

상태케환을 이용한 상호 결합된 시스템의 새로운 비집중 안정화 방법

(A New Stabilization Method for a Class of Interconnected Systems By Using Local State Feedback)

蔡 錫*, 卞 增 男**

(Seog Chae and Zeung Nam Bien)

要 約

부시스템의 상태벡터를 케환시킴으로써 상호 결합된 시스템을 안정화하는 새로운 비집중 안정화 방법이 제시된다. 제안된 방법에서는 제어를 두 개의 과정으로 설계한다. 첫째로, 각각의 고립된 부시스템의 고유치들이 복소수 평면 상에서 원하는 위치에 놓이도록 케환이득을 일시적으로 결정한 다음, 둘째로, 전체 페-루프 시스템의 Lyapunov 함수 후보의 시간도함수가 음의 값을 갖도록 케환이득을 보상한다. 전체 페-루프 시스템의 안정을 보장하는 하나의 충분조건이 제시된다.

Abstract

A new stabilization scheme is proposed in which the local state feedback is utilized in each decentralized controller for large-scale interconnected systems. In the proposed scheme, the controller is designed in two steps. First, the feedback gain of each decentralized controller is temporarily chosen so that the eigenvalues of each isolated subsystem are placed at the desired locations in the complex plane. Secondly, the feedback gain of each controller is compensated so that the time derivative of the Lyapunov function candidate for the overall closed-loop system should be negative. A sufficient condition which assures the global system to stable is given.

I. 서 론

여러개의 부시스템들이 상호결합된 형태로 모델링 되는 대규모 시스템을 효과적으로 제어하기 위한 여러가지 방법들이 제안되었다. 특히 시스템의 신뢰도

및 실질적인 제어기의 구현 관점에서 대규모의 상호 결합된 시스템을 비집중화 기법으로 안정화하는 문제가 관심있게 다루어져 왔다.¹⁻¹⁶

부시스템들의 상태벡터가 측정 가능한 경우에는 부시스템의 상태벡터를 케환에 이용함으로써 전체 시스템을 안정화하는 여러가지 비집중 안정화 제어 방법들이 제안되었으며,²⁻¹⁵ 비집중화 기법으로 전체 시스템이 안정되게 할 수 있느냐는 판단기준은 대부분 충분조건으로 기술되며 두가지의 형태로 나눌 수 있다.

*正會員, 金烏工科大學 電子制御工學科
(Dept. of Elec. & Cont. Eng., Kum Oh Institute of Technology)

**正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字: 1989年 7月 10日

한 형태의 안정화 가능성 판단기준은 상호 결합행렬의 형태(interconnection pattern)에 관련된 부등식이나 또는 행렬의 rank조건으로 기술된다.^{3,5,7,10} 상호 결합행렬이 어떤 특수한 형태인 시스템에 대하여는 상호결합의 강도에 관계없이 부등식이나 행렬의 rank조건이 만족되므로 이 방법으로 전체 시스템을 안정화할 수 있으며 또한 안정화 가능성 판단기준의 계산과정이 매우 간단하다는 장점이 있다. 그러나 부시스템이 매우 약하게 상호 결합된 경우라도 부등식이나 행렬의 rank조건이 만족되지 않는 경우에는 상호결합 행렬의 형태에 의한 안정화 가능성 판단은 불가능하다는 단점이 있다.

다른 한 형태의 안정화 판단기준은 상호 결합항의 크기제한(norm bound)에 관련된 부등식이나 행렬의 positive definiteness으로 기술되며,^{2,4,9,10} 일반적으로 부시스템이 강하게 상호 결합된 경우 이 방법으로는 안정화 가능성 판단을 할 수 없다. 충분조건으로 기술되는 안정화 판단기준을 유도하는 과정에서 Lyapunov 함수 접근 방식을 사용하는 경우에, 기존의 방법에서는 고립된 페-루프 부시스템들의 고유치들이 복소수 평면 상에서 원하는 위치에 놓이도록 제한이득을 결정한 후, 결정된 제한 이득을 갖는 페-루프 시스템의 안정성을 테스트한다. 그러므로 전체 페-루프 시스템의 동작모드는 고립된 페-루프 시스템의 동작모드를 원하는 모드로 결정하여도 상호결합 때문에 고립된 페-루프 시스템의 동작모드와는 다르다.

