불균형계량경제모형과 교체회귀모형*

이 회 경**

요 약

불균형계량경제모형의 분석을 위하여는 부분조정모형 또는 교체회귀모형이 응용되고 있다. 본 연구에서는 교체회귀모형이 표본분리 여부에 따라, 또 교체의 원인이 외생적인지 내생적인지에 따라 어떻게 구분될 수 있는지 보이고, 단일시장을 주 대상으로 하여 표본분리가 되는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 각각의 추정 방법과 그에 따른 문제점을 설명하였다.

1. 서 론

불균형모형의 추정시 흔히 거론되는 교체회귀모형(switching regression model)은 외생적 교체(exogenous switching)와 내생적 교체(endogenous switching)로 구분될 수 있는데 혼합분포모형(mixture distribution model)은 외생적 교체의 예이며 우리가 논하고자 하는 불균형모형은 내생적 교체의 예라고 할 수 있다. 본 연구에서는 이러한 교체회귀모형이 표본분리 (sample separation)여부에 따라 어떻게 구분될 수 있는지 보인 다음, 표본분리가 되지 않는 가장 단순한 형태의 불균형모형을 예로 들어 추정방법과 문제점을 설명하였다. 이어 이 모형이 표본분리가 될 때의 추정방법에 대하여 논한 다음, 마지막으로 시장의 형태가 변하여 단일시장이 아닌 다수의 시장이 되는 경우 어떻게 분석될 수 있는지 개관하였다. 추정방법의 일반적인 문제점은 결론 부분에서 요약되고 있다.

2. 모형

2.1 균형모형

불균형모형을 설명하기에 앞서 먼저 균형모형에 대하여 보기로 하자. 균형모형의 전형적인 예로는 다음과 같은 수요, 공급의 방정식으로 이루어지는 체계를 들 수 있다.

$$D_t = \alpha_1 P_t + X_{1t}\beta_1 + u_{1t} \tag{1}$$

---

* 본 논문은 1986년 12월 한국통계학회 추계학술발표회 심포지움에서 발표된 것을 정리 요약한 것임.
** 한국과학기술대학 경영과학과 조교수, 대전 유성구 구성동 400(305-701)

$$S_t = \alpha_2 P_t + X_{2t}\beta_2 + u_{2t}$$
$$Q_t = D_t = S_t \tag{2}$$

첫번째 식은 수요함수, 두번째 식은 공급함수를 가리키고 P_t는 가격수준, X_{1t}, X_{2t}는 외생변수를 나타낸다. Q_t는 거래된 양으로 실제 관찰되는 변량으로서 위의 모형을 그림으로 표시하면 그림 1과 같다.

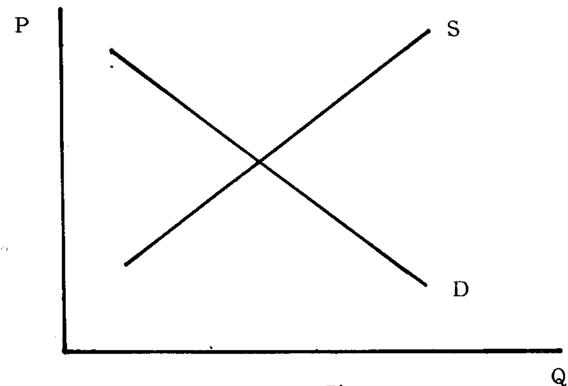

그림 1

이 모형은 내생변수가 P_t, Q_t인 연립방정식 체계로 α, β의 추정은 연립방정식 모형의 통상적인 추정방법에 따라 할 수 있다.

2. 2 불균형모형

이 모형에서는 식 (2)의 $Q_t = D_t = S_t$ 라는 가정이 완화된다. 따라서 불균형하에서는 시장청산이 되지 않는 가격에서 거래가 일어나게 되는데 거래행태를 특징지워주는 전형적인 가정은 소위 최소조건(minimum condition)이라 부르는

$$Q_t = \min(D_t, S_t) \tag{3}$$

으로, 그 시장에서 적게 나타나는 쪽에서 거래량이 정해진다.

