

계수행렬의 삼각분해에 의한 다차원 디지털 필터의 실현

正會員 金 泰 樹* 正會員 金 明 起**

A Realization of Multidimensional Digital Filters by using the Triangular Decomposition of the Coefficient Matrix.

Tae Soo KIM*, Myung Ki KIM** *Regular Members*

要 約 본 논문에서는 효과적으로 VLSI화 하는데 적합한 모듈성, 규칙성, 병렬성 등을 가진 다차원 디지털 필터의 한 실현방법을 제안하였다. 이 방법은 Venetsanopoulos 등⁽¹⁾이 제안한 다차원 전달함수의 분해방법에 근거를 두어 다차원 다항식을 등가적인 2차원 다항식으로 취급할 수 있도록 하였으며, 변환된 2차원 다항식의 계수행렬을 삼각분해하여 다차원 전달함수를 1차원 전달함수들만의 곱 및 합으로 나타낼 수 있도록 하였다.

ABSTRACT This paper proposes a realization method of multidimensional digital filters that has high modularity, regularity and parallelism enjoying the attributes for efficient VLSI implementation. The method shows that multidimensional transfer functions can be treated as two-dimensional transfer functions modifying the decomposition method of multidimensional transfer functions proposed by Venetsanopoulos et al⁽¹⁾, and then be displayed by multiplications and additions of one-dimensional transfer functions by applying the triangular decomposition theorem to the coefficient matrices of the two-dimensional transfer functions.

I. 서 론

주어진 실, 유리 전달함수의 다차원(multidim-

ensional), 선형, 시불변 디지털 필터를 실현하는데 문제가 되는 점은 1차원의 대수학이론이 다차원의 경우에 확장되지 않으며, 다차원 다항식에서는 1차원의 경우에 대응되는 인수분해가 존재하지 않는다는 점이다. Huang 등⁽²⁾은 “다차원 디지털 필터를 종속 또는 병렬형태로 실현할 수 있는 일반적인 방법은 없다”라고 단언하였다. Shanks 등⁽²⁾이 2-D(two-dimensional) 디지털 필터의 직접적인 실현방법을 소개한 이래, 지난 10여년 동안

*釜山東明專門大學 電子科
Dept. of Electronics Engineering, Dong-Myung Technical
College, Pusan, Korea.

**釜山東亞大學校 電子工學科
Dept. of Electronics Engineering, Dong-A University,
Pusan, Korea.

論文番號 : 89-10(1988. 11. 7)

다차원(특히 2차원) 디지털 필터의 설계 및 실현에 관한 많은 인수분해 알고리즘이 개발되어 왔다.⁽³⁴⁵⁾ Venetsanopoulos 등⁽⁶⁾은 2-D 실, 유리 전달 함수들을 두개의 공간변수중의 한 변수만의 함수인 1-D 다항식들로 전개하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 2-D 전달함수의 계수행렬의 분해에 근거를 두어, 모듈성(modularity)을 가지고 있는 규칙적이며, 일반적인 실현방법을 제시하고 있다.

이에 앞서 Andres 등⁽⁷⁾이 영상처리분야에 적용했던 특이값분해(singular value decomposition)와 Mertzios 등⁽⁸⁾이 2-D 디지털 필터의 실현방법으로 제안한 Jordan 분해기법은 이의 특수한 경우로 생각될 수 있다. 이어서 Venetsanopoulos 등⁽⁹⁾은 이러한 분해이론의 2-D 디지털 필터의 설계 및 실현에 관한 관계를 보다 명확히 설명하였다. 또한 (10)에서는 3차원 이상의 다차원 전달함수에 대한 분해방법을 제안하였으며, m-D 전달함수를 1-D 전달함수로 완전히 분해할 수 있도록 하는 근본적인 방향을 제시하였다. 그러나 이 방법은 주어진 전달함수를 효과적으로 분해할 수 있는 일정한 방법이 없기 때문에 실제적으로 적용하는 데에는 많은 문제점이 따랐다.

본 논문에서는 효과적으로 VLSI화 하는데 적합한 모듈성, 규칙성, 병렬성 등을 가진 다차원 디지털 필터의 한 실현방법을 제안한다. 이 방법은 Venetsanopoulos 등⁽¹⁰⁾이 제안한 다차원 전달함수의 분해방법에 근거를 두어 다차원 다항식을 등가적인 2차원 다항식으로 취급할 수 있도록 하며, 2차원 다항식의 계수행렬에 삼각분해정리(triangular decomposition theorem)를 적용하여 다차원 전달함수를 1차원 전달함수들의 곱 및 합으로 나타낼 수 있도록 한다. 제안된 필터의 특성들을 특이값 분해 및 Jordan 분해를 이용한 실현 또는 canonical 실현의 경우와 비교하여 그의 우수성을 확인하고, 실현 예 및 시뮬레이션을 통하여 그의 타당성을 확인한다. 또한 본 방법은 다차원 IIR 디지털 필터에 대한 실현성이 있음을 보인다.

II. 다차원 전달함수의 분해

1. 다차원 FIR 전달함수의 분해

1983. 12. Venetsanopoulos 등⁽¹⁰⁾이 다차원 전달함수의 분해방법을 제안함으로써, 최초로 임의의 m-D 전달함수를 1-D 전달함수들로 분해할 수 있는 가능성을 보여 주었다. 그러나 이 방법은 m-D 전달함수를 m개의 변수중 한 변수만의 함수인 1-D 전달함수들로 분해하는 데에는 성공하였으나, 이를 효과적으로 분해하는데 대한 아무런 방법도 제시하지 못하였으며, 또한 알고리즘이 근본적으로 이러한 방법을 찾기가 매우 곤란한 형태로 되어 있었다. 여기서는 Venetsanopoulos 등이 제안된 다차원 전달함수의 분해 알고리즘을 2차원적으로 변경하여 이러한 문제점을 해소하고, 보다 접근이 용이하고, 효과적으로 적용할 수 있는 알고리즘을 제시하고자 한다. 일반적으로 실계수들을 가진 m-D FIR 유리 전달함수는

$$H(z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m-1} h_{k_1, k_2, \dots, k_m} z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} \dots z_m^{-k_m} \quad (1)$$

와 같이 표시되며, 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$H(z_1, z_2, \dots, z_m) = H(z_1, z) \\ = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{N_1-1} a_{k_1, j} z_1^{-k_1} z^{-j} \quad (2)$$

표 1. 식 (1) 및 (2)의 $\{j\}$ 와 $\{k_2, \dots, k_m\}$ 간의 관계
Relationship between $\{j\}$ and $\{k_2, \dots, k_m\}$ in equation (1) and (2)

j	k_2	k_3	...	k_{m-1}	k_m
0	0	0	...	0	0
1	0	0	...	0	1
2	0	0	...	0	2
.
.
n_m-1	0	0	...	0	n_m-1
n_m	0	0	...	1	0
.
.
.
N_1-1	n_2-1	n_3-1	...	$n_{m-1}-1$	n_m-1

여기서 $N_1=n_2n_3\cdots n_m$, $Z^{-j}=z^{-k_2}z^{-k_3}\cdots z_m^{k_m}$, $a_{k_{ij}}=h_{k_i}$
 k_2, \dots, k_m 이며, $\{j\}$ 와 $\{k_2, k_3, \dots, k_m\}$ 간에는 표1과
 같은 관계가 있다.