본 논문에서는, 비집중 상태제한을 이용하여 상호 결합된 시스템을 안정화할 때 제어기를 두개의 과정으로 설계하는 새로운 안정화 제어방법이 제안된다. 제안된 안정화 제어 방법에서는, 첫째로, 고립된 페-루프 시스템의 고유치들이 복소수 평면상에서 원하는 위치에 놓이도록 제한이득을 일시적으로 결정한 후, 둘째로, 전체 페-루프 시스템에 대한 Lyapunov 함수 후보의 시간 도함수가 음의 값을 갖도록 제한이득을 보상한다. 제한이득을 전체 페-루프 시스템의 관점에서 결정함으로써 시스템이 안정되도록 하는 제어방법이다. 또한 제안된 방법을 채택할 때 전체 페-루프 시스템의 안정을 보장하는 충분조건이 제시된다.

본 논문에서 사용되는 기호에서, x^T 는 벡타 x 의 Transpose를, A^T 는 행렬 A 의 Transpose를, A^{-1} 는 정방 행렬 A 의 역행렬을, $\lambda_m(A)$ 는 정방 행렬 A 의 최소 고유치를, $\lambda_M(A)$ 는 정방 행렬 A 의 최대 고유치를, $\|x\|$ 는 유한 차원의 벡타 x 의 Euclidean norm을, $\|A\|$ 는 $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ 으로 정의되

는 $n \times m$ 행렬 A 의 Euclidean norm을, $\|A\|_s$ 는 $\|A\|_s = \sqrt{\lambda_M(A^T A)}$ 으로 정의되는 행렬 A 의 Spectral norm을 I_n 는 n -차원의 identity matrix를, R^n 는 n -차원의 벡타공간을 나타낸다.

2. 문제 설정

전체 시스템이 N 개의 상호결합된 부시스템 $\&_1, \&_2, \dots, \&_N$ 으로 구성되며 다음의 (2-1)식으로 기술되는 대규모시스템을 생각하자.

$$\&_i : \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + D_i z_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2-1)$$

여기서, $x_i \in R^{n_i}$ 는 부시스템 $\&_i$ 의 상태벡타를, $u_i \in R^{r_i}$ 는 부시스템 $\&_i$ 의 입력벡타를 나타낸다. $z_i \in R^{q_i}$ 는 부시스템 $\&_i$ 이외의 나머지 부시스템들 $\&_j, j \neq i$ 의 상태 변수 중 실제적으로 부시스템 $\&_i$ 에 연결된 상태 변수들로 구성된 q_i 차원의 벡타를 나타낸다. 또한 (2-1)식에서, A_i, B_i 그리고 D_i 는 원소들이 일정한 값인 적당한 차원의 행렬들이다. (2-1)식으로 기술되는 시스템에서 다음 사항을 가정한다.

- (A-1) 각각의 고립된 부시스템은 완전히 제어가능이다.
- (A-2) B_i 와 D_i 의 rank는 각각 r_i 와 q_i 이다.
- (A-3) 상태 벡타 x_i 는 측정가능하고 피이드백에 이용할 수 있다.

이제 문제는 비집중 상태제한 방법으로 상호 결합된 시스템 (2-1)이 안정되도록 비집중 제어입력을 결정하는 것이다.

((주 2-1))

대부분의 경우, 상호 결합항은 $\sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j$ 으로 표시하나 본 논문에서는 $\sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j$ 대신 $D_i z_i$ 으로 기술한다. 여기서 z_i 는 부시스템 $\&_i$ 이외의 나머지 부시스템들의 상태변수중 실제적으로 부시스템 $\&_i$ 에 연결된 상태변수들로 구성된 벡타이므로 (A-2) 가정중 D_i 의 rank가 q_i 라는 것은 시스템 표기 관점에서 자연스럽다.

3. 상태 제한을 이용한 비집중 안정화 제어기의 설계

(2-1)식으로 기술되는 상호 결합된 시스템을 비집중 상태제한으로 안정화하기 위하여 다음의 (3-1)식으로 기술되는 비집중 제어입력을 사용한다.

$$u_i = -K_i^1 x_i + u_i^c, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-1)$$

여기서, K_i^1 은 $(r_i \times n_i)$ 의 케환이득 행렬이고, u_i^c 는 전체 폐-루프 시스템의 Lyapunov 함수 후보의 시간도함수가 음의 값을 갖도록 나중에 결정한다.

(3-1) 식으로 기술되는 비집중 제어입력을 상호 결합된 시스템 (2-1)에 인가하면 시스템은 아래의 (3-2) 식으로 기술된다.

$$\dot{x}_i = A_i^0 x_i + B_i u_i^c + D_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-2)$$

여기서

$$A_i^0 = A_i - B_i K_i^1 \quad (3-3)$$

이다.

