다단계분할법에 의한 철근콘크리트 뼈대구조의 최적화에 관한 연구

Optimum Design of Reinforced Concrete Framed Structures by Multilevel Decomposition

변 근 주*　　최 홍 식*
Byun, Keun Joo　　Choi, Hong Shik

ABSTRACT

Since reinforced concrete framed structures consist of various design variables, the objective and the constraint functions are usually complicated. In order to avoid this difficulty, decomposition methods have been used by partitioning a whole structure into substructures. However, the suboptimization, in which the member forces acting on the substructrues are invariant, requires reanalysis with updated stiffness properties of substructures in an iterative manner. In this paper, a multilevel formulation consisting of 3 levels is adopted. Opfimizafion in substructure is performed to reflect the changes in stiffness and member forces. The assembled structure is optimized while the substructure variables are optimized using sensitivity information.

The sizing variables, reinforcement, and moment redistribution ratio are taken as design variables, and a cost function is taken as the objective function. The stress and side constraints of the structures are derived from ACI 318−83 for the ultimate strength design.

At level 1, elastic analysis is performed to get the upper and lower bounds of the redistijbuted design moment which are due to inelasfic behavior of the frame. Then the sizing variales are optimized by the SUMT at level 2. The design moment is taken as design variables and optimized at level 3. The optimization of redistributed moments is performed using the design sensitivity obtained at the level 2, and force approximation technique is used to reflect the variation of design variables in lower level to the upper level. The design variables are selected in reduced numbers at each levels, and the optimization formulation is quite simplified.

The developed algorithm is applied to a continuous beam, a one story two bay frame, and a two story one bay frame, and the results are compared with those in the literature. It is shown that the developed algorithm is effective and stable, Therefore. it is considered that the developed algorithm can be effectively applied to reinforced concerte structures.

*정회원, 연세대학교 토목공학과교수, 공학박사
**정회원, 연세대학교 산업기술연구소 연구원, 공학박사

● 1989.9.2 접수. 본 논문에 대한 토론을 1990.3.31까지 본학회에 보내주시면 1990.6월호에 그 결과를 게재해 드리겠읍니다.

요 약

철근콘크리트 뼈대구조와 같이 설계변수가 과다하고, 제약조건식이 복잡한 구조물의 최적화를 위하여는 구조물을 여러개의 부분구조물로 분할하여 최적해를 구하는 분할법이 많이 사용되고 있다. 그러나 기존의 분할법에 의한 최적화는 구조해석과정과 고정된 부재력에 대한 단면설계변수의 부분최적화 과정만으로 이루어지기 때문에, 최적해를 구하려면 반복적인 재해석과정만을 수행하지 않으면 안된다. 따라서 본 연구에서는 다단계분할법에 의하여 철근콘크리트 벼대구조의 최적화 문제를 3단계로 형성하고, 분할된 부분최적화문제의 최적화시 전체구조의 강성 및 부재력 변화가 반영되어 부분 구조물의 결합을 유지시킬 수 있는 최적화 알고리즘을 제안하였다.

최적화 문제에서 설계변수로는 단면의 크기, 철근량, 모멘트 재분배율등을 취하고, 목적함수는 경비함수, 제약조건으로는 강도설계법에 의한 부재강도, 시방서의 요구사항등을 고려하여 문제를 형성하였다.

본 연구에서 개발한 다단계 최적화과정의 첫째 단계에서는 탄성해석에 의하여 재분배모멘트의 설계공간을 형성한다. 이 때 부재력변화량추정(forece approximation technique)에 의하여 단면치수의 변화에 따른 부재력의 변화를 제약조건식 내에 포함시킬 수 있도록 하였다. 둘째 단계에서는 첫째 단계에서 구한 부재력변화량추정이 포함된 제약조건식 내에서 무제약최소화기법에 의하여 단면치수를 최적화하도록 하였다. 셋째 단계에서는 재분배 모멘트를 최적화하였으며, 이 때 재분배모멘트의 변화에 따른 단면설계 변수의 변화는 둘째 단계에서 구한 설계민감도(design sensitivity)를 이용하여 반영시키도록 하였다.