식 (2)는 다음과 같이 행렬 형태로 쓸 수 있다.

$$H(z_1, z) = Z_1 A Z^T \quad (3)$$

여기서

$$Z_1 = [1 \ z_1^{-1} \ z_1^{-2} \ \cdots \ z_1^{-N_1+1}]$$

$$Z = [1 \ z^{-1} \ z^{-2} \ \cdots \ z^{-N_1+1}]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0N_1-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1N_1-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n_1-10} & a_{n_1-11} & \cdots & a_{n_1-1N_1-1} \end{bmatrix}$$

이때, 식 (3)의 계수행렬 A를 등가적으로

$$A = RS \quad (4)$$

와 같이 두개의 다른 행렬의 곱으로 표시하면,
 식 (3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽⁶⁾

$$H(z_1, z) = Z_1 R S Z^T \quad (5)$$

여기서 행렬 R은 $n_1 \times n_1$ 비특이 정방행렬로서,
 임의로 선택될 수 있다. 한편 행렬 S는

$$S = R^{-1}A$$

에 의해 구해질 수 있으며, 차수는 $n_1 \times N_1$ 이다.
 식 (5)에서

$$Z_1 R = [r_0(z_1) \cdots r_1(z_1) \cdots r_{n_1-1}(z_1)] \quad (6-1)$$

$$S Z^T = [s_0(z) \cdots s_1(z) \cdots s_{n_1-1}(z)] \quad (6-2)$$

가 되며, 여기서

$$r_i(z_1) = r_{0i} + r_{1i}z_1^{-1} + \cdots + r_{ji}z_1^{-j} + \cdots + r_{n_1-1i}z_1^{-N_1+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n_1-1} r_{ji}z_1^{-j}$$

$$s_i(z) = s_{i0} + s_{i1}z^{-1} + \cdots + s_{ij}z^{-j} + \cdots + s_{iN_1-1}z^{-N_1+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{N_1-1} s_{ij}z^{-j} \quad (7)$$

$$(i=0, 1, \dots, n_1-1)$$

이다. 식 (6-1,2)를 사용하면 식 (5)는 다음과
 같이 쓸 수 있다.

$$H(z_1, z) = [r_0(z_1) \cdots r_1(z_1) \cdots r_{n_1-1}(z_1)]$$

$$\cdot [s_0(z) \cdots s_1(z) \cdots s_{n_1-1}(z)]^T$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1-1} r_i(z_1) s_i(z) \quad (8)$$

그러므로 $H(z_1, z)$ 는 각각 두 변수중의 한 변수만
 의 함수인 단변수 다항식들의 곱의 합으로 표시될
 수 있다는 것을 알 수 있다. 그러나 이 경우, s_i
 (z) 는 사실상 z_2, z_3, \dots, z_m 의 다변수 함수로서, 다만
 그것을 1차원적으로 배열해 놓았을 뿐 | 완전히
 분해된 형태는 아니다. $s_i(z)$ 에 대해 이와같은
 과정을 반복하면,

$$H(z_1, z_2, z') = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} r_{k_1}(z_1) r_{k_1, k_2}(z_2) s_{k_1, k_2}(z') \quad (9)$$

와 같이 되며, 이와같은 과정을 총 $m-1$ 회 반복하
 면,

$$H(z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{n_{m-1}-1} r_{k_1}(z_1) r_{k_1, k_2}(z_2) \cdots$$

$$r_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}}(z_{m-1}) s_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}}(z_m) \quad (10)$$

와 같이 완전히 분해된 전달함수를 구할 수가
 있다. 여기서 $r_{k_1}(z_1), r_{k_1 k_2}(z_2), \dots, r_{k_1 \dots k_{m-1}}(z_{m-1}), s_{k_1}$
 $k_2 \dots k_{m-1}(z_m)$ 는 각각 $n_1-1, n_2-1, \dots, n_{m-1}-1, n_m-$
 1 차 다항식들이다. 식 (10)에서 전달함수가 m 개의
 변수중의 한 변수만의 함수인 1-D 전달함수들로
 완전히 인수분해 되어질 수 있음을 알 수 있다.
 외형적으로 매 분해과정은 2차원적인 해석에 해당
 되며, 결국 전 분해과정은 이러한 2차원적인 해석

을 m-1회 반복 수행하는 것이 된다. 매 분해과정에서 수행함에 있어서 행렬 R 및 S를 선택하는 방법이 분해이론의 핵심이 되며, 지금까지 제안된 알고리즘들 중 행렬 R 및 S를 선택하는 한 방법으로서 고려될 수 있는 알고리즘으로는 특이값 분해와 Jordan 분해가 있다.

2. 다차원 IIR 필터의 실현

일반적으로 실 계수들을 가진 m-D IIR 유리 전달함수는

$$H(z_1, z_2, \dots, z_m) = \frac{Q(z_1, z_2, \dots, z_m)}{P(z_1, z_2, \dots, z_m)} \quad (11)$$

와 같이 표시되며, 여기서 만일

$$P(z_1, z_2, \dots, z_m) = K + P_1(z_1, \dots, z_m), \quad K \neq 0 \quad (12)$$

(단 $P_1(z_1, \dots, z_m)$ 은 상수항을 포함하지 않음)

로 나타낸다면 식 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$H(z_1, \dots, z_m) = \frac{Q(z_1, \dots, z_m) / k}{1 + P_1(z_1, \dots, z_m) / k} \quad (13)$$

이것은 그림 1과 같은 형태의 feed-back으로써 실현될 수 있다.

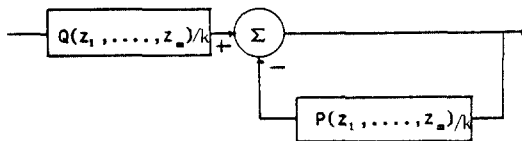


그림 1. m-D IIR 디지털 필터의 feed back 표시.
The feedback representation of a total m-D IIR digital filter.

여기서 $Q(z_1, \dots, z_m)$ 및 $P_1(z_1, \dots, z_m)$ 은 결국 식 (10)과 같은 형태로 쓸 수 있으며, 이때 식 (10)과 같은 형태로 분해된 $P_1(z_1, \dots, z_m)$ 에서, 만일 상수항을 가진 loop가 단 하나라도 있을 경우에는, 이 회로는 delay free loop를 가지게 되므로 실현불가능하게 된다.

III. 계수행렬의 삼각분해에 의한 다차원 디지털 필터의 실현

1. 다차원 FIR 필터의 실현

식 (4)의 R, S를 선택하는 방법은 무한히 많으며, 이들의 선택방법에 따라 각기 다른 특성을 가진 고유의 실현방법들이 결정될 것이다. 그러나 필터의 실현에 필요한 식 (8) 및 (10)의 항의 수를 극소화할 수 있는 선택방법을 찾는 것이 당면과제이며, 지금까지 밝혀진 방법으로는 특이값 분해와 Jordan 분해에 의한 방법이 있다. 여기서는 R 및 S를 선택하는 한 방법으로서 삼각분해에 의한 방법을 제시하며, 그의 타당성과 우수성을 확인하고자 한다.