행렬 쌍 (A_i, B_i) 가 제어가능이면, 시스템 (3-2)의 고립된 부시스템은 제어가능이다.⁽¹⁾

(A-1) 가정에 의하여 행렬 쌍 (A_i, B_i) 가 제어 가능이므로, A_i^0 의 고유치들이 복소수 평면상에서 원하는 위치에 놓이도록 K_i^1 을 선택할 수 있고,⁽¹⁾ 선택된 값을 K_i^* 라고 하자. 그러면 전체 폐-루프 시스템은 다음의 (3-4) 식으로 표현된다.

$$\dot{x}_i = A_i^* x_i + B_i u_i^c + D_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-4)$$

여기서 A_i^* 는

$$A_i^* = A_i - B_i K_i^* \quad (3-5)$$

으로 안정한 행렬이다.

주어진 positive definite한 대칭 행렬 Q_i^* 에 대하여 아래의 Lyapunov 방정식 (3-6)의 유일하고 positive definite한 해를 P_i^* 라고 하자.

$$A_i^{*T} P_i^* + P_i^* A_i^* = -Q_i^* \quad (3-6)$$

이제, 상호 결합된 시스템 (2-1)을 전체시스템의 관점에서 안정화하기 위하여 아래의 (3-7) 식으로 주어지는 $u_i^c, i = 1, \dots, N$ 를 시스템 (3-4)에 인가한다.

$$u_i^c = -K_i^2 x_i \quad (3-7)$$

그러면 전체 폐-루프 시스템은 아래의 (3-8) 식으로 기술된다.

$$\dot{x}_i = (A_i^* - B_i K_i^2) x_i + D_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-8)$$

여기서 A_i^* 는 (3-5) 식으로 주어진다.

아래의 (3-9) 식과 같이 정의되는 양의 함수 $v_i(x_i)$ 를 생각하자.

$$v_i(x_i) = x_i^T P_i^* x_i \quad (3-9)$$

여기서 P_i^* 는 (3-6) 식의 해이다.

x_i 는 (3-8) 식의 해이므로 $v_i(x_i)$ 의 시간도함수는 다

음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= x_i^T \{ (A_i^{*T} P_i^* + P_i^* A_i^*) x_i - x_i^T \} (B_i K_i^2)^T P_i^* + P_i^* (B_i K_i^2) \{ x_i \\ &\quad + 2x_i^T P_i^* D_i z_i \\ &\leq x_i^T \{ (A_i^{*T} P_i^* + P_i^* A_i^*) x_i - x_i^T \} (B_i K_i^2)^T P_i^* + P_i^* (B_i K_i^2) \{ x_i \\ &\quad + 2 \| x_i \| \| P_i^* D_i \| \| z_i \| \end{aligned} \quad (3-10)$$

한편 z_i 는 부시스템 $\&_i$ 를 제외한 나머지 부시스템들의 상태변수중 실제적으로 부시스템 $\&_i$ 에 연결된 상태 변수들로 구성된 벡타이므로, 다음의 (3-11) 식과 같은 부등식이 성립한다.

$$\| z_i \| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^N \| x_j \| \quad (3-11)$$

부등식 (3-11)을 이용하면, 부등식 (3-10)의 오른쪽 3번째 항은 다음의 부등식 (3-12)를 만족한다.

$$\begin{aligned} 2 \| x_i \| \| P_i^* D_i \| \| z_i \| &\leq \| P_i^* D_i \| \| z_i \| 2 \| x_i \| \sum_{j=1, j \neq i}^N \| x_j \| \\ &\leq \| P_i^* D_i \| \| z_i \| \sum_{j=1, j \neq i}^N (\| x_i \|^2 + \| x_j \|^2) \\ &= \| P_i^* D_i \| \| z_i \| (N-2) \| x_i \|^2 + \sum_{j=1}^N \| x_j \|^2 \end{aligned} \quad (3-12)$$

전체 폐-루프 시스템 (3-8)의 Lyapunov 함수의 후보로서 다음의 (3-13) 식과 같은 양의 함수를 생각하자.

$$V(x) = \sum_{i=1}^N v_i(x_i) \quad (3-13)$$

여기서 $v_i(x_i)$ 는 (3-9) 식으로 주어지며, $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$ 이다.

(3-10) 식, (3-12) 식 및 (3-13) 식을 이용하면, $V(x)$ 의 시간도함수는 다음의 (3-14) 식과 같은 부등식 관계를 만족한다(유도 과정은 부록-A에 있음).