이러한 불균형 모형의 분석은 부분조정 모형(partial adjustment model)에 의한 분석과 교체회귀모형(switching regression model)에 의한 분석으로 나누어 볼 수 있으며, 본 연구에서는 교체회귀 모형을 대상으로 하여 추정문제를 논하기로 한다.

2. 2. 1 교체회귀모형

$Q_t = \min(D_t, S_t)$로 ―즉 초과수요와 초과공급으로― 특징지워지는 불균형모형의 실증적 연구는 Fair and Jaffee (1972)의 연구가 효시이다. 이러한 형태의 불균형모형의 분석은 교체회귀모형 분석에 따르는데, 교체회귀모형은 교체요인이 외생적인가 내생적인가, 또는 표본분리 (sample separation)가 되는가 안되는가에 따라 표 1과 같이 구분될 수 있다. 내생적 교체란 대상이 되는 두개의 방정식 중 어느 방정식이 적용되는지 모형체계

안에서 그것이 결정되는 경우를 일컬으며 모형체계 밖에서 결정되어 주어지면 외생적 교체라 부른다. 이는 오차항의 공분산으로도 설명될 수 있는데 (Maddala (1983)) 판단기준이 되는 방정식 (selection rule)의 오차항과 교체대상이 되는 방정식(우리의 경우 D_t 및 S_t 방정식)의 오차항의 공분산이 0 이면 외생적 교체, 0 이 아니면 내생적 교체가 된다. 또 표본을 두개의 방정식에 따라 두집단으로 나누고 사후에 관측되는 거래량인 Q_t 가 이 두집단 중 어디에 속하는 지를 알 수 있으면 표본분리가 된다 하고, 어느 집단에 속하는지는 모르고 단지 거래량 Q_t만 안다면 표본분리가 되지 않았다 라고 한다.

표 1. 교체회귀모형

	외생적 교체(exogenous switching)	내생적 교체(endogenous switching)
표본분리가 되지 않을 때	<u>혼합분포모형</u> (Mixture distribution model) $y_t=X_{1t}\beta_1+u_{1t}$ with λ $y_t=X_{2t}\beta_2+u_{2t}$ with $1-\lambda$ $u_{1t}\sim IN(0,\ \sigma^2)$ $u_{2t}\sim IN(0,\ \sigma^2)$	$D_t=X_{1t}\beta_1+u_{1t}$ $S_t=X_{2t}\beta_2+u_{2t}$ $Q_t=\min(D_t,\ S_t)$ - - - - - - - - - $D_t=\alpha P_t+X_{1t}\beta_1+u_{1t}$ $S_t=\alpha_2 P_t+X_{2t}\beta_2+u_{2t}$ $Q_t=\min(D_t,\ S_t)$ $\Delta P_t=\gamma(D_t-S_t)+X_{3t}\beta_3+u_{3t}$
표본분리가 될 때	–	$D_t=X_{1t}\beta_1+u_{1t}$ $S_t=X_{2t}\beta_2+u_{2t}$ $Q_t=\min(D_t,\ S_t)$ and $\Delta P_t>0$ if $D_t>S_t$ <0 if $D_t<S_t$ - - - - - - - - - $D_t=\alpha_1 P_t+X_{1t}\beta_1+u_{1t}$ $S_t=\alpha_2 P_t+X_{2t}\beta_2+u_{2t}$ $Q_t=\min(D_t,\ S_t)$ and $\Delta P_t=\gamma(D_t-S_t)\quad \gamma>0$

2.2.2 가장 단순한 형태의 불균형모형

앞에서의 수요, 공급방정식과 최소조건을 함께 고려하면 다음과 같은 가장 단순한 형태의 불균형모형을 세울 수 있다.

$$D_t=\alpha_1 P_t+X_{1t}\beta_1+u_{1t}$$

$$S_t=\alpha_2 P_t+X_{2t}\beta_2+u_{2t}$$

$$Q_t=\min(D_t,\ S_t)$$

관찰되는 변수는 X_{1t}, X_{2t}, P_t, Q_t로 D_t나 S_t는 관찰되지 않고 거래된 양 Q_t만 관찰된다. 그런데

$D_t > S_t$이면 $Q_t = S_t$이고
$D_t < S_t$이면 $Q_t = D_t$이므로

수요, 공급 곡선에서 실제로 거래가 일어나는 부분은 아래의 그림 2와 같다.