식 (3)에서 계수행렬 A의 rank를 t라 하면, $t \leq \min(n_1, N_1)$ 이며, 일반적인 경우, 행렬 A의 첫번째 t개의 주 소행렬식들중 영이거나 영에 가까운 것들이 있을 수 있다. 그러한 경우에는 A의 행 및 열들, Z_1 의 열 및 Z^T 의 행들을 적절히 교환하여 다음과 같은 다른 한 형태로 쓸 수 있다.

$$H(z_1, z) = Z_1 A Z^T \quad (14)$$

여기서 A는 그의 첫번째 t개의 주 소행렬식들이 영이 되지 않도록 A의 행 및 열들을 적절히 교환한 것이다. 행렬의 삼각분해정리에 따라 rank t인 $n_1 \times N_1$ 행렬 A는 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.⁽¹¹⁾

$$A = LDU \quad (15)$$

여기서 L 및 U는 각각 분해된 $n_1 \times t$ 및 $t \times N_1$ 상, 하 삼각행렬이며, D는 t차 대각행렬이다. 이 식은 또한

$$A = \sum_{i=1}^t d_i L_i U_i \quad (16)$$

와 같이 쓸 수 있으며, 여기서 d_i 는 대각행렬 D의 i번째 성분이며, L_i 및 U_i 는 각각 L 및 U의 i번째 열 및 행의 성분들로 이루어진 n_1 차 및 N_1

차 벡터이다. 식 (16)을 식 (14)에 대입하면

$$H(z_1, z) = \sum_{i=1}^t d_i (Z_1 L_1) (U_1 Z^T) \\ = \sum_{i=1}^t d_i l_i(z_1) u_i(z) \quad (17)$$

와 같이 쓸 수 있다. $u_i(z)$ 에 대해 이와같은 과정을 반복하면,

$$H(z_1, z_2, z') = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{t_i} d_i d_{ij} l_i(z_1) l_{ij}(z_2) u_{ij}(z') \quad (18)$$

가 되며, $u_{ij}(z')$ 에 대하여 이와같은 과정을 $m-3$ 회 더 반복하면 다음과 같은 형태의 완전분해된 전달함수를 구할 수가 있다.

$$H(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k_1=1}^t \sum_{k_2=1}^{t_{k_1}} \dots \sum_{k_{m-1}=1}^{t_{k_1, k_2, \dots, k_{m-2}}} d_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}} \\ \dots d_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}} \cdot l_{k_1}(z_1) l_{k_1, k_2}(z_2) \\ \dots l_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}}(z_{m-1}) \cdot u_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}}(z_m) \quad (19)$$

그림2에 3-D FIR 디지털 필터의 경우에 대한 완전 삼각분해된 실현 예를 블록다이어그램으로 나타내었다.

그림2 및 식 (19)로부터 다음과 같은 중요한 특징들을 발견해 낼 수가 있다.

1) 고유의 병렬성을 나타낸다. 따라서 병렬처리 장치를 가진 컴퓨터를 사용하여 병렬처리를 하면 data throughput rate을 현저히 증가시킬 수가 있다.

2) 모든 지로들은 m 개의 공간변수중의 한 변수만의 함수인 1차원 다항식들로 분리되어졌다. 따라서 그것들은 메모리 요구량, 계산속도, 잡음특성 등의 측면에서 서로 다른 특성을 나타내는 실 계수들을 가진 1차/2차항의 종속 또는 격자형태 등으로 실현될 수도 있다.

3) 모듈성, 규칙성, 일반성 등 효과적으로 VLSI화 하는데 적합한 많은 주요 속성들을 가지고 있다.

또한 삼각분해에 의한 실현은 특이값 분해 및

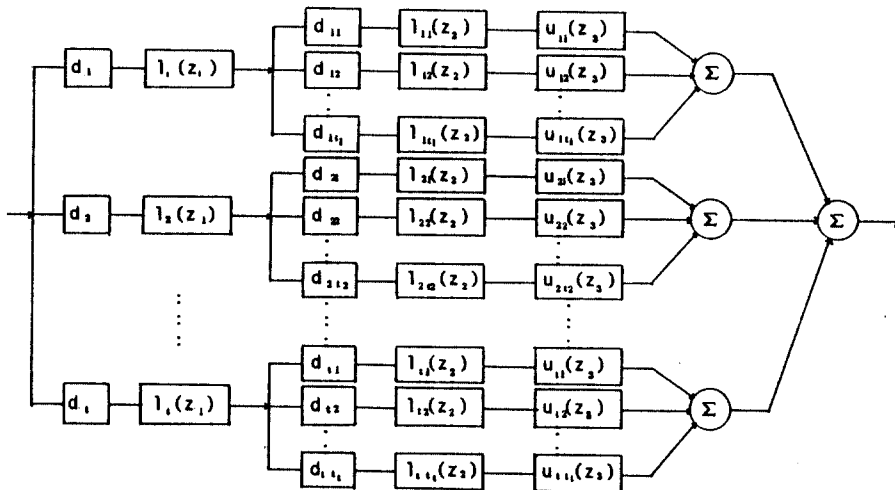


그림 2. 3-D FIR 디지털 필터의 삼각분해에 의한 실현구조.
A triangular decomposition realization structure of a 3-D FIR digital filter.

Jordan 분해에 의한 실현들과 본질적으로는 어떤 공통적인 특징을 가지고는 있지만, 실제적으로는 다음과 같은 많은 차이점을 가지고 있다.

1) 수행과정이 특이값 분해 및 Jordan 분해의 수행과정에 비하여 단순하고 빠르다. 특이값 분해 및 Jordan 분해의 경우에 있어서, 고유벡터들을 구하는 일은 삼각행렬로 분해하는 일에 비하여 매우 복잡하고 힘들다.

2) 요구되는 레지스터 계수의 수가 특이값 분해 및 Jordan 분해에 의한 실현, 또는 canonical 실현에 비하여 적다. 예로서, rank t의 $m \times n (m \geq n)$ 실제수 행렬을 가진 2-D FIR 디지털 필터를 실현할 경우, 각각 삼각분해, 특이값 분해, Jordan 분해 및 Canonical 형태의 경우에 대한 총 레지스터 계수의 수를 표2에 예시하였다. 이때 1-D 전달함수를 direct form 또는 cascade form으로 실현하는

표 2. 2-D FIR 디지털 필터의 4가지 실현에 대한 총레지스터 계수의 수 (필터차수: $m \times n [m \geq n]$, 계수: t)
Total number of register coefficients for 4realizations of a 2-D FIR digital filter (filter size : $m \times n [m \geq n]$, rank : t)

	direct form	cascade form
triangular dec.	$(m+n-t+1)t$	$3(m+n-t+a)t/2$
sing. val. dec.	$(m+n)t$	$3(m+n)t/2$
Jordan dec.	$2mt$	$3mt$
canonical	mn	mn