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N x_i^T \{ (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^2)^T P_i^* \\ &\quad + P_i^* (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^2) \} x_i \end{aligned} \quad (3-14)$$

여기서 π_i 는 다음의 (3-15) 식으로 계산된다.

$$\pi_i = \frac{1}{2} \frac{(N-2) \| P_i^* D_i \| \| z_i \| + \sum_{j=1}^N \| P_j^* D_j \| \| z_j \|}{\lambda_m(P_i^*)} \quad (3-15)$$

부등식 (3-14) 및 (3-15) 식에서 P_i^* 는 Lyapunov 방정식 (3-6)의 해이다.

(3-8) 식의 전체 폐-루프 시스템이 안정하기 위한

충분조건은 부등식 (3-14)로 부터

$$(A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^*)^T P_i^* + P_i^* (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^*), \\ i = 1, 2, \dots, N$$

를 negative definite로 하는 $K_i^*, i = 1, 2, \dots, N$ 가 존재하는 것이다. 여기서 P_i^* 는 (3-6)식의 해이고 π_i 는 (3-15)식으로 계산된다.

부등식 (3-14)의 오른쪽 소괄호 안을 관찰해보면, 상태 제환 제어에서 흔히 볼 수 있는 형태임을 알 수 있다. 행렬 쌍 (A_i, B_i) 와 행렬 쌍 $(A_i^* + \pi_i I_{n_i}, B_i)$ 사이의 가제어성 관계는 보조정리 3-1로 기술된다.

(〈보조정리 3-1〉)

행렬 쌍 $(A_i^* + \pi_i I_{n_i}, B_i)$ 가 제어가능이기 위한 필요충분 조건은 행렬 쌍 (A_i, B_i) 가 제어가능인 것이다. 여기서 A_i^* 는 (3-5)식으로 주어지고 π_i 는 실수이다.

보조정리 3-1의 증명은 부록-B에 있다.

행렬 쌍 $(A_i^* + \pi_i I_{n_i}, B_i)$ 가 제어가능이므로, $(A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^*)$ 의 고유치들이 복소수 평면 상에서 원하는 위치에 놓이도록 K_i^* 값을 선택할 수 있고 선택된 값을 K_i^{*} 라고 하자. 그러면 $(A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*})$ 는 안정한 행렬이다.

주어진 positive definite한 행렬 Q_i 에 대하여 다음의 Lyapunov 방정식 (3-16)의 유일하고 positive definite한 해를 P_i 라고 하자.

$$(A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*})^T P_i + P_i (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*}) \\ = -Q_i \quad (3-16)$$

결과적으로 부시스템의 제어입력은 다음의 (3-17)식으로 결정된다.

$$u_i = -K_i^* x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3-17)$$

여기서 $K_i^* = K_i^1 + K_i^2$ 이다.

(3-17)식과 같은 비집중 제어입력의 사용으로 (2-1)식과 같이 기술되는 상호 결합된 시스템을 안정화시킬 수 있는 충분조건은 다음의 정리 3-1로 기술된다.

(〈정리 3-1〉)

각각의 $i = 1, 2, \dots, N$ 에 대하여, 행렬 쌍 (A_i, B_i) 가 제어가능이고 Γ_i 가 다음의 (3-18)식으로 주어진다고 하자.

$$\Gamma_i = Q_i^* - (-B_i K_i^{*} + \pi_i I_{n_i})^T P_i^* \\ - P_i^* (-B_i K_i^{*} + \pi_i I_{n_i}) \quad (3-18)$$

여기서 P_i^* 는 (3-6)식의 해이고 π_i 는 (3-15)식에 의하여 계산된다.

만일 (3-18)식으로 주어지는 Γ_i 가 positive definite하면, (2-1)식으로 기술되는 상호 결합된 시스템은 (3-17)식과 같은 비집중 제어를 사용으로 안정화 가능하고 또한 전체 폐-루프 시스템은

$$\dot{\hat{x}}_i = (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*}) \hat{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

으로 기술되는 시스템의 안정도를 보장받는다.

정리 3-1의 증명 과정에서 아래의 보조정리 3-2가 이용된다.