제안된 알고리즘을 1층 2경간 및 2층 1경간 뼈대구조에 적용하여 알고리즘의 타당성과 효율성을 입증하였다. 따라서 본 연구의 알고리즘은 철근 콘크리트 뼈대구조의 최적설계에 안정성있게 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

1. 서론

대규모의 구조물에 최적설계이론을 적용할 경우에는 설계변수와 제약조건의 수가 많아지므로, 설계과정을 수행하기가 매우 힘들거나 경비가 많이 들고, 때로는 컴퓨터 용량의 부족을 야기하는 등의 이유때문에 많은 문제점을 가지고 있었다. 최적설계의 적용이 구조물 부재의 요소최적화 단계를 지나 구조계의 최적화(System optimization)로 폭넓게 확대됨에 따라 더욱 많은 제한사항에 부딪히게 되었다. 1), 2)

이러한 복잡한 구조들의 최적화에 합리적으로 접근하려는 시도의 하나가 전체 최적화문제를 보다 작은 크기의 부분최적화 문제로 분할하는 방법이다. 이러한 방법의 장점은 최적화 문제를 비교적 쉽게 다룰 수 있는 정도의 크기로 분할 할 뿐 아니라, 각각의 부분 최적화 문제를 따로 실행하는 것을 가능하게한다. 또, 여러대의 컴퓨터를 통하여 작업을 병행할 때에는, 대용량의 문제를 다루는데 있어 설계시간을 줄이는 효과도 가져올 수 있는 장점을 가지고 있다. 분할시에 부재간의 최적화 경향을 최종 단계에서 효과적으로 취합(coupling)할 수 있도록 하기 위하여 여러가지의 시도가 이루어지고 있다.

첫째는 전 단계의 부구조물상의 설계변수 설계민감도(design sensitivity)를 다음 단계의 목적함수에 반영시킴으로써 해결하려는 시도이다. 이와 같은 접근방법은 1982년 Sobieszczanski-sobieski등에 의해 목적함수 및 각 부구조물의 변수를 다른 부구조물의 변수로 미분한 민감도 정보를 다음 단계의 최적화에 반영한 것으로 구체화 되기 시작하였다3). 이때의 설계민감도는 Taylor 급수의 1차항을 이용하여 얻도록 하였다. 한편 1985년 Sobieszczanski-sobieski 등은 위의 방법이 강재 뼈대 구조 등의 구조 최적화에 적용 가능함을 제시하였다4).

두번째 방법은 1985년 Kirsch등에 의해 시도된 방법으로 콘크리트 구조등의 복잡한 구조에대해서 4단계 까지의 다단계 분할을 시도하여 반복 최적화과정을 줄이려는 노력이 시도되었다.5).

그러나 전자의 방법은 재하경우가 증가하면

부구조물의 설계변수 각각에 대한 편미분항이 크게 증가하므로 제약조건이 복잡해지게 되어 효율이 둔화되는 단점이 있다. 또 후자의 경우에는 연속보에의 적용가능성만을 제시하였을 뿐 효과적인 단계간의 결합을 시도하지 못하였다.

본 연구에서는 다단계분할법을 철근콘크리트 뼈대구조의 최적설계에 적용하여 효율적으로 최적해를 구하는 알고리즘을 도출한다. 제약조건식의 증가없이 부분 최적화시 전체구조의 강성의 변화를 반영하고, 나아가 구조물의 재분배 모멘트를 고려한 최적해를 도출할 수 있는 알고리즘을 제안한다. 이를 위하여 먼저 분할법의 단점을 보완할 수 있는 분할법의 최적화문제를 형성하고, 수치예를 통하여 그 타당성과 효율성을 검증하고자 한다.

2. 철근콘크리트 뼈대구조의 최적화 문제형성

최적화 문제형성에서 목적함수는 경비함수를 취하고, 제약조건은 응력, 설계변수의 상하한치 등을 취하고, 설계변수로는 단면치수, 단면력, 모멘트 재분배율등을 선정하여 문제를 유도한다.