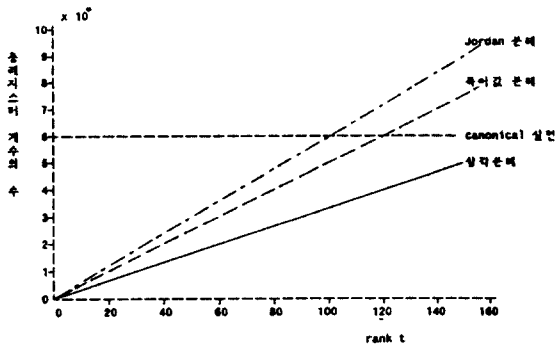


그림 3. 행렬의 계수 p에 대한 요구되는 레지스터 계수의 수의 관계 (필터 차수: 300×200 , 1-D 다항식 실현: direct form) The number of register coefficients versus the rank p of the filter matrix required for the implementation of 4 realizations. (filter size: 300×200 , 1-D polynomial, realization: direct form)

두가지 경우에 대해 예시하였다. 또한 그림3에 300×200 2-D FIR 디지털 필터의 경우에 대한 총 레지스터 계수의 수를 rank t의 함수로서 예시하고, 각 방법별로 비교하였다. 3-D 이상의 경우에도 각 방법별 특성은 대체로 2-D의 경우와 비슷한 관계를 유지하고 있다.

3) 요구되는 계산량이 canonical 형태, 특이값 분해 및 Jordan 분해의 경우에 비하여 적다. 예로서, 표3에 rank t의 $m \times n (m \geq n)$ 실제수 행렬을 가진 2-D FIR 디지털 필터를 실현할 경우 요구되는 계산량을 각 방법별로 예시하였다. 단, 1-D 전달함수는 direct form으로 실현하는 것으로 하였다. 요구되는 계산량 (승산/합산의 수)은 행렬 A의 계수(t), 입력배열의 크기($M \times N$) 및 필터의 차수($m \times n$)의 복잡한 함수로서, 매우 복잡하므로 편의상 $MN \gg mn$ 이라고 가정하였다. 3-D 이상의 경우에도 각 방법별 특성은 대체로 2-D의 경우와 비슷한 관계를 유지한다.

표 3. 2-D FIR 디지털 필터의 4가지 실현에 대한 총승산 및 합산의 수 (필터의 차수: $m \times n [m \geq n]$, 계수: t, 입력배열 $M \times N$ 에 대해 $MN \gg mn$).
Total number of multiplications and additions for 4 realizations of a 2-D FIR digital filter (filter size: $m \times n [m \geq n]$, rank: t, and $MN \gg mn$ for input array $M \times N$)

	multiplications /unit input	additions /unit input
triangular dec.	$(m+n-t+1)t$	$t(m+n-t)-1$
sing. val. dec.	$(m+n)t$	$t(m+n-1)-1$
Jordan dec.	$2mt$	$t(2m-1)-1$
canonical	mn	$mn-1$

4) 최소 메모리 요구량은 필터의 차수, 입력배열의 크기, 계수행렬의 rank 뿐만 아니라 입, 출력간의 계산순서(sequence)에도 밀접하게 관계되므로 정확한 요구량을 단일 식으로 나타내기는 어려운 일이지만, 일반적으로 레지스터 계수의 수에 비례하게 되므로, 특이값 분해의 경우나 Jordan 분해의 경우에 비하여 적다는 것은 명백하다.

2. 다차원 IIR 필터의 실현

식 (10)과 같이 분해된 식 (13)의 $P_1(z_1, \dots, z_m)$ 에서, 만일 m 개의 다항식 $r_{k_1}(z_1), r_{k_1 k_2}(z_2), \dots, s_{k_1 k_2 \dots, k_{m-1}}(z_m)$ 모두가 상수항을 가진 loop가 단 하나라도 있을 경우에는 delay free loop를 가지게 되므로 실현 불가능하게 된다. 따라서 delay free loop를 막기 위해서는 모든 loop에 대해서 상수항을 가지지 않은 지로가 최소한 하나 이상 존재하도록 하여야 할 것이다. 여기서는 $H(z_1, \dots, z_m)$ 의 cononical 실현만 가능하다면, 즉, 식 (12)의 조건만 만족된다면, 삼각분해에 의한 실현은 항상 가능함을 보이고자 한다.⁽⁶⁾

식 (1), (2) 및 (3)의 관계에 따라 m -D 다항식 $P_1(z_1, \dots, z_m)$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_1(z_1, \dots, z_m) = P_1(z_1, z) = Z_1 P_1 Z^T \quad (20)$$

여기서

$$Z_1 = [1 \ z_1^{-1} \ z_1^{-2} \ \dots \ z_1^{-n_1+1}]$$

$$Z = [1 \ z^{-1} \ z^{-2} \ \dots \ z^{-N_1+1}]$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & P_{01} & \dots & P_{0 \ n_1-1} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1 \ n_1-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n_1-10} & P_{n_1-11} & \dots & P_{n_1-1 \ n_1-1} \end{bmatrix}$$

이며, $n_1 \times N_1$ 행렬 P_1 의 계수를 t 라하면 행렬 P_1 은 t 개의 선형 독립인 행들과 t 개의 선형 독립인 열들을 가지게 될 것이다. 행렬 P_1 의 첫번째 t 개의 주 소행렬식들이 영이 되지 않도록 P_1 의 행 및 열들, Z_1 의 열들, Z^T 의 행들을 적절히 교환하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_1(z_1, z) = \hat{Z}_1 \hat{P}_1 \hat{Z}^T \quad (21)$$

여기서

$$\hat{Z}_1 = [z_1^{\pi(1)}, z_1^{\pi(2)}, \dots, z_1^{\pi(n_1-1)}, 1, z_1^{\pi(n_1+1)}, \dots, z_1^{\pi(n_1-1)}]$$

$$\hat{Z} = [1, z^{\mu(1)}, z^{\mu(2)}, \dots, z^{\mu(N_1-1)}]$$

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} X & X & \dots & X \\ X & X & \dots & X \\ \vdots & & & \\ X & X & \dots & X \\ 0 & X & \dots & X \\ X & X & \dots & X \\ \vdots & & & \\ X & X & \dots & X \end{bmatrix} \leftarrow i \text{행 } (i \leq t) \quad (22)$$

이며, $\tau(k), k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n_1-1$ 및 $\mu(j), j=1, 2, \dots, N_1-1$ 은 각각 적절히 교환된 정수값 $[-1, -2, \dots, -n_1+1]$ 및 $[-1, -2, \dots, -N_1+1]$ 를 갖는다. 식 (22)의 행렬 \hat{P}_1 에 삼각분해정리를 적용하면 (21)은

$$P_1(z_1, z) = \sum_{k=1}^t \hat{d}_k \hat{u}_k(z_1) \hat{u}_k(z) \quad (23)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서 다항식 $\hat{u}_k(z), k=2, 3, \dots, t$ 는 상수항을 갖지 않는다. 그리고 다항식 $\hat{u}_1(z)$ 가 비록 상수항을 가진다 하더라도 식 (22)에서 알 수 있듯이 $\hat{l}_{11}=0$ 이므로 다항식 $\hat{l}_1(z_1)$ 은 분명히 상수항을 갖지 않는다. 따라서 식 (23)에 의해 표시된 t 개의 지로중에는 두개의 항 모두가 상수항을 갖는 지로는 없다는 결론을 내릴 수가 있다. 식 (23)에서 $\hat{u}_k(z)$ 는 실제적으로 $z_2 z_3 \dots, z_m$ 의 $m-1$ 개의 변수들의 함수인, $m-1$ 차원의 다항식들이기 때문에 다항식 $P_1(z_1 z_2 \dots, z_m)$ 을 완전히 분해하기 위해서는 다시 이러한 과정을 $m-2$ 회 더 거쳐야만 한다. 식 (23)에서, 다항식 $\hat{l}_1(z_1)$ 은 상수항을 갖지 않으므로 $\hat{u}_1(z)$ 의 분해 결과에 관계 없이 지로 1은 상수항을 갖지 않는다.

