

# 선형 구조계의 동특성 추정법

## Identification of Linear Structural Systems

윤 정 방\*  
Yun, Chung Bang

### 요 약

구조계에 작용되는 하중과 이로 인한 동적거동의 측정기록을 바탕으로 하여 구조계의 미지계수 행렬을 추정하는 방법에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 통상 미분방정식으로 주어지는 운동방정식을 ARMAX 모형식으로 변환시켜서 ARMAX 식의 계수행렬을 추정한 후, 이로부터 운동방정식의 계수행렬을 구하였다. ARMAX 계수의 추정은 최소자승법, Instrumental Variable 방법, Maximum Likelihood 방법 및 Limited Information Maximum Likelihood 방법을 사용하여 수행하였으며, 지진 하중을 받는 3층 건물 모형을 예제로하여 각 방법의 효율성을 비교분석하였다.

### Abstract

Methods for the estimation of the coefficient matrices in the equation of motion for a linear multi-degree-of-freedom structure are studied. For this purpose, the equation of motion is transformed into an auto-regressive and moving average with auxiliary input(ARMAX) model. The ARMAX parameters are evaluated using several methods of parameter estimation: such as the least squares, the instrumental variable, the maximum likelihood and the limited information maximum likelihood methods. Then the parameters of the equation of motion are recovered therefrom. Numerical example is given for a 3-story building model subjected to an earthquake excitation.

### 1. 서 론

본 논문에서는 구조계에 작용되는 하중(입력)과 이로 인한 동적 거동(출력)의 측정기록을 바탕으로 구조계의 계수행렬을 추정하는 방법에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 통상의 운동방정식을 ARMAX (Auto Regressive and Moving Average

with Auxiliary Input) 모형식으로 변환한 후, 측정 기록을 이용하여 ARMAX 계수행렬을 추정하고, 이를 다시 운동방정식의 계수행렬로 치환하였다. ARMAX 계수는 최소자승법, Instrumental Variable 방법, Maximum Likelihood 방법 및 Limited Information Maximum Likelihood 방법 등을 사용하여, 예제해석 등을 통하여 각 방법의 효율

\* 정회원 한국과학기술원 교수

□ 이 논문에 대한 토론을 1990년 6월 30일까지 본학회에 보내주시면 1990년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

성을 비교하였다. 해석은 지진하중을 받는 3층 건물모형에 대한 수치모형실험을 통하여 수행하였다.

## 2. ARMAX 모형식의 유도

구조계의 동적거동은 통상 운동방정식으로 나타낸다. 그러나 본 연구내용과 같이 구조계에 작용된 하중과 이로 인한 동적거동의 측정기록으로부터 구조계의 계수들을 추정하기 위하여는, 측정된 양의 시계열간의 관계로 주어지는 ARMAX 모형식이 많이 사용된다.<sup>1, 2, 3, 4</sup> 이는 ARMAX 모형식을 사용하면 최소자승법, Instrumental Variable 방법, Maximum Likelihood 방법 등 기존의 계수 추정방법을 이용할 수 있는 장점이 있기 때문이다. 본 연구에서는 ARMAX 모형식을 다음과 같은 과정을 통하여 유도하였다.

### 2.1 운동방정식

$$M_0 \ddot{\xi} + C_0 \dot{\xi} + K_0 \xi = L_0 f \quad (1)$$

여기서  $\xi$ ,  $\dot{\xi}$ ,  $\ddot{\xi}$ 는 구조물의 절점 변위, 속도 및 가속벡터;  $f$ 는 구조물에 가해진 외력 벡터;  $M_0$ ,  $C_0$ ,  $K_0$ ,  $L_0$ 는 각각 질량, 감쇠, 강성 및 하중계수 행렬이다. 구조물의 절점변위와 외력의 측정값으로부터 구조계수를 추정하는 문제에서 유일한(unique) 결과를 얻을 수 있기 위하여, 여기서는 식 (1)이 아래와 같이 간단히 변형될 수 있다고 가정하였다.

$$\ddot{\xi} + J\dot{\xi} + K\xi = Lf \quad (2)$$

여기서,  $J = M_0^{-1} C_0$ ,  $K = M_0^{-1} K_0$ , 그리고  $L = M_0^{-1} L_0$ 이다.