1) 목적함수

구조물 설계의 목적함수로는 통상 경비, 중량, 체적, 변형에너지 등이 될 수 있으나, 본 연구에서는 식(1)과 같은 경비함수를 철근 콘크리트 뼈대구조의 목적함수로 취하였다.

$$Z = C_c \sum_{j=1}^{n} f_c(D_j) + C_s \mu_s \sum_{j=1}^{n} As_j l_j + C_f \sum_{j=1}^{n} f_f(b,\ D_j) \qquad (1)$$

여기서, Z = 목적함수, 경비함수

C_c = 콘크리트의 경비

C_s = 철근의 경비

C_f = 거푸집의 경비

b = 단면의 폭

D_j = j번째 설계단면의 형상변수

As_j = J번째 설계단면의 철근의 단면적

l_j = j번째 설계단면의 보강철근의 길이

μ_s = 철근의 단위중량

n = 설계단수의 갯수

f_c, f_f = 각각 콘크리트의 체적 및 거푸집의 면적 함수

본 연구에서는 최적화의 문제를 3단계로 구성하도록 한다. 각 단계별 최적화 문제형성은 제1단계에서는 구조해석에 의해 부재력을 구하고 제2단계에서는 단면을 최적화 하며, 제 3단계에서는 휨부재의 재분배 모멘트를 최적화하는 3단계로 구성된다.

2) 모멘트 설계공간의 설정

모멘트 재분배율을 설계변수로 취한 후, 7), 8), 9), 10) 부재의 절점 모멘트의 설계영역을 탄성해석을 통하여 구하고, 모멘트의 설계영역에 대한 제약조건을 형성한다. 재분배모멘트의 설계영역은 탄성해석으로 부터 구한 모멘트에 대하여 아래 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$M_j^L \leq M_j \leq M_j^U \qquad (2)$$

여기서, M_j^L = 재분배 모멘트의 하한치

M_j^U = 재분배 모멘트의 상한치

M_j = 재분배 모멘트

3) 부재단면 설계변수의 최적화

단계 2에서 부재단면을 최적화하는 문제는 식(3)으로부터 (7)과 같이 형성된다.

$$\text{Minimize} \quad Z = f(M_j,\ N_j,\ D_j) \qquad (3)$$

$$\text{subject to} \quad Mu_j(D_j,\ As_j) - M_j \geq 0 \qquad (4)$$

$$Nu_j(D_j,\ As_j) - N_j \geq 0 \qquad (5)$$

$$D_j^L \leq D_j \leq D_j^U \qquad (6)$$

$$As_j^L \leq As_j \leq As_j^U,\ j = 1, \cdots, n \qquad (7)$$

여기서 Z : 목적함수

Mu_j : j번째 단면의 극한저항 모멘트

M_j : j번째 단면의 설계모멘트

Nu_j : j번째 단면의 극한저항축력

N_j : j번째 단면의 설계축력

D_j : j번째 단면의 부재 치수

D_j^L : j번째 단면의 부재 치수 하한치

D_j^U : j번째 단면의 부재 치수 상한치
As_j : j번째 단면의 철근의 단면적
As_j^L : j번째 단면의 철근의 단면적의 하한치
As_j^U : j번째 단면의 철근의 단면적의 상한치

이때 식 (4)의 M_j는 휨모멘트, N_j는 축력등의 부재력을 나타낸다.

4) 재분배 모멘트의 최적화

재분배모멘트의 최적화는 모멘트재분배율의 적용범위내에서 이루어진다. 따라서, 재분배모멘트의 최적화는 재분배율의 최적화문제로 변환되어, 단계 3에서의 최적화 문제는 식(8)과 같이 형성된다.

$$\begin{aligned}&\text{Minimize} \quad Z = f(Mu_j) \\ &\text{subject to } Mu_j - M_j \geq 0.\end{aligned} \tag{8}$$