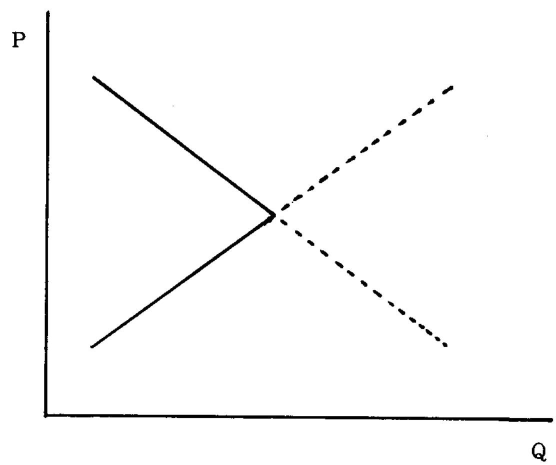

그림 2

균형모형 (즉 $Q_t = D_t = S_t$)에서 가격변수 P_t가 내생인 것과는 달리 이 모형에서 P_t는 P_t를 설명해주는 방정식이 없어 외생이다. 이 모형은 표본분리가 되어있지 않은데, 설혹 표본분리가 되어 있다 하더라도 절단 (truncated)된 표본에서 추출되었으므로 오차항의 평균이 0도 아니고 외생변수와 상관관계가 있어 통상최소자승법(ordinary least squares method, OLS)은 일치추정치(consistent estimates)를 주지 않는다.

이 모형의 경우 표본분리가 되어 있지 않아, 우리가 알 수 있는 것이라고는 t번째 관찰치가 첫번째 방정식 (수요함수)혹은 두번째 방정식 (공급함수)에 속하는 확률뿐이다. 즉 $D_t < S_t$라면

$$\begin{aligned}\lambda_t &= \mathrm{P}(D_t < S_t)\\ &= \mathrm{P}(\alpha_1 P_t + X_{1t}\beta_1 + u_{1t} < \alpha_2 P_t + X_{2t}\beta_2 + u_{2t})\\ &= \mathrm{P}(u_{1t} - u_{2t} < \alpha_2 P_t - \alpha_1 P_t + X_{2t}\beta_2 - X_{1t}\beta_1) \qquad (4)\end{aligned}$$

와 함께

$Q_t = D_t$

라는 것을 알게 되므로 $D_t > S_t$인 경우도 함께 고려하면 Q_t의 확률밀도함수는 아래와 같다.

$$f_Q(Q_t) = f_1(Q_t \mid D_t < S_t) \cdot \mathrm{P}(D_t < S_t) + f_1(Q_t \mid D_t > S_t) \cdot \mathrm{P}(D_t > S_t)$$
$$= \int_{Q_t}^{\infty} f_{D,S}(Q_t, S_t)\, dS_t + \int_{Q_t}^{\infty} f_{D,S}(D_t, S_t)\, dD_t \qquad (5)$$

따라서 최우추정치(Maximum Likelihood (ML) estimates)를 위한 우도함수(likelihood function)는

$$L = \Pi f_Q(Q_t) \qquad (6)$$

와 같다.