(〈보조정리 3-2〉)^[17]

행렬 A^* 는 고유치들의 실수부분이 모두 음의 값을 갖는 행렬이라고 하자. 하나의 주어진 실수의 대칭 행렬 M 에 대하여, 다음 방정식

$$A^{*T}R + RA^* = -M$$

의 유일한 해 R 는 다음과 같다.

$$R = \int_0^\infty \exp(A^{*T}t) M \exp(A^*t) dt$$

(〈정리 3-1의 증명〉)

행렬 쌍 $(A_i^* + \pi_i I_{n_i}, B_i)$ 가 제어가능이므로, $(A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*})$ 의 고유치들은 음의 실수부분을 갖는다. 만일 (3-18)식으로 주어지는 positive definite한 Γ_i 가 존재하면 $Q_i = \Gamma_i$ 로 선택할 수 있으므로, (3-16)식은 다음의 (3-19)식으로 다시 쓸 수 있다.

$$(A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*})^T P_i + P_i (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*}) \\ = -Q_i^* + (-B_i K_i^{*} + \pi_i I_{n_i})^T P_i^* \\ + P_i^* (-B_i K_i^{*} + \pi_i I_{n_i}) \quad (3-19)$$

(3-19)식에서 (3-6)식을 빼 결과로 다음의 (3-20)식을 얻는다.

$$(A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*})^T (P_i - P_i^*) \\ + (P_i - P_i^*) (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{*}) = 0 \quad (3-20)$$

보조정리 3-2에 의하여, (3-20)식의 유일한 해는 $P_i - P_i^* = 0$ 이다. 즉 (3-16)식의 해와 (3-6)식의 해는 같다. 따라서 전체 폐-루프 시스템에 대한 Lyapunov 함수의 시간 도함수가 만족하는 부등식 (3-14)는 다음의 부등식 (3-21)로 쓸 수 있다.

$$V \leq \sum_{i=1}^N x_i^T (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{2*})^T P_i + P_i (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{2*}) x_i \quad (3-21)$$

부등식 (3-21)의 오른쪽에 있는 중괄호 안의 행렬은 negative definite로 되므로, (2-1)식으로 기술되는 상호 결합된 시스템은 비집중 제어입력 (3-17)의 사용으로 안정화 될 수 있다. 또한 부등식 (3-21)로부터 전체 폐-루프 시스템은

$$\dot{\hat{x}}_i = (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^{2*}) \hat{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

으로 기술되는 시스템의 안정도를 보장받는다.

((주 3-1))

기존의 방법^{3,4,6}은 제환이득을 $K_i = K_i^1$, $K_i^2 = 0$ 으로 선택하는 것과 같으므로 여기서 제안한 방법의 특별한 경우이다.

((주 3-2))

기존의 방법^{3,4,6}에서는 충분조건이 만족될 때 시스템이 안정하다는 사실외에는 시스템의 안정도를 알 수 없으나, 여기서는 전체 시스템의 안정도를 정리 3-1에 의하여 알 수 있다.

4. 예

2개의 부시스템 &1과 &2가 상호 결합되어 다음 식으로 기술되는 불안정한 시스템을 생각하자.

$$\&1: \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} x_2 \quad (4-1a)$$

$$\&2: \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} x_1 \quad (4-1b)$$

여기에서, 상태 벡터 x_1 과 x_2 는 제환에 이용할 수 있다고 가정한다. 2절에서 기술한 바와 같이 각각의 부시스템은 (4-2)식으로 표시할 수 있다.

$$\&1: \dot{\hat{x}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} z_i, \quad i = 1, 2 \quad (4-2)$$

여기서 $z_1 = x_{2,2}$ 이고 $z_2 = x_{1,2}$ 이다.

(4-1a)식과 (4-1b)식으로 기술되는 상호 결합된 시스템을 비집중 상태제환으로 안정화시키기 위하여, 아래의 (4-3)식과 같은 비집중 제어 입력을 (4-2)식으로 표시되는 시스템에 인가한다.

$$u_i = -K_i^1 x_i + u_i^c, \quad i = 1, 2 \quad (4-3)$$

여기서 $K_i^1 = [K_{i,1}^1 \ K_{i,2}^1]$ 이다.

A_i^* 의 고유치들이 복소수 평면상에서 $-1 + j1$ 및 $-1 - j1$ 에 위치하도록 $K_i^{1*} = K_i^1 = [4.0 \ 7.0]$ 으로 선택한다. 그 결과로 시스템은 다음의 (4-4)식과 같이 기술된다.

$$\dot{\hat{x}}_i = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_i^c + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} z_i, \quad i = 1, 2 \quad (4-4)$$

$Q_1^* = Q_2^* = \text{diag}(3, 3)$ 으로 선택하면, (3-6)식으로 부터

$$P_1^* = P_2^* = \begin{bmatrix} 1.5 & 3.0 \\ 3.0 & 13.5 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

를 얻는다.