한편 $\hat{u}_k(z), k=2, 3, \dots, t$ 는 상수항을 가질 수도 있으므로 $\hat{u}_k(z), k=2, 3, \dots, t$ 를 반복적으로 분해해 나가는 과정에서 상수항을 갖는 지로가 단 하나라도 발생되어서는 안된다. $\hat{u}_k(z), k=2, 3, \dots, t$ 에 대해 다시 이와같은 분해과정을 반복하여 최종적

으로 완전히 분해된 다항식이 구해졌을 경우, 단 하나의 delay free loop도 갖지 않는다는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 식 (12)의 조건만 만족된다면, 삼각분해에 의해 실현은 항상 가능하다는 결론을 내릴 수가 있다. 다차원 디지털 필터는 대부분 IIR로 설계되고 있으므로 이와같이 IIR 디지털 필터에 대한 실현성을 가지고 있다는 것은 매우 중요한 특징이다.

IV. 삼각분해에 의한 실현 예

1. 2-D 디지털 필터(FIR/IIR)의 실현 예

다음에 삼각분해에 의한 2-D 디지털 필터(FIR/IIR)의 실현 예를 보였다. FIR의 경우는 IIR에서 분모가 "1"인 즉, 분자 다항식만 존재하는 특수한 경우로 생각할 수 있으므로, 여기서는 IIR의 경우에 대해서만 언급하기로 한다. 2-D IIR 디지털 필터의 전달함수는

$$H(z_1, z_2) = \frac{Q(z_1, z_2)}{P(z_1, z_2)}$$

와 같이 표시되며, 여기서 $Q(z_1, z_2)$ 및 $P(z_1, z_2)$ 가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\begin{aligned} Q(z_1, z_2) &= 3z_1^{-2}z_2^2 + 7z_1^{-1}z_2^{-2} + 2z_2^{-2} + 7z_1^{-2} + 7 \\ &+ 7z_1^{-2}z_2^1 + 9z_1^{-1}z_2^{-1} + 3z_2^1 + 3z_1^{-2} + 3z_1^{-1} + 1 \\ P(z_1, z_2) &= z_1^{-2}z_2^{-1} + 3z_2^{-2} + 3z_1^{-1}z_2^{-2} + 2z_1^{-2}z_2^{-1} + \\ &+ 6z_1^{-1}z_2^1 + 4z_2^{-1} + z_1^{-1} + 3z_1^{-1} + 1 \end{aligned}$$

이 예는 Mitra 등⁽⁴⁾의 논문중에서 임의로 발췌한 것이다. 우선 분자 다항식 $Q(z_1, z_2)$ 를 행렬의 형태로 나타내면

$$\begin{aligned} Q(z_1, z_2) &= Z_1 A Z_1^T \\ &= [1 \ z_1^{-1} \ z_1^{-2}] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \\ z_2^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

와 같이 되며, 이 때 행렬 A의 두번째 주 소행렬식이 영이 되므로 행과 열을 적당히 교환하면

$$\begin{aligned} Q(z_1, z_2) &= \hat{Z}_1 \hat{A} \hat{Z}_1^T \\ &= [z_1^{-2} \ z_1^{-1} \ 1] \begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 7 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2^{-2} \\ z_2^{-1} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

와 같이 쓸 수 있다. 계수행렬 A에 삼각분해정리를 적용하면 식 (16)의 d_i, L_i 및 U_i 는 각각 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} d_1 &= 3, \quad d_2 = -7.333332, \quad d_3 = -0.0909088 \\ L_1 &= [1 \ 2.333333 \ 0.666667] \\ L_2 &= [0 \ 1 \ 0.2272728] \\ L_3 &= [0 \ 0 \ 1] \\ U_1 &= [1 \ 2.333333 \ 1] \\ U_2 &= [0 \ 1 \ 0.54546] \\ U_3 &= [0 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

이상을 식 (17)과 같이 전개한 후, 정리하면 다음과 같은 결과를 얻을 수가 있다.

$$\begin{aligned} Q(z_1, z_2) &= 2(1 + 3.5z_1^{-1} + 1.5z_1^{-2})(1 + \\ &(1 + 2.333333z_2^{-1} + z_2^{-2}) \\ &- 0.909091(1 + 4.4z_1^{-1})(1 + 1.833333z_2^{-1}) \\ &- 0.0909088 \end{aligned} \quad (24)$$

또한 분모다항식 $P(z_1, z_2)$ 에서는 $K=1$ 이며 $P_1(z_1, z_2)$ 를 행렬의 형태로 나타내면,

$$\begin{aligned} P_1(z_1, z_2) &= Z_1 B Z_1^T \\ &= [1 \ z_1^{-1} \ z_1^{-2}] \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \\ z_2^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 첫번째 주 소행렬식이 영이 되므로 1행과 2행을 교환하면,

$$\begin{aligned} P_1(z_1, z_2) &= \hat{Z}_1 \hat{B} \hat{Z}_1^T \\ &= [z_1^{-1} \ 1 \ z_1^{-2}] \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \\ z_2^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

가 된다. 이 때 행렬 B의 계수는 2이다. 여기서 전과 동일한 방법으로 삼각분해정리를 적용한

후 정리하면

$$P_1(z_1, z_2) = 3z_1^{-1}(1 + 0.3333334z_1^{-1})(1 + 2z_2^{-1} + z_2^{-2}) + 4z_2^{-1}(1 + 0.75z_2^{-1}) \quad (25)$$

가 구해진다. 식 (24), (25)의 결과를 그림 4에 블록다이어그램으로 나타내었다. 그림에서 알 수

있듯이 각 다항식들은 두 개의 변수중의 한변수만의 함수들로 완전히 분해되어 졌다. 따라서 각 항들은 쉽게 더 이상 인수분해될 수도 있으며, 또한 그 밖의 다른 유리한 형태로 실현될 수도 있다. $P_1(z_1, z_2)$ 에 대한 특이한 분해 및 Jordan 분해 결과, 모든 항에 상수항이 존재함을 확인할 수 있었다.

