파수영역의 역산란 방법, II부 : 수치계산," 전자공학회논문지, 제25권, 제11호, pp. 125-134, 1988

[10] H.C. Choi, S.Y. Kim, and J.W. Ra, "Regularization of permittivity profiles reconstructed by a spectral inverse scattering scheme," Microwave Opt. Tech. Lett., vol. 2, pp. 26-29, 1989.

[11] A.J. Devaney and G.C. Sherman, "Nonuniqueness in inverse source and scattering problems," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 30, pp. 1034-1037, 1982.

[12] W.R. Stone, "A review and examination of results on uniqueness in inverse problems," Radio Science, vol. 22, pp. 1026-1030, 1987.

著 者 紹 介

金 世 潤 (正會員) 第25卷 第8號 參照.
현재 한국과학기술연구원
응용전자연구실 선임연구원.

羅 正 雄 (正會員) 第25卷 第8號 參照
현재 한국과학기술원 전기 및
전자공학과 교수