이러한 모형을 ML에 의하여 추정하고자 할 때의 문제점은 모수의 어떤값에 대하여 우도함수가 비경계(unbounded)될 수 있다는 점이다. 만일 $u_{it} \sim N(0, \sigma_i^2)$, $i=1, 2$, 이고 u_{1t}, u_{2t}가 서로 독립이라면 위 우도함수는 아래와 같이 표기될 수 있다.

$$L = \Pi \left[\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{Q_t - Z_{1t}\beta_1}{\sigma_1}\right)^2 \right\} \left(1 - \Phi\left(\frac{Q_t - Z_{2t}\beta_2}{\sigma_2}\right)\right) \right. \qquad (7)$$
$$\left. + \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{Q_t - Z_{2t}\beta_2}{\sigma_2}\right) \right\} \left(1 - \Phi\left(\frac{Q_t - Z_{1t}\beta_1}{\sigma_1}\right)\right) \right]$$

여기에서, $Z_{it} = (P_t, X_{it})$이고 Φ는 표준정규분포의 누적분포함수를 가르킨다. 이때 k번째 관찰치에 대하여 $Q_k - Z_1\hat{\beta}_k = 0$와 같이 되는 $\hat{\beta}_k$이 존재하고 $\sigma_1 \to 0$, $\sigma_2 \neq 0$ 라면

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{Q_k - Z_{1k}\beta_k}{\sigma_1}\right)^2 \right\} \to \infty \qquad (8)$$

이고 두번째 항은 모든 t에대하여 경계 (bounded)가 되므로 L은 비경계가 된다. 이것을 피하기 위하여 $\sigma_1^2 = c \cdot \sigma_2^2$ (c는 상수)와 같이 놓을 수가 있는데 (Goldfeld and Quandt (1975)), 이렇게 되면 국소극대점 (local maximum)을 찾게 될 것이다. 우도함수는 위의 예에서와 같은 경우에만 비경계가 되는 것이 아니라 u_{1t}, u_{2t}의 상관계수가 적절한 조건 아래에서 1 또는 -1로 접근할 때 역시 비경계가 될 수 있다. (Goldfeld and Quandt (1978)).

이러한 모형에서의 또 다른 문제점은 표본분리가 되어 있지 않으므로 표본분리가 되어 있는경우에 비하여 상대적으로 정보의 손실이 크다는 점이다. (Goldfeld and Quandt (1975), Kiefer (1979)). 따라서 다음 절에서는 표본분리가 가능하게끔 모형을 표기하고 그 추정방법을 보기로 한다.

2. 2. 3 표본분리가 가능한 경우

먼저 방향에 의한 접근방법 (directional method)에 대하여 보면

$$\begin{aligned}
&D_t = X_{1t}\beta_1 + u_{1t} \\
&S_t = X_{2t}\beta_2 + u_{2t} \\
&\Delta P_t > 0 \quad \text{if} \quad D_t > S_t \\
&\Delta P_t < 0 \quad \text{if} \quad D_t < S_t \\
&Q_t = \min(D_t,\ S_t)
\end{aligned} \tag{9}$$

와 같이 모형을 표기할 수 있다. 여기에서 오차항의 시계열상의 자기상관 (serial correlation)은 없다고 가정하며 우리가 관찰할 수 있는 변수는 Q_t, ΔP_t, X_{1t}, X_{2t}이다. 이때 ML을 위한 우도함수는 아래와 같다.

$$L = \prod_{\Delta P_t > 0} f(Q_t \mid D_t > S_t)\cdot \mathrm{P}(D_t > S_t)\cdot \prod_{\Delta P_t > 0} f(Q_t \mid D_t < S_t)\cdot \mathrm{P}(D_t < S_t)$$

$$= \prod_{\Delta P_t > 0} \int_{Qt}^{\infty} f(D_t,\ Q_t)dD_t \cdot \prod_{\Delta P_t < 0} \int_{Qt}^{\infty} f(Q_t,\ S_t)dS_t \tag{10}$$

ML의 대안으로는 2단계 최소자승법(2SLS)이나 Heckman(1978)류의 2단계 방법 등이 있을 수 있다.