여기서, Mu_j = j번째 설계단면의 극한 저항 모멘트
M_j = j번째 설계단면의 설계모멘트

3. 다단계분할법에 의한 최적화알고리즘의 개발

3. 1 무제약 최소화 기법

본 연구에서 사용된 무제약 최소화기법은 목적함수와 제약조건식을 가지고 있는 최적화 문제를 벌칙매개변수(penalty parameter)에 의하여 제약조건식을 목적함수에 포함시키므로써 의사목적함수(pseudo-objective function)를 형성하여 최적해를 얻도록 하는 기법으로서 최적해를 구하는 무제약함수의 일반식은 아래 식 (9)와 같다.

$$\Phi(X, r_p) = F(X) + r_p\ p(X) \tag{9}$$

여기서 Φ = 의사목적함수
F(X) = 목적함수
r_p = 벌칙매개변수
P(X) = 벌칙함수

$$= \sum_{j=1}^{K} \frac{-1}{g_j(x)}$$

$g_j(x)$ = 제약조건식

본 연구에서는 위의 벌칙함수 p(x)가 제약조건식의 경계점 부근에서 연속성을 갖도록 수정한 2차 전개벌칙함수(quadratic extended penalty function)를 사용한다.

3. 2 설계민감도와 부재력 변화량 측정.

3. 2. 1 설계민감도

구조 절점에서의 모멘트의 변화에 따른 단면치수의 변화율을 식 (10)에 의하여 구하므로서 단면의 반복최적화 없이 설계민감도를 이용하여 재분배모멘트의 최적화가 가능토록 한다.

$$\frac{dZ}{dM_j} = \frac{\partial Z}{\partial M_j} + \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial D_k} \frac{\partial D_k}{\partial M_j} \tag{10}$$

여기서 D_K : 부재단면치수
n : M_j에 의해 설계되는 단면의 수

일반적으로 설계변수의 부재력에 대한 편미분항 $\partial D_k / \partial M_j$는 유한 차분법에 의하여 구해지며, 내삽법(interpolation) 또는 외삽법(extra polation)에 의하여 부재력의 변화에 따른 단면설계변수의 변화치을 구하게 된다. $\partial D_k / \partial M_j$는 식(11)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial D_k}{\partial M_j} = \frac{D_k(M_j + \delta M_j) - D_k(M_j)}{\delta M_j} \tag{11}$$

3. 2. 2. 부재력 변화량 추정

뼈대구조등의 단면치수를 최적화하는 단계에서 설계변수의 값이 변화하면 구조해석단계에서 모멘트의 설계영역이 변하게 된다. 따라서 전체의 구조에 대한 최적해로의 수렴을 위하여 다시 추가적인 반복과정을 거쳐야 한다. 그러므로 본 연구에서는 단계 1과 단계 2를 연결할 수 있도록 하기 위하여 단계 2에서의 설계변수의 변화에 따른 부재력의 변화를 부재력 변화량 추정(force approximation technique)을 이용하여 반영한다. 이때 설계변수의 함수로 표시된 부재력은 D_{k0}근방에서 Taylor급수에 의하여 전개한 후 1차항까지만 취하면 식 (12)와 같다. 11)

$$M_j(D_k) = M_j(D_{ko}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M_j}{\partial D_k}(D_k - D_{ko}) \quad (12)$$

여기서 D_{k0} : 부재치수의 초기치

D_k : 부재치수

$\frac{\partial M_j}{\partial D_k}$: 부재치수의 변화에 따른 모멘트의 변화량

이때 미분항 $\partial M_j/\partial D_k$는 전진유한차분법에 의하여 식(13)으로 부터 구할 수 있다.

$$\frac{\partial M_j}{\partial D_k} = \frac{M_j(D_k + \delta D_R) - M_j(D_k)}{\delta D_k} \quad (13)$$