### 2.2 상태방정식

구조계의 상태변위(State Variable) 벡터를 아래와 같이 정의하면,

$$X = \begin{Bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

식(2)로 부터 다음과 같은 연속시간 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{X} = \Phi X + \Gamma f \quad (4)$$

여기서

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -J \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (4a)$$

또한 식(4)는 아래와 같이 불연속시간 상태방정식으로 변환될 수 있다.

$$X(i+1) = AX(i) + B f(i) \quad (5)$$

여기서  $X(i) = X(i\Delta t)$ 이며,  $\Delta t =$  측정시간간격,

$$A = e^{\Phi \Delta t}, \quad B = \left[ \int_0^{\Delta t} e^{\Phi \tau} d\tau \right] \Gamma \quad (5a)$$

또한 행렬에 대한 지수함수는 아래와 같이 Taylor 급수로 정의된다.<sup>5)</sup>

$$e^{\Phi \Delta t} = I + \Phi \Delta t + \frac{\Phi^2 (\Delta t)^2}{2!} + \frac{\Phi^3 (\Delta t)^3}{3!} + \dots \quad (5b)$$

### 2.3 ARMAX 모형식

구조물의 변위를 모든 절점에서 측정하였다고 할때, 거동에 대한 측정치 벡터는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y(i) = CX(i) + \eta(i) \quad (6)$$

여기서,  $C = [I, 0]$ 이며,  $\eta(i)$ 는 측정오차로서 white noise 이고, 공분산행렬은  $\nabla_0$ 이며  $X(i)$ 와  $f(i)$ 에 대하여 확률적으로 독립이다.

구조계가 안정하며, 입력하중  $f$ 에 대하여 Controllable 이면, 식(5)와 (6)으로부터 아래와 같은 ARMAX 모형식을 얻을 수 있다.<sup>3)</sup>

$$Y(i) = F_1 Y(i-1) + F_2 Y(i-2) + G_1 f(i-1) + G_2 f(i-2) + W(i) \quad (7)$$

여기서  $W(i)$ 는 moving average 오차항으로 아래와 같으며,

$$W(i) = \eta(i) - F_1 \eta(i-1) - F_2 \eta(i-2) \quad (8)$$

$F_1, F_2, G_1$ 과  $G_2$ 는 ARMAX 계수행렬로서, 연속 시간 상태방정식의 계수행렬과 아래와 같은 관계를 가진다.<sup>3)</sup>

$$\Phi = \begin{Bmatrix} C \\ C\Phi_c \end{Bmatrix} \Phi_c \begin{Bmatrix} C \\ C\Phi_c \end{Bmatrix}^{-1}, \quad \Gamma = \begin{Bmatrix} C \\ C\Phi_c \end{Bmatrix} \Gamma_c \quad (9)$$

여기서

$$\Phi_c = \frac{1}{\Delta t} \ln \begin{Bmatrix} 0 & I \\ F_2 & F_1 \end{Bmatrix} \quad (9a)$$

$$\Gamma_c = \left[ \int_0^{\Delta t} e^{*c\tau} d\tau \right]^{-1} \begin{Bmatrix} I & 0 \\ F_1 & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad (9b)$$

그리고, 식(9a)에서 행렬에 대한 대수함수는 아래와 같은 급수로 정의된다.<sup>5)</sup>

$$\ln(A_c) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} (A_c - I)^p / p$$

### 3. ARMAX 모형식의 계수추정

입력하중과 동적거동의 측정기록이 시간간격이  $\Delta t$  인  $N$  개의 데이터로 구성되어 있다면, 식(7)의 ARMAX 모형식은 아래와 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$Y(i) = \theta \Psi(i) + W(i) \quad (10)$$

여기서

$$\theta = [F_1, F_2, G_1, G_2]$$

$$\Psi(i) = [Y^T(i-1), Y^T(i-2), f^T(i-1), f^T(i-2)]^T$$

또한 식(10)은 아래와 같이 간단히 표시된다.

$$Y_N = \theta \Psi_N + W_N \quad (11)$$

여기서

$$Y_N = [Y(3), Y(4), \dots, Y(N)]$$

$$\Psi_N = [\Psi(3), \Psi(4), \dots, \Psi(N)]$$

$$W_N = [W(3), W(4), \dots, W(N)]$$

식(11)에서 미지의 계수행렬  $\theta$ 는 측정된 값으로 구성된 행렬  $Y_N$ 과  $\Psi_N$ 으로부터 아래와 같은 방법을 사용하여 구할 수 있다.