이러한 모형이 갖는 문제점은 P_t가 초과수요나 초과공급이 있는지 알려주고 있다는 점에서 P_t는 외생변수일 수가 없으나 모형내에 P_t에 대한 방정식이 없다는 점이다. 그러나 오차항이 시계열상의 자기상관이 없다는 가정을 유지하고, ΔP_t에 대한 표기를 아래와 같이 하면 이러한 점은 해결될 수 있다.

$$\begin{aligned}
&D_t = \alpha_1 P_t + X_{1t}\beta_1 + u_{1t} \\
&S_t = \alpha_2 P_t + X_{2t}\beta_2 + u_{2t} \\
&\Delta P_t = \gamma(D_t - S_t) \\
&Q_t = \min(D_t,\ S_t)
\end{aligned} \tag{11}$$

ΔP_t가 위와 같이 표기되어 추정될 때 양에 의한 접근방법(quantitative method)라 부르며 $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$라면 모형의 추정은 다음과 같다. 먼저 ML을 위한 우도함수는

$$L = \prod_{\Delta P_t < 0} f(P_t,\ Q_t \mid D_t < S_t)\cdot \mathrm{P}(D_t < S_t) \cdot \prod_{\Delta P_t > 0} f(P_t,\ Q_t \mid D_t > S_t)\cdot \mathrm{P}(D_t > S_t) \tag{12}$$

와 같으며 2SLS 역시 사용될 수 있다.

만일 ΔP_t를 다음과 같이 달리 표기하면 좀 더 일반적인 형태의 불균형 모형이 될 수 있다.

$$\begin{aligned}
&D_t = \alpha_1 P_t + X_{1t}\beta_1 + u_{1t} \\
&S_t = \alpha_2 P_t + X_{2t}\beta_2 + u_{2t} \\
&\Delta P_t = \gamma(D_t - S_t) + X_{3t}\beta_3 + u_{3t} \\
&Q_t = \min(D_t,\ S_t)
\end{aligned} \tag{13}$$

이러한 모형의 예로는 Fair and Jaffee(1972)의 주택건설수요 및 공급함수 모형이 있으며, 이 모형을 ML로 추정하고자 한다면 그 우도함수는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} L &= \Pi\,[g_1(Q_t,\ P_t \mid D_t < S_t)\cdot \mathrm{P}(D_t < S_t) + g_2(Q_t,\ P_t \mid D_t > S_t)\cdot \mathrm{P}(D_t > S_t)] \\ &= \Pi\,[\int_{Q_t}^{\infty} f(Q_t,\ S_t,\ P_t)dS_t + \int_{Q_t}^{\infty} f(D_t,\ Q_t,\ P_t)dD_t] \end{aligned} \tag{14}$$

2. 2. 4 시장이 여럿 있는 경우

지금까지는 한개의 시장만을 고려하였으나, 다수의 시장이 서로 연관되어 있는 경우 흔히 한 시장에서 충족되지 않은 수요나 공급은 다른시장에 영향을 미치게 되는 파급효과(spillover effect)가 존재하게 된다. 예를 들어 노동시장과 재화시장을 고려할 때 노동시장의 초과공급 즉 실업은 재화시장의 수요를 감소시키게 될 것이다. 이러한 파급효과를 고려하면 모형은 아래와 같이 표기될 수 있을 것이다.

$$\begin{aligned} D_{1t} &= X_{1t}\alpha_1 + \mu_1(Q_{2t} - S_{2t}^*) + u_{1t} \\ S_{1t} &= Z_{1t}\beta_1 + \omega_1(Q_{2t} - D_{2t}^*) + v_{1t} \\ Q_{1t} &= \min(D_{1t},\ S_{1t}) \\ D_{2t} &= X_{2t}\alpha_2 + \mu_2(Q_{1t} - S_{1t}^*) + u_{2t} \\ S_{2t} &= Z_{2t}\beta_2 + \omega_2(Q_{1t} - D_{1t}^*) + v_{2t} \\ Q_{2t} &= \min(D_{2t},\ S_{2t}) \end{aligned} \tag{15}$$