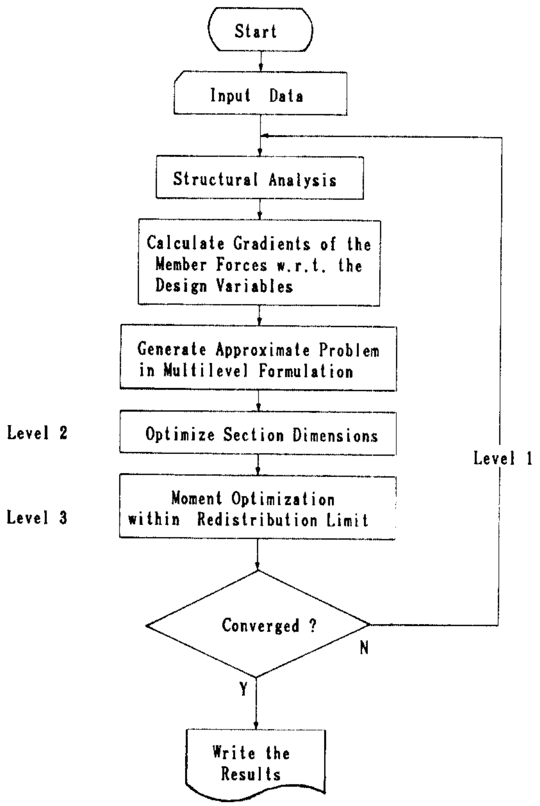

그림 1 적용 최적화 알고리즘의 흐름도

4. 수치예 및 결과분석

4. 1. 구조모형과 최적설계 결과

제안된 알고리즘의 적용성과 효율성을 검토하기 위하여 철근콘크리트 뼈대구조에 다단계 분할법을 적용하여 최적해를 얻도록 한다. 철근콘크리트 뼈대구조의 대상 모형은 각각 그림 2, 3과 같은 1층 2경간 및 2층 1경간 철근콘크리트 뼈대구조를 취하였는데, 이때 설계에 사용된 재료의 강도 및 경비상수는 표 1과 같다.

표 1 사용된 상수의 값

구 분	값	단 위	구 분	값	단 위
σ_{ck}	210	kg/cm²	Cc	0.036659	원/cm³
σ_y	4,200	kg/cm²	Cs	2.207900	원/cm³
Ec	2.17×10^5	kg/cm²	Cf	0.477200	원/cm²
Es	2.04×10^6	kg/cm²			

그리고 두 수치예에 사용된 사하중은 32.0kg/cm, 활하중은 49.0kg/cm, 부재의 폭 b=40cm, 압축철근의 덮개 d' =4.0cm, H=3m, h1= h2=1.5m, L=6m이다.

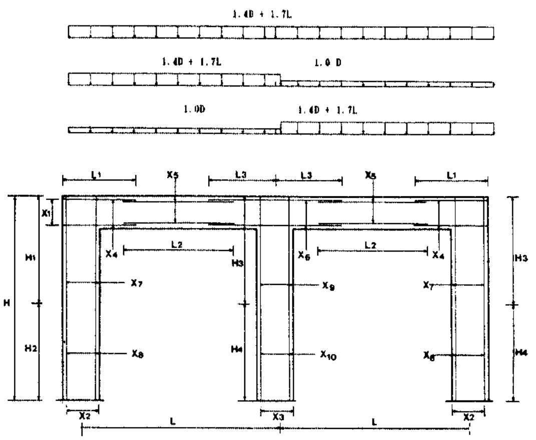

그림 2 1층 2경간 철근콘크리트 뼈대구조 모형

1층 2경간 철근콘크리트구조에 대하여 그림 2에 도시된 3가지 재하경우를 고려하여 최적해를 구한 경우, 최적 설계의 초기치와 최적해는 각각 표 2 및 표 3과 같다. 이때 최적해의 수렴과정을 도시한 그림 4와 같다.