둘째로, 시스템 (4-4)에 다음의 (4-6)식과 같은 u_i^c , $i = 1, 2$ 를 인가한다.

$$u_i^c = -K_i^2 x_i \quad (4-6)$$

결과로 전체 폐-루프 시스템은 다음의 (4-7)식과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\hat{x}}_i = \left[\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} K_i^2 \right] x_i + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} z_i, \quad i = 1, 2 \quad (4-7)$$

여기서 $K_i^2 = [K_{i,1}^2 \ K_{i,2}^2]$ 이다.

전체 폐-루프 시스템 (4-7)의 Lyapunov 함수 후보로서 다음의 양의 함수(positive function)를 생각하자.

$$V(x) = \sum_{i=1}^2 v_i(x_i)$$

여기에서 $v_i(x_i) = x_i^T P_i^* x_i$ 이고, P_i^* 는 (4-5) 식으로

주어지며, $x = [x_1^T \ x_2^T]^T$ 이다.

(3-15)식으로 부터 $\pi_i = 0.4321$ 이고 x_i 는 (4-7)식의 해이므로 $V(x)$ 의 시간도함수는 다음의 부등식 (4-8)를 만족한다.

$$V \leq \sum_{i=1}^2 x_i^T \left\{ \left[\begin{array}{cc} -2.5679 & -5 \\ 1 & 1.4321 \end{array} \right] - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} K_i^* \right\} P_i^* + P_i^* \left\{ \left[\begin{array}{cc} -2.5679 & -5 \\ 1 & 1.4321 \end{array} \right] - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} K_i^* \right\} x_i \quad (4-8)$$

여기에서 P_i^* 는 (4-5)식의 값이다.

$(A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^*)$ 의 고유치들이 복소수 평면상에서 $-1 + j1$ 과 $-1 - j1$ 에 위치하도록 $K_i^* = K_i^{* *} = [0.8642 \ 1.9151]$ 로 선택하면, (3-18)식으로 부터 다음의 (4-9)식과 같은 positive definite인 Γ_i 를 얻는다.

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 4.2963 & 2.8727 \\ 2.8727 & 2.8240 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (4-9)$$

Q_i 를 Γ_i 로 선택하면, (3-20)식의 해는 $P_i - P_i^* = 0$ 이고 (4-8)식은 다음의 (4-10)식과 같이 된다.

$$V \leq - \sum_{i=1}^2 x_i^T \begin{pmatrix} 4.2963 & 2.8727 \\ 2.8727 & 2.8240 \end{pmatrix} x_i \quad (4-10)$$

부등식 (4-10)의 오른쪽은 음이므로 $V(x)$ 는 Lyapunov 함수가 된다. 부시스템의 제어 입력 $u_i = -(K_i^* + K_i^{* *})x_i$, $i = 1, 2$ 의 사용으로 (4-1a)식과 (4-1b)식으로 기술되는 시스템을 안정화할 수 있다.

기존의 방법에서는^[2,4,6], 케환이득을 $K_i = K_i^* = [4.0 \ 7.0]$, $K_i^* = 0$ 으로 선택하므로 전체 폐-루프 시스템은 아래의 (4-11a)식과 (4-11b)식으로 기술된다.

$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix} x_2 \quad (4-11a)$$

$$\dot{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix} x_1 \quad (4-11b)$$

여기서 제안한 방법으로 하면 전체 폐-루프 시스템은 아래의 (4-12a)식과 (4-12b)식으로 기술된다.

$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} -3.8642 & -6.9151 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix} x_2 \quad (4-12a)$$

$$\dot{x}_2 = \begin{pmatrix} -3.8642 & -6.9151 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix} x_1 \quad (4-12b)$$

그림 4-1은 기존의 방법^[2,4,6]에 의한 폐-루프 시스템 (4-11)의 응답 특성과 여기서 제안한 방법에 의한 폐-루프 시스템 (4-12)의 응답 특성을 나타낸다. 그림 4-1에서 알 수 있는 바와 같이 여기서 제안된 방법을 사용하면 안정화 관점에서 응답 특성이 개선되는 것을 알 수 있다.

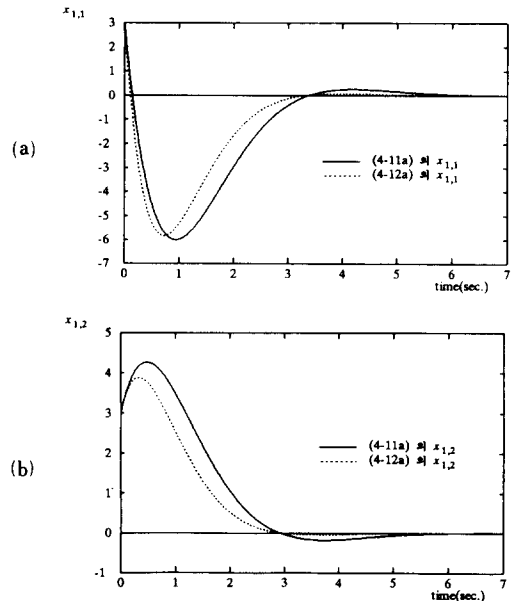


그림 4-1. 시스템 (4-11)과 시스템(4-12)의 응답 특성

(a) 시스템 (4-11a)와 (4-12a)의 $x_{1,1}$

(b) 시스템 (4-11a)와 (4-12a)의 $x_{1,2}$

Fig. 4-1. Response characteristics of systems (4-11) and (4-12).