#### 3.1 최소자승법<sup>6,7)</sup>

식(10) 으로부터 추정오차를 다음과 같이 정의하고

$$e(i) = Y(i) - \theta \Psi(i) \quad (12)$$

추정오차의 제곱의 합을 최소화하는 방법을 사용하면, 계수행렬의 추정치는 아래와 같이 구해진다.

$$\bar{\theta}_{LS} = Y_N \Psi_N^T (\Psi_N \Psi_N^T)^{-1} \quad (13)$$

위의 추정값  $\bar{\theta}_{LS}$  는 식(10)과 (11)에서 알 수 있듯이 오차행렬  $W_N$ 과 측정치행렬  $\Psi_N$  이 확률적으로 서로 독립이 아니므로 확률적으로 불편기(unbiased) 추정치가 아니다. 따라서 추정오차항이 클 경우에,  $\bar{\theta}_{LS}$  는 큰 오차를 초래할 수 있다.

#### 3.2 Instrumental Variable 방법<sup>8,9)</sup>

식(11)에서의 오차행렬  $W_N$  과는 확률적으로 독립이며, 측정치행렬  $\bar{\Psi}_N$ 과 곱  $(\bar{\Psi}_N \sum_N^T)$ 이 확률적으로 0 (영)이 아닌 행렬 ( $\sum_N$ : Instrumental Variable Matrix)을 구할 수 있으면, 추정값  $\bar{\theta}_{IV}$  는 아래와 같이 구해진다.

$$\bar{\theta}_{IV} = Y_N \sum_N (\bar{\Psi}_N \sum_N^T)^{-1} \quad (14)$$

식(14)의  $\bar{\theta}_{IV}$  는 측정점의 수( $N$ )가 무한대로 증가함에 따라 정확한 값으로 접근함으로써 확률적으로 불편기 추정치임을 보일 수 있다.<sup>3,8)</sup> 본 연구에서는 행렬  $\sum_N$ 을 아래와 같이 구하였다.

$$\sum_N = [\bar{\Psi}(3), \bar{\Psi}(4), \dots, \bar{\Psi}(N)] \quad (15)$$

여기서  $\bar{\Psi}(i)$ 는 식(10)을 이용한 아래와 같은 관계식

$$\bar{Y}(i) = \bar{\theta}_{IV} \bar{\Psi}(i) \quad (16)$$

으로부터 측차대입과정(Iteration)을 통하여 구할 수 있다.

### 3.3 Maximum Likelihood 방법<sup>6,10)</sup>

미지의 계수행렬을  $\theta$ 를 추정하기 위하여 Maximum Likelihood 함수를 아래와 같이 거동의 측정치에 대한 조건부 확률의 대수함수로 정의하면

$$L_N(\theta, \Delta\eta) = \log \{ p(Y(N), Y(N-1), \dots, Y(3) | Y(2), Y(1), f(N-1), \dots, f(1), \nabla\eta, \theta) \} \quad (17)$$

계수의 추정치는  $L_N(\theta, \nabla\eta)$ 를  $\theta$ 에 관하여 최대 값을 구함으로써 얻을 수 있다. 또한 조건부 확률 분포가 Gaussian 이라면, 이는 아래와 같은 목적 함수  $J$ 를  $\theta$ 에 대하여 최소화함으로써 구할 수 있다.

$$J = \det \left\{ \sum_{i=1}^N [Y(i) - Y(i|i-1)] [Y(i) - Y(i|i-1)]^T \right\} \quad (18)$$

식(18)에서  $Y(i|i-1)$ 은 구조계가 안정하고  $N$ 이 상당히 크다면 다음과 같이 근사적으로 얻을 수 있다.<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} \bar{Y}(i|i-1) &= F_1 \bar{Y}(i-1|i-2) + F_2 \bar{Y}(i-2|i-3) \\ &\quad + G_1 f(i-1) + G_2 f(i-2) \quad (19a) \\ \bar{Y}(2/1) &= Y(2), \bar{Y}(1) = Y(1) \end{aligned}$$

식(18)의 최소화문제는 미지행렬의 요소수가 클 때는 계산시간이 많이 소요되는 단점이 있다.