2층 1경간 철근콘크리트구조에 대하여 그림 3에 도시된 3가지 재하경우를 고려하여 최적해를 구한 경우, 최적 설계의 초기치와 최적해는 각각 표 4및 5와 같다. 이때 최적해의 수렴과정을

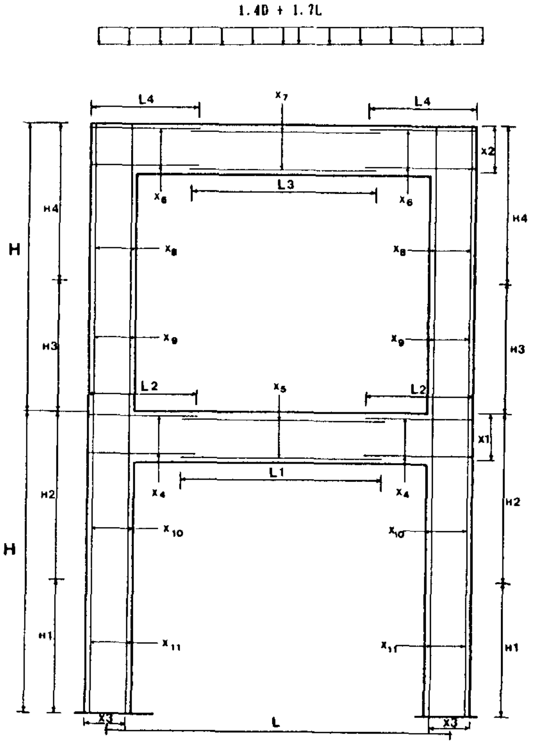

그림 3 2층 1경간 철근콘크리트 뼈대구조 모형

구분	L1	L2	L3	α	X1	X2	X3	X4
단 위	cm	cm	cm		cm	cm	cm	cm^2
초기지	164.33	379.96	204.98	0.96	55.00	55.00	55.00	20.00
구 분	X5	X6	X7	X8	X9	X9	경비	b
단 위	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	원	cm
초기치	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	325700	20.00

도시하면 그림 5와 같다.

4. 2 비교분석

다단계 분할법에 의한 철근콘크리트 뼈대구조의 최적설계의 알고리즘을 제안하고, 이알고리즘을 1층 2경간 및 2층 1경간 뼈대구조물등의 대상구조에 적용하여 얻어진 결과를 분석하면 다음과 같다.

(1) 설계모멘트와 축력에 대한 포락선도를 이용하여 설계단면력의 설계공간을 구한 다음, 설계모멘트를 최적화의 설계변수로 선택하게 되면,

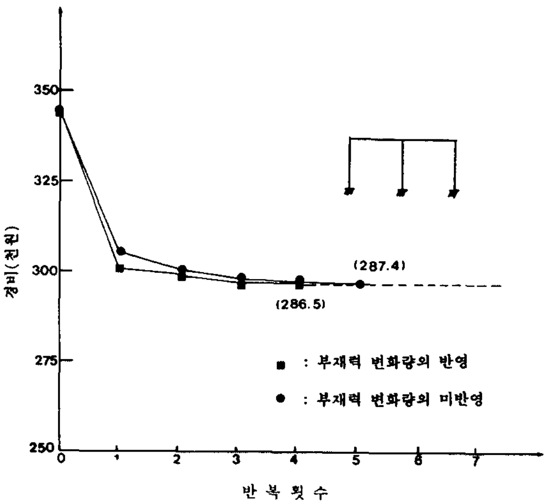

그림 4 1층 2경간 철근콘크리트 뼈대구조의 최적해 수렴과정

1 표 3 1층 2경간 뼈대구조의 최적설계결과

구 분	L1	L2	L3	α	X1	X2	X3	X4
단 위	cm	cm	cm		cm	cm	cm	cm^2
최적치	127.83	127.83	204.77	0.898	52.16	35.17	34.84	5.26
구 분	X5	X5	X7	X8	X9	X10	경비	b
단 위	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	원	cm
최적치	16.37	16.37	24.64	7.84	19.33	8.43	286461	20.00