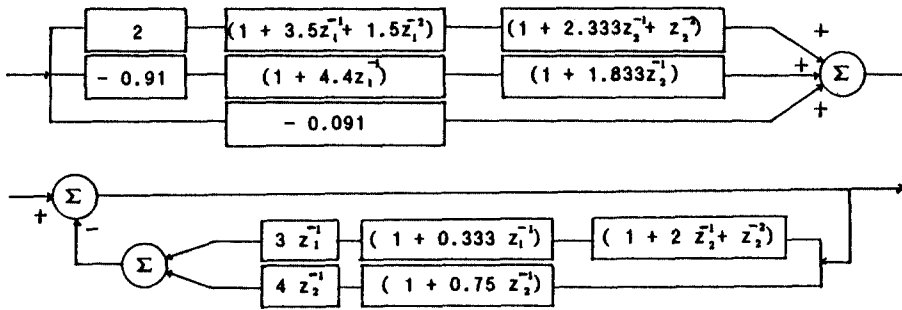


그림 4. 2-D IIR 디지털 필터의 삼각분해에 의한 실현 예.
A triangular decomposition realization example of a 2-D IIR digital filter.

2. 3-D 디지털 필터의 실현 예

3-D IIR 디지털 필터의 전달함수는

$$H(z_1, z_2, z_3) = \frac{Q(z_1, z_2, z_3)}{P(z_1, z_2, z_3)}$$

$$= \frac{\sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} q_{k_1, k_2, k_3} z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} z_3^{-k_3}}{\sum_{k_1=0}^{\hat{n}_1-1} \sum_{k_2=0}^{\hat{n}_2-1} \sum_{k_3=0}^{\hat{n}_3-1} p_{k_1, k_2, k_3} z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} z_3^{-k_3}}$$

와 같이 표시되며, 여기서 $Q(z_1, z_2, z_3)$ 와 $P(z_1, z_2, z_3)$ 가 다음과 같이 주어졌다고 가정하자.

$$Q(z_1, z_2, z_3) = 6 + 3z_3^{-1} + 9z_3^{-2} + 4z_2^{-1} + 2z_2^{-1}z_3^{-1} + 6z_2^{-1}z_3^{-2} + 2z_2^{-2} + z_2^{-2}z_3^{-1} + 3z_2^{-2}z_3^{-2} + 4z_1^{-1} + z_1^{-1}z_3^{-2} + z_1^{-1}z_2^{-1} + 5z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-1} + 2z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-2} + 3z_1^{-1}z_2^{-2} + 5z_1^{-1}z_2^{-2}z_3^{-1} + 7z_1^{-1}z_2^{-2}z_3^{-2} + 4z_1^{-2}$$

$$+ 5z_1^{-2}z_3^{-1} + 3z_1^{-2}z_3^{-2} + 2z_1^{-2}z_2^{-1} + 3z_1^{-2}z_2^{-1}z_3^{-1} + z_1^{-2}z_2^{-1}z_3^{-2} + 3z_1^{-2}z_2^{-2} + 4z_1^{-2}z_2^{-2}z_3^{-1} + 2z_1^{-2}z_2^{-2}z_3^{-2} \\ P(z_1, z_2, z_3) = 1 + 5z_3^{-1} + 2z_3^{-2} + 6z_2^{-1} + 2z_2^{-1}z_3^{-1} + 5z_2^{-1}z_3^{-2} + 6z_2^{-2} + 7z_2^{-2}z_3^{-1} + 4z_2^{-2}z_3^{-2} + 2z_1^{-1} + 4z_1^{-1}z_3^{-1} + 2z_1^{-1}z_3^{-2} + 5z_1^{-1}z_2^{-1} + 2z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-1} + 5z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-2} + 5z_1^{-1}z_2^{-2} + 4z_1^{-1}z_2^{-2}z_3^{-1} + 6z_1^{-1}z_2^{-2}z_3^{-2} + 4z_1^{-2} + 3z_1^{-2}z_3^{-1} + 2z_1^{-2}z_3^{-2} + 4z_1^{-2}z_2^{-1} + 2z_1^{-2}z_2^{-1}z_3^{-1} + 5z_1^{-2}z_2^{-1}z_3^{-2} + 4z_1^{-2}z_2^{-2} + z_1^{-2}z_2^{-2}z_3^{-1} + 8z_1^{-2}z_2^{-2}z_3^{-2}$$

여기서 $n_1 = n_2 = n_3 = 3$ 이다. 우선 분자 다항식 $Q(z_1, z_2, z_3)$ 는

$$Q(z_1, z_2, z_3) = Q(z_1, z)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{N_1-1} a_{k_1, j} z_1^{-k_1} z^{-j} \\ = 6 + 3z^{-1} + 9z^{-2} + 4z^{-3} + 2z^{-4} + 6z^{-5} + 2z^{-6} + z^{-7} + 3z^{-8} + 4z z_1^{-1} z^{-1} + 6z_1^{-1} z^{-2} + z_1^{-1} z^{-3} + 5z_1^{-1} z^{-4} + 2z_1^{-1} z^{-5} + 3z_1^{-1} z^{-5} + 3z_1^{-1} z^{-6} + 5z_1^{-1} z^{-7}$$

$$+7z_1^{-1}z^{-8}+4z_1^{-2}+5z_1^{-2}z^{-1}+3z_1^{-2}z^{-2}+2z_1^{-2}z^{-3} \\ +3z_1^{-2}z^{-4}+z_1^{-2}z^{-5}+3z_1^{-2}z^{-6}+4z_1^{-2}z^{-7}+2z_1^{-2}z^{-8}$$

와 같은 형태의 2-D 전달함수로 나타낼 수 있다. 이 때 $N_1 = n_2 n_3 = 9$, $z^{-j} = z_2^{-k_2} z_3^{-k_3}$, $a_{k_1, j} = Q_{k_1, k_2, k_3}$ 이며, $\{j\}$ 와 $\{k_2, k_3\}$ 간에는 표 4와 같은 관계가 있다.

표 4 3-D 실현 예의 $\{j\}$ 와 $\{k_2, k_3\}$ 간의 관계.
Relationship between $\{j\}$ and $\{k_2, k_3\}$ in 3-D example.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
k ₂	0	0	0	1	1	1	2	2	2
k ₃	0	1	2	0	1	2	0	1	2

이것을 행렬의 형태로 쓰면,

$$Q(z_1, z) = Z_1 A Z^T \\ = [z_1^{-2} z_1^{-1} \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 2 & 4 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} \\ \cdot [z^{-8} \ z^{-7} \ z^{-6} \ z^{-5} \ z^{-4} \ z^{-3} \ z^{-2} \ z^{-1} \ 1]^T$$