(a) $x_{1,1}$ of (4-11a) and (4-12a)

(b) $x_{1,2}$ of (4-11a) and (4-12a)

V. 결과 고찰

비집중 상태제환을 이용하여 대규모의 상호 결합된 시스템을 안정화하는 새로운 안정화 방법을 제안하였으며, 예제로서 응답특성이 개선되는 것을 확인하였다. 제안된 방법에서는, 제환이득을 두 개의 과정으로 결정한다. 첫째로, 고립된 페-루프 시스템의 고유치들이 복소수 평면상에서 원하는 위치에 놓이도록 제환이득을 일시적으로 결정한 후, 둘째로, 전체 페-루프 시스템의 Lyapunov 함수 후보의 시간도함수가 음의 값을 갖도록 제환이득을 보상한다. 제안된 비집중 제어를 사용할 때 전체 페-루프 시스템의 안정을 보장하는 충분조건을 제시하였다. 여기서 제안한 방법의 장점은 전체 시스템의 관점에서 제환이득을 결정함으로써 시스템의 안정 특성을 향상시킬 수 있다는 것과 전체 시스템의 안정도를 알 수 있는 것이다.

부록-A : <(3-14)식의 유도>

(3-13)식으로 주어지는 양의 함수 V(x)를 생각하자. V(x)의 시간 도함수는 다음의 (A-1)식으로 표시된다.

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^N \dot{v}_i(x_i) \tag{A-1}$$

(3-10)식의 오른쪽 3번째 항은 부등식 (3-12)를 만족하므로, $\dot{v}_i(x_i)$ 는 아래의 부등식(A-2)를 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(x_i) \leq & x_i^T (A_i^T P_i^* + P_i^* A_i^*) x_i - x_i^T \{ (B_i K_i^*)^T P_i^* \\ & + P_i^* (B_i K_i^*) \} x_i + \| P_i^* D_i \|_s \{ (N-2) \| x_i \|^2 \\ & + \sum_{j=1}^N \| x_j \|^2 \} \end{aligned} \tag{A-2}$$

$\dot{v}_i(x_i)$ 가 부등식 (A-2)를 만족하므로 (A-1)식을 이용하면 $\dot{V}(x)$ 는 아래의 부등식(A-3)을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & \sum_{i=1}^N \{ x_i^T (A_i^* P_i^* + P_i^* A_i^*) x_i - x_i^T \{ (B_i K_i^*)^T P_i^* \\ & + P_i^* (B_i K_i^*) \} x_i \} + \sum_{i=1}^N \| P_i^* D_i \|_s \\ & \{ (N-2) \| x_i \|^2 + \sum_{j=1}^N \| x_j \|^2 \} \end{aligned} \tag{A-3}$$

(A-3)식의 오른쪽 두번째 항을 정리하여 다시 쓰면 (A-4)식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \| P_i^* D_i \|_s \{ (N-2) \| x_i \|^2 + \sum_{j=1}^N \| x_j \|^2 \} \\ & = \sum_{i=1}^N \{ (N-2) \| P_i^* D_i \|_s + \sum_{j=1}^N \| P_j^* D_j \|_s \} \\ & \| x_i \|^2 \end{aligned} \tag{A-4}$$

한편 $x_i^T P_i^* x_i$ 는 잘 알려진 아래의 부등식 (A-5)를 만족한다.

$$\lambda_m(P_i^*) \| x_i \|^2 \leq x_i^T P_i^* x_i \leq \lambda_M(P_i^*) \| x_i \|^2 \tag{A-5}$$

부등식 (A-5)를 이용하면 (A-4)식의 오른쪽 항은 아래의 부등식 (A-6)을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \| P_i^* D_i \|_s \{ (N-2) \| x_i \|^2 + \sum_{j=1}^N \| x_j \|^2 \} \\ & \leq \sum_{i=1}^N x_i^T \frac{(N-2) \| P_i^* D_i \|_s + \sum_{j=1}^N \| P_j^* D_j \|_s}{\lambda_m(P_i^*)} x_i \end{aligned} \tag{A-6}$$