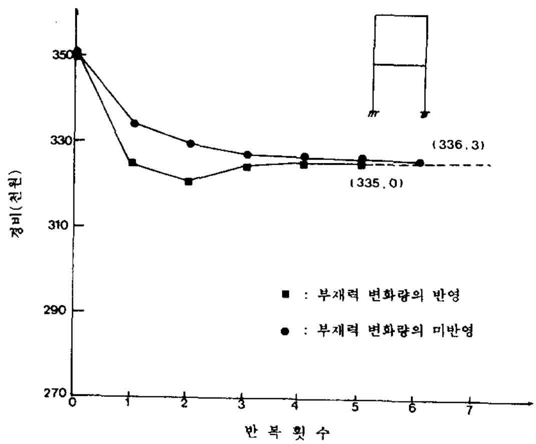

그림 5 2층 1경간 철근콘크리트 뼈대구조의 최적해 수렴과정

표 4 2층 1경간 뼈대구조의 초기치

구 분	L1	L2	L3	L4	X1	X2	X3	X4	X5
단 위	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm^2	cm^2
초기치	518.52	40.75	456.20	71.91	55.00	55.00	55.00	20.00	20.00
구 분	X6	X7	X8	X9	X10	X11	α	경비	b
단 위	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2		원	cm
조 건	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	1.00	334994	20.00

표 5 2층 1경간 뼈대구조의 최적설계 결과

구 분	L1	L2	L3	L4	X1	X2	X3	X4	X5
단 위	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm^2	cm^2
최적치	518.88	40.57	455.17	72.42	48.90	47.07	33.56	15.95	19.00
구 분	X6	X7	X8	X9	X10	X11	α	경비	b
단 위	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2	cm^2		원	cm
최적치	24.72	14.48	7.52	14.91	38.98	48.41	1.00	334994	20.00

주 : $X_1 \sim X_3$: 부재치수, $X_4 \sim X_{11}$: 철근단면적, α = 재분배율

재하경우의 증가에 따른 제약조건식의 증가를 줄이고, 설계 변수의 수는 1층 2경간의 경우 14개에서 각 부분구조물당 3개로, 2층 1경간의 경우 16개에서 각 부분구조물당 3개로 감소시킬 수 있음을 알 수 있다.

(2) 다단계 분할에 의한 최적설계를 통하여, 1층 2경간 철근콘크리트 뼈대구조의 경우 4-5회 이내에서, 2층 1경간 뼈대구조의 경우 5-6회 이내에서 최적해에 수렴하는 것으로 나타났고, 부재력 추정을 고려한 경우가 부재력 추정을 고려하지 않은 경우에 비하여, 최적해는 거의 같으나, 1회정도 빨리 최적해에 수렴함을 알 수 있었다.

(3) 1층 2경간의 동일한 기하형상과 하중조건을 가진 철근콘크리트 뼈대구조를 최적화한 문헌 12의 경우와 본 연구의 결과를 비교하면 그림 6과 같다. 이때 문헌 12의 경우는 한계상태설계법, 본 연구결과는 강도설계법에 의하여 시방서를 만족하는 최적해를 구한결과이다. 문헌 12에서는 기둥의 단면치수를 하나의 변수로 다루었으며 본 연구에서는 외측기둥과 내측기둥의 단면치수를 각각 최적화 하였고, 재료의 설계강도, 철근의 절곡길이 등에서 본 연구와 차이를 가지고 있기 때문에 엄밀한 비교는 어렵다. 최적해의 값은 문헌 12의 경우 325,210원이며, 본 연구의 경우에는 286,416원으로 나타나 최적해간의 비교는 다소 차이가 있으나, 그 수렴과정만을 비교할 때 문헌 12의 경우는 6회에, 본 연구에서는 부재력변화량 추정을 하지 않은 경우 5회, 부재력변화량추정을 한경우 4회에서 각각 최적해에 도달하므로써 양호한 수렴성을 보여 줌을 알 수 있다. 즉 본 연구의 알고리즘은 설계이론에 영향을 받지 않고, 수렴성이 개선되었음을 알 수 있다.