가 되며, 계수행렬 A를 삼각분해정리에 따라 전개하고, 정리하면,

$$Q(z_1, z) = 3(1+2.333333z_1^{-1}+0.6666667z_1^{-2}) \\ (2+2.5z^{-1}+1.5z^{-2}+z^{-3}+1.5z^{-4}+0.5z^{-5} \\ +1.5z^{-6}+2z^{-7}+z^{-8}) - 5(1+1.8z_1^{-1}) \\ (1.555556+1.5z_1^{-1}+0.5z_1^{-2}+0.6666667z_1^{-3} \\ +0.6111111z_1^{-4}+0.1666667z_1^{-5}+0.8333333z_1^{-6} \\ +z_1^{-7}) + 1.666667(4.666666+1.8z_1^{-1}+4.2z_1^{-2} \\ +2.6z_1^{-3}+0.3333334z_1^{-4}+3.199999z_1^{-5}+z_1^{-6}) \quad (26)$$

가 된다. 식 (26)의 제 1 항중 z에 관한 다항식은 다시

$$u_1(z) = u_1(z_2, z_3) \\ = 2 + 2.5z_3^{-1} + 1.5z_3^{-2} + z_2^{-1} + 1.5z_2^{-1}z_3^{-1} \\ + 0.5[z_2^{-1}z_3^{-2} + 1.5z_2^{-2} + 2z_2^{-2}z_3^{-1} + z_2^{-2}z_3^{-2}]$$

와 같이 쓸 수 있으며, 다음과 같이 행렬의 형태로 쓸 수 있다.

$$u_1(z_2, z_3) = [z_2^{-2} z_2^{-1} \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 2.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_3^{-2} \\ z_3^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

전과 동일한 방법을 적용하면,

$$u_1(z_2, z_3) = (1.5+0.5z_2^{-1}+z_2^{-2}) (1.5+2z_3^{-1}+z_3^{-2}) \\ - 0.5(1-z_2^{-1}) (0.5+z_3^{-1}) \quad (27-1)$$

제 2 항 및 3 항에 대해서도 마찬가지로

$$u_2(z_2, z_3) = 0.5(1+0.3333334z_2^{-1})(3.111112 \\ + 3z_3^{-1}+z_3^{-2}) + 0.1111111z_2^{-1}(1+9z_3^{-1}) \\ \cdot (1.333332+z_3^{-1}) - 0.4999993z_2^{-2} \quad (27-2)$$

$$u_3(z_2, z_3) = 4.2(1+0.7619046z_2^{-1})(1.111111 \\ + 0.4285715z_3^{-1}+z_3^{-2}) - 1.038095z_2^{-1}(0.9204886 \\ + z_3^{-1}) + z_2^{-2} \quad (27-3)$$

와 같은 결과를 얻을 수 있다. 식 (27-1)~(27-3)을 식 (26)에 대입하면 최종적으로 다음과 같은 결과를 얻을 수가 있다.

$$Q(z_1, z_2, z_3) = 3(1+2.333333z_1^{-1}+0.6666667z_1^{-2}) \\ \{ (1.5+0.5z_2^{-1}+z_2^{-2}) (1.5+2z_3^{-1}+z_3^{-2}) \\ - 0.5(1-z_2^{-1}) (0.5+z_3^{-1}) \} \\ - 5(1+1.8z_1^{-1}) \{ 0.5(1+0.3333334z_2^{-1}) \\ (3.111112+3z_3^{-1}+z_3^{-2}) + 0.1111111z_2^{-1} \\ (1+9z_3^{-1}) (1.333332+z_3^{-1}) - 0.4999993z_2^{-2} \} \\ + 1.666667 \{ 4.2(1+0.7619046z_2^{-1})$$

$$(1.111111+0.4285715z_3^{-1}+z_3^{-2}) - 1.038095z_2^{-1}(0.9204886+z_3^{-1})+z_2^{-2} \quad (28)$$

다음, 분모다항식 $P(z_1, z_2, z_3)$ 에서 상수항을 분리하면, $K=1$ 이며, $P_1(z_1, z_2, z_3)$ 에 대해 이와 같은 방법을 적용하면, 다음과 같은 결과를 얻을 수가 있다.

$$P_1(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^{-1}(1+2z_1^{-1})\{(1+z_2^{-1}+z_2^{-2})(1+0.75z_3^{-1}+0.5z_3^{-2})-0.25z_2^{-1}z_3^{-1}(1+2z_3^{-1})(1-3z_3^{-1})\} + 5(1+0.5z_1^{-1})\{1.2z_2^{-1}(1+z_2^{-1})(1+0.3333333z_3^{-1})+0.3333333z_3^{-2}+z_3^{-1}(1+z_2^{-1})(1+0.4z_3^{-1})-0.6z_2^{-1}z_3^{-2}\} \quad (29)$$

식 (28), (29)의 결과를 블록다이하그램으로 나타내면 그림 5와 같이 된다.

3. 실현 예에 대한 컴퓨터 시뮬레이션

임의의 동일한 입력배열에 대한 direct convolution 결과와 삼각분해에 의한 실현 결과를 비교해 봄으로써, 본 알고리즘에 대한 타당성을 확인하였다. 표5에 시뮬레이션에 사용된 임의의 2-D 입력배열을 예시하였으며, 표 6, 7에는 각각 2-D IIR 디지털 필터의 실현 예에 대한 direct convolution 결과 및 삼각 분해에 의한 실현 결과를 예시하였다. 두 결과는 잘 일치하고 있으며, 약간의 마무리 오차가 존재한다. 단, 이 때 주어진 필터의 전달함수나 입력배열은 전혀 임의이며, 편의적으로 택한 것으로서, 다만 본 알고리즘의 처리과정 및 그의 타당성만을 보이고자 한 것이다. 3-D IIR 디지털 필터의 실현 예에 대한 시뮬레이션 결과도 역시 잘 일치하였다.

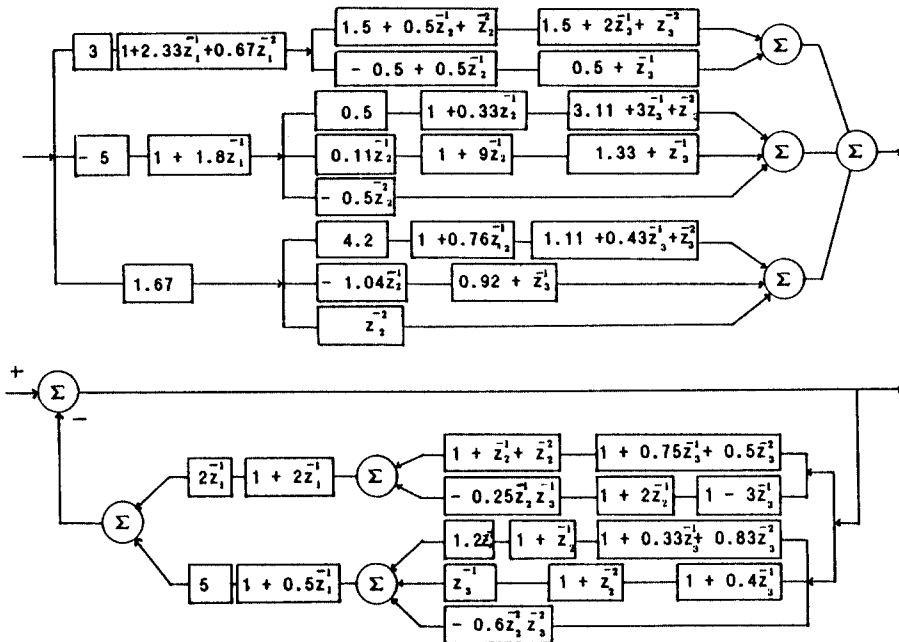


그림 5. 3-D IIR 디지털 필터의 삼각분해에 의한 실현 예.
A triangular decomposition realization example of a 3-D IIR digital filter.