부등식 (A-3)의 오른쪽 두번째 항이 부등식 (A-6)을 만족하므로, 부등식 (A-3)은 아래의 부등식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^N x_i^T \{ (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^*)^T P_i^* \\ & + P_i^* (A_i^* + \pi_i I_{n_i} - B_i K_i^*) \} x_i \end{aligned} \tag{3-14}$$

여기서 $\pi_i = \frac{1}{2} \frac{(N-2) \| P_i^* D_i \|_s + \sum_{j=1}^N \| P_j^* D_j \|_s}{\lambda_m(P_i^*)}$

이다.

부록-B : <보조정리 3-1의 증명>

S_i, S_i^* 및 S_i^{**} 를 아래의 행렬로 정의하자.

$$S_i = [B_i \ A_i B_i \ A_i^2 B_i \ \dots \ A_i^{n_i-1} B_i] \tag{B-2}$$

$$S_i^* = [B_i \ A_i^* B_i \ A_i^{*2} B_i \ \dots \ A_i^{*n_i-1} B_i] \tag{B-2}$$

$$\begin{aligned} S_i^{**} = & [B_i (A_i^* + \pi_i I_{n_i}) B_i \ (A_i^* + \pi_i I_{n_i})^2 B_i \ \dots \\ & \dots (A_i^* + \pi_i I_{n_i})^{n_i-1} B_i] \end{aligned} \tag{B-3}$$

한편 $(A_i^* + \pi_i I_{n_i})^m$ 은 아래의 (B-4)식으로 전개된다.

$$(A_i^* + \pi_i I_{n_i})^m = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} (A_i^*)^k (\pi_i I_{n_i})^{m-k} \tag{B-4}$$

[5] I. Popchev and S. Savov, "An approach to the decentralized stabilization of linear continuous-time large scale systems," *Large Scale Systems*, vol. 13, pp. 131-144, 1987.

[6] M.E. Sezer and O. Huseyin, "Stabilization of Linear Time-Invariant Interconnected Systems Using Local State Feed-back," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cyber.*, vol. SMC-8, no. 10, pp. 751-756, 1978.

[7] Z.C. Shi and W.B. Gao, "Stabilization by decentralized control for large scale interconnected systems," *Large Scale Systems*, vol. 10, pp. 147-155, 1986.

[8] D.D. Siljak, *Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*, North-Holland Inc., New York, 1978.

[9] D.D. Siljak and M.B. Vukcevic, "Decentrally stabilizable linear and bilinear large-scale systems," *Int. J. Control*, vol. 26, no. 2, pp. 289-305, 1977.

[10] M.K. Sundareshan, "Exponential stabilization of large-scale systems: Decentralized and multilevel schemes," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cyber.*, vol. SMC-7, pp. 478-483, 1977.

[11] M.F. Hassan and M.G. Singh, "Controllers for linear interconnected dynamical systems with prespecified degree of stability," *Int. J. Syst. and Sci.*, vol. 10, p. 339-350, 1979.

[12] Z.C. Shi and W.B. Gao, "On decentralized stabilization of large-scale interconnected systems," *Large Scale Systems*, vol. 13, pp. 187-190, 1987.

[13] 채 석, 상호 연결된 부시스템으로 구성되는 대규모 시스템의 비집중 안정화에 관한 연구, 박사 학위 논문, 한국과학기술원, 1989.

[14] W. Batchmann, "On decentralized output feedback stabilizability," *Large Scale Systems*, vol. 4, pp. 165-176, 1983.

[15] B. Shahian, "Decentralized control using observers," *Int. J. Control*, vol. 44, pp. 1125-1135, 1986.

[16] C.C. Wong and B.S. Chen, "Stabilization of large-scale systems via observercontroller compensator: frequency domain approach," *Int. J. Control*, vol. 45, pp. 1633-1647, 1988.

[17] M. Vidyasagar., *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New York, 1978.

著 者 紹 介



蔡 錫 (正會員)

1955年 3月 17日生. 1978年 2月 서울대학교 전기공학과 공학사 학위 취득. 1980年 2月 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사 학위 취득. 1989年 2月 한국과학기술원 전기 및 전자공학

과 공학박사 학위 취득. 1983年 3月~현재: 금오공과대학 전자제어공학과 조교수. 주관심 분야는 대규모 시스템 제어, 공장 자동화, Robot Vision 및 응용.

卡 增 男 (正會員) 第25卷 第8號 參照

현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 교수