D_{it}^*, S_{it}^* 는 각각 관념적인 수요(notional demand)와 공급을 가리키며, 위의 모형은 표본분리가 되지 않은 상태로 P_t는 외생이다. (따라서 여기에서는 X_{it}, Z_{it}에 P_t가 포함되어 있음.) 앞서와 같이 ΔP_t를 아래와 같이 표기하면 표본분리가 가능한 모형을 의미하며 P_t도 내생변수가 된다.

$$\begin{aligned} \Delta P_{1t} &= \lambda_1(D_{1t} - S_{1t}) && \text{if } D_{1t} > S_{1t} \\ &= \delta_1(D_{1t} - S_{1t}) && \text{if } D_{1t} < S_{1t} \\ \Delta P_{2t} &= \lambda_2(D_{2t} - S_{2t}) && \text{if } D_{2t} > S_{2t} \\ &= \delta_2(D_{2t} - S_{2t}) && \text{if } D_{2t} < S_{2t} \end{aligned} \tag{16}$$

이와 같은 다수시장의 경우에서는 논리상 일치조건(logical consistency condition)을 조사하여야 한다. 또 이 모형은 거시모형이 되어 추정에 많은 어려운 점을 내포하고 있어 실증적인 예는 그리 많지 않다. 외국의 추정예로는 노동시장과 재화시장을 고려한 거시불균형모형인 Artus et al. (1984)을 들 수 있고 국내의 예로는 이들의 모형을 국내시장 자료로 조사한 최수혁(1985)의 경우가 유일한 예라 할 수 있다.

3. 결론

우리는 불균형모형을 크게 표본분리가 되지 않는 경우와 표본분리가 되는 경우로 대별하여 단일시장모형을 대상으로 추정방법과 문제점을 조사하였다. 추정방법은 주로 ML에 의존하여 우도함수를 구하였는 바, ML은 계산상의 어려움 외에도 우도함수 자체가 비경계될 수 있다는 점이 문제점으로 지적될 수 있다. 한편, ML의 대안으로 2SLS를 사용하면 일치추정량(consistent estimator)을 주기는 하나 점근적으로 효율적(asympotically efficient)이지 않다는 점에서 제한점을 갖는다. 시장이 여럿있는 경우의 모형에 대한 추정방법 등은 아직 미개척분야라 할 수 있어 본 연구에서 조사한 추정법들이 어떻게 다수시장모형에 적용될 수 있는지 조사하는 것은 앞으로의 과제라 하겠다.

참 고 문 헌

(1) 최수혁(1985), 거시불균형이론의 실증적 연구, 석사학위논문, 연세대학교.

(2) Artus, P.,G. Laroque, and G. Michel (1984). "Estimation of Quarterly Macroeconomic Model with Quantity Rationing," *Econometrica*, 1387 – 1414.

(3) Fair, F., and D. Jaffee (1972). "Methods of Estimation for Markets in Disequilibrium," *Econometrica*, 497 – 514.

(4) Goldfeld, S. M., and R. E. Quandt (1975). "Estimation in a Disequilibrium Model and the Value of Information," *Journal of Econometrics 3*, 325 – 48.

(5) ________ (1978). "Some Properties of the Simple Disequilibrium Model with Convariance," *Economics Letters 1*, 343 – 6.

(6) Heckman, J. (1978). "Dummy Endogenous Variables in a Simultaneous Equation System," *Econometrica*, 46, 931 – 959.

(7) Kiefer, N. (1979) "On the Value of Sample Separation Information," *Econometrica*, 997 – 1003.

(8) Maddala, G. S. (1983). *Limited-dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Cambridge Univ. Press.

Disequilibrium Econometric Models and Switching Regression Models

Hoe Kyung Lee

Abstract

Switching regression models are commonly used for the statistical analysis of the disequilibrium models. In this paper we show how switching regression models can be classified by the sample separation criterion and how they are related to the disequilibrium models. The problems in the estimation of the disequilibrium models are discussed for the ones with both known sample separation and unknown sample separation.