표 5. 2-D 입력 배열(5×5)
2-D input array(5×5).

		→ n				
↓ m	1	5	2	4	5	
	1	2	1	2	5	
	0	1	4	1	7	
	3	1	3	2	4	
	5	3	1	2	4	

표 6. 2-D IIR 디지털 필터의 direct convolution 결과.
Direct convolution result of the 2-D IIR digital filter.

1	4	0	8	-11	43	-129
1	7	9	-19	112	-386	1415
2	-3	4	48	-351	1903	-8706
-1	18	-40	19	820	-6776	39714
15	-58	280	-785	200	15775	-139338
-20	226	-1286	5424	-15314	4015	325704
60	-726	5146	-27335	112277	-318892	91077

표 7. 2-D IIR 디지털 필터의 삼각분해 실현의 시뮬레이션 결과
Simulation result of the triangular decomposition realization of a 2-D IIR digital filter.

	1	4	0	8	-11	43.00002	-129.0001
.9999986	6.999996	8.999992	-18.99997	111.9999	-385.9996	1414.999	
2.000003	-3.000008	4.000053	47.99975	-350.9989	1902.996	-8705.984	
-1.000008	18.00004	-40.00025	19.00133	819.9936	-6775.972	39713.88	
15.00002	-58.00015	280.001	-785.0061	200.0327	15774.84	-139337.3	
-20.00004	226.0005	-1286.004	5424.026	-15314.15	4015.813	325699.9	
60.00011	-726.0014	5416.014	-27335.1	112277.7	-318895.8	91097.75	

V. 결 론

본 논문에서는 다차원 디지털 필터의 한 실현방법을 제안하였다. 이 방법은 다차원 다항식의 등가적인 2차원 변환에 근거를 두고 있으며, 각 2차원 다항식의 계수행렬에 삼각분해정리를 적용하여 임의의 다차원 전달함수를 1차원 전달함수들의 곱 및 합으로 나타낼 수 있도록 하였다. 이와같이 하여 실현된 필터는 다음과 같은 특징이 있음을 보였다.

1) 고유의 병렬성을 가지고 있다. 따라서 병렬처리에 의해 data throughput rate을 현저히 증가시킬 수 있다.

2) 각 병렬지로들은 한 변수만의 함수인 1차원 다항식들로 표시된다. 따라서 그것들은 메모리 요구량, 계산속도, 잡음특성 등의 측면에서 서로 다른 특성을 나타내는 실 계수들을 가진 1차/2차 항의 종속 또는 격자형태 등으로 실현될 수도 있다.

3) 모듈성, 규칙성, 일반성 등 효과적으로 VLSI 화할 수 있는 많은 주요 속성들을 지니고 있다.

4) 다차원 IIR 디지털 필터에 대한 실현성이 있다. 주어진 전달함수의 canonical 실현만 가능하다면, 삼각분해에 의한 실현은 항상 가능함을 보였다. 특이값 분해 및 Jordan 분해에 의한 실현의 경우에는 이러한 실현성이 보장되지 않는다.

5) 요구되는 레지스터 계수의 수, 최소 메모리 양, 승산 및 합산의 수가 특이값 분해 및 Jordan 분해에 의한 실현 또는 canonical 실현에 비해 적다.

參 考 文 獻

1. T.S. Huang, W.F. Schreiber, O.J. Tretiak, "Image processing", Proc. IEEE, Vol. 59, pp. 1586-1609, Nov., 1971.

2. J.L. Shank, S. Treitel, J.H. Justice, "Stability and synthesis of two-dimensional recursive filters", IEEE Trans, Audio Electroacoust, Vol. AU-20, pp. 115-128, June, 1972.
3. S. Chakrabarti, N.K. Bose, S.K. Mitra, "Sum and product separabilities of multivariable functions and applications", J. Franklin Inst., Vol. 299, pp. 53-66, 1975.
4. S.K. Mitra, A.D. Sagar, N.A. Pendergrass, "Realization of two-dimensional recursive filters", IEEE Trans, Circuits Syst., Vol. CAS-22, pp. 177-184, Mar., 1975.
5. S. Treitel, J.L. Shanks, "The design of multistage separable planar filters", IEEE Trans, Geosci, Electron., Vol. GE-9, pp. 10-27, Jan., 1971.
6. A.N. Venetsanopoulos, B.G. Mertzios, "General decomposition of two-dimensional filters", in proc. 6th European Conf, Circuit Theory and Design, ECCTD '83, Stuttgart West Germany Sept, 4-9, pp. 444-446, 1983.
7. H.C. Andres, C.L. Patterson, "Singular value decompositions and digital image processing", IEEE Trans, Acoust, Speech Signal Processing, Vol. ASSP-24, pp. 26-53, FEB., 1976.
8. B.G. Mertzios, A.N. Venetsanopoulos, "A General implementation technique for two-dimensional digital filters", in proc. 6th Summer Symp, Circuit Theory, Prague, Czechoslovakia, pp. 176-180, July, 1982.
9. A.N. Venetsanopoulos, B.G. Mertzios, "A decomposition theorem and its implications to the design and realization of two-dimensional filter", IEEE Trans, Acoust, Speech Signal Processing, Vol. ASSP-33, nn. 6, pp. 1562-1575, Dec., 1965.
10. A.N. Venetsanopoulos, B.G. Mertzios, "Decomposition of multidimensional filters", IEEE Trans, Circuits, Syst., Vol. CAS-30, pp. 915-917, Dec., 1983.
11. F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Vol. 1, New York Chelsea, 1974.



金 泰 樹 (Tae Soo KIM) 正會員
 1949年 8月 5日生
 1977年 2月 : 東亞大學校 電子工學科 卒業
 1985年 2月 : 東亞大學校 大學院 電子工學科 卒業 (工學碩士)
 1985年 3月 ~ 現在 : 東亞大學校 大學院 電子工學科 博士 課程
 1977年 7月 ~ 1980年 9月 : 遞信公務員教育院 教官

1980年 10月 ~ 1982年 2月 : 遞信部 計劃局 勤務
 1982年 3月 ~ 現在 : 釜山東明專門大學 電子科 副教授



金 明 起 (Myung Ki KIM) 正會員
 1930年 1月 25日生
 1958年 6月 : 美國 海軍工科學大學 卒業
 1966年 2月 : 서울大學校 大學院 電子工學科 卒業 (工學碩士)
 1976年 2月 : 東亞大學校 大學院 電子工學專攻 (工學博士)
 1954年 2月 ~ 1969年 3月 : 海軍士官學校 教授部 勤務

1969年 4月 ~ 1972年 2月 : IMEC 電子株式會社 勤務
 1972年 3月 ~ 現在 : 東亞大學校 工科學大學 電子工學科 教授
 本學會 釜山 - 慶南 支部長