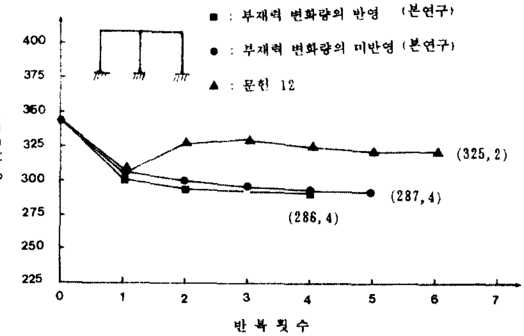

그림 6 1층 2경간 철근콘크리트 뼈대구조의 최적해 수렴과정

5. 결 론

다단계분할에 의해 철근콘크리트 뼈대구조의 효율적인 최적화알고리즘을 제안하고 수치적용을 통하여 얻어진 본 연구의 결론은 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서는 다단계 최적화 알고리즘을 제안하므로서 철근콘크리트 뼈대구조의최적설계를 가능하도록 하였다. 단계 1은 모든 재하경우에 대한 부재력의 포락선으로 부터 휨모멘트의 설계공간을 구하고, 부재력 변화량추정을 위한 민감도를 구하고 것이고, 단계 2는 구조시스템의 단면을 최적화하는 것이며, 단계 3은 설계휨모멘트를 최적화하는 것이다. 따라서 모든 단계별로 최적설계가 이루어지기 때문에 설계변수를 줄일 수 있으며 한편 설계민감도를 이용하므로서 각 최적화 단계의 연계성이 이루어짐을

알 수 있었다.

둘째, 부재력변화량 추정방법을 도입하여 부재치수의 변화가 구조물의 부재력과 강성에 미치는 영향을 최적설계의 중간단계에서 반영하므로써 구조의 재해석 과정이 감소하고, 수렴성이 향상됨을 구명하였다.

셋째, 휨모멘트의 재분배율을 설계변수로 취하여 설계모멘트를 최적화하도록 최적화문제를 형성하였다. 이때 단면최적화시의 설계민감도를 이용하므로써 설계모멘트의 변화에 따른 단면치수의 반복적인 최적화과정을 효율적으로 줄일 수 있었다.

참고문헌

1. Lev, O. E. (ed), Structural Optimization-Recent Developments and Applications, State-of-the-Art Report, ASCE, 1981, pp. 7-20.
2. Levy, R., and Lev, O. E., "Recent Developments in Structural optimization," Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 9, Sep., 1987, pp. 1939-1962
3. Sobieszczanski-Sovieski, J., Barthelmy, J. F., and Riley, K. M., "Sensitivity of Optimum Solutions to Problem Parameters," AIAA Journal, Vol, 20, Sept., 1982, p. 1291.
4. Sobieszczanski-Sobieski, J., James, B. B., and Dovi, A. R., "Structural Optimization by Multilevel Decomposition," AIAA Journal, Vol. 23, Nov., 1985, pp. 177-1782
5. Kirsch, U., "Multilevel Optimum Design of Reinforced Concrete Structures," Engineering Optimization Vol. 6, 1983, pp. 207-212
6. Vanderplaats, G. N., Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill Book Company, 1984, pp. 121-136.
7. ACI, Building Code Requirements for Reinforced concrete, ACI 318-83, 1983, pp. 1-78
8. Mattock, A. H., "Rotation Capacity of Hinging Regions in Reinforced Concrete Beams," Proceedings of International Symposium in Flexural Mechanics of Reinforced Con crete, Miami, Florida, Nov., 1964, ACI Special Publication SP-12, 1965, pp. 212-220.
9. Ali, M. M., "Optimal Limit-State Design of Reinforced Concrete Frameworks," Ph . D dissertation, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1977, pp. 31-38
10. Ali, M. M., and Grierson, D. E. "Nonlinear Design of Reinforced Concrete Frameworks," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 112, No. 10, Oct., 1986, pp. 2216-2233.
11. Vanderplatts, G. N., and Salajegheh, E., "A New Approximation Method For Stress Constraints in Structural Synthesis, "Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AHS 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Monterey, California, 1987. pp. 314-321.
12. 변근주, 황학주, 박문호, "한계상태설계법에 의한 철근콘크리트 평면 뼈대구조의 최적단면 설계에 관한 연구," 대한토목학회지, 제29권 3호, 1981년 6월, pp. 131-143.