### 3.4 Limited Information Maximum Likelihood 방법<sup>2,3)</sup>

이 방법에서는 앞절의 Maximum Likelihood 방법에서 소요되는 계산시간을 줄이기 위하여, 식(19)로부터 얻어지는  $n$  개의 관계식을 각각 독립된 식으로 취급하여 근사해를 구한다. 즉, 추정하려는 계수들의  $\ell$  번째 행의 요소( $\theta_\ell$ )를 아래와 같은 목적함수를 최소화하는 기법으로 구한다.

$$J_\ell = \sum_{i=1}^N \{ Y_\ell(i) - \bar{Y}_\ell(i|i-1) \}^2 \quad (20)$$

여기서  $Y_\ell(i|i-1)$ 은 식(19)를 이용하지만,  $\ell$  이외의 변위요소 ( $\bar{Y}_m(i-1|i-2), \bar{Y}_m(i-2|i-3), m \neq \ell$ )에 대하여는 앞 단계에서 추정된 값이나 측정값을 이용하여 근사적으로 구한다. 이 방법은 구조계가 안정이고, 측정시간간격( $\Delta t$ )이 상당히 작은 경우, ARMAX 계수행렬 중  $F_1, F_2$ 의 대각요소가 비대각요소 보다 큰 점을 감안할 때 상당히 합리적인 방법이다.<sup>3)</sup>

## 4. 예제해석 및 결과분석

예제해석은 그림1 에서와 같은 지진하중을 받는 3층 건물모형에 대한 수치모형실험을 통하여 수행하였다. 즉, 그림2 에서 보인 지진입력과 이에 의해 표1 의 구조계수를 가진 구조물의 변위가 각 층에서 측정되었다고 가정 한 후, 앞에서 서술한 4가지의 계수추정방법을 사용하여 구조계수를 추정하였다. 이때에 구조물 변위의 측정오차는 변위에 비하여 표준편차수준으로 1% 라고 가정하였다. 추정한 계수들은 표1 에서 정확한 값들과 비교하였으며, 추정한 계수들을 사용하여 구한 건물 3층의 변위는 정확한 변위와 그림3 에서 비교하였다. 표1의 결과는 최소자승법을 제외한 나머지 세가지 방법이 좋은 추정계수를 줄을 보여주고 있다. 또한 그림3 의 결과도 변위의 추정결과가 정확한 변위의 시계열과 매우 유사함을 보여, 앞에서 기술한 방법들의 타당성을 입증하고 있다. 여러 크기의 측정오차와 아울러 몇가지의 다른 예제에 대한 추가적인 해석으로부터, 측정오차가 증가할수록 최소자승법에 의한 추정치는 크게 나빠지지만, 나머지 방법들은 대체로 양호한 결과를 줄을 알 수 있었다.

## 참 고 문 헌

1. Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., "Time Series Analysis, Forecasting and Control," Holden-Day, 1970.
2. Kashyap, R.L. and Nasburg, R.E., "Parameter Estimation in Multivariate Stochastic Difference Equation," IEEE Trans, Vol. AC-19, 1974, pp. 784-797.

3. Shinozuka, M., Yun, C-B. and Imai, H., "Identification of Linear Structural Dynamic Systems", J. of Engineering Mech., ASCE, Vol. 108, Dec. 1982.
4. Ljung, L., "System Identification : Theory for the User," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
5. Gantmacher, F.R., "The Theory of Matrices," Vol. I and II, Chelsea Publishing Company, 1960.
6. Lee, R.C.K., "Optimal Estimation, Identification and Control," Research Monograph 28, MIT Press, 1964.
7. Isermann R., et al., "Comparison of Six On-Line Identification and Parameter Estimation Methods," Automatica, Vol. 10, 1974, pp.81-103.
8. Wong, K.Y. and Polak, E., "Identification of Linear Discrete Time Systems Using the Instrumental Variable Method," IEEF Trans. on Auto. Contr., Vol. AC-12, No. 6, 1967, pp. 707-718.

9. Young, P.C., "An Instrumental Variable Method for Real Time Identification of a Noisy Process," Automatica, Vol. 6, 1970, pp. 271-287.
10. Kashyap, R.L., "Maximum Likelihood Identification of Stochastic Linear Systems," IEEE Trans. Ayto. Contr., Vol. AC-15, No. 1, 1970, pp.25-34.

(접수일자 : 1989. 11. 15)

감사의 글

본 논문의 내용은 1989년 한국과학재단의 지원으로 수행된 한·미 국제 공동 연구 과제의 연구 결과의 일부이다. 동 재단의 지원에 깊은 감사의 뜻을 표한다.

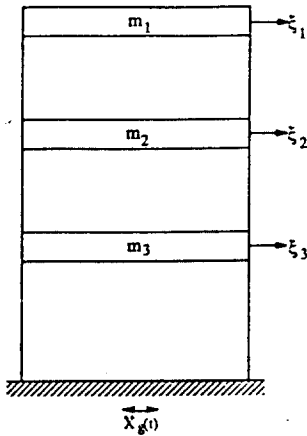


그림 1 지진하중을 받는 3층 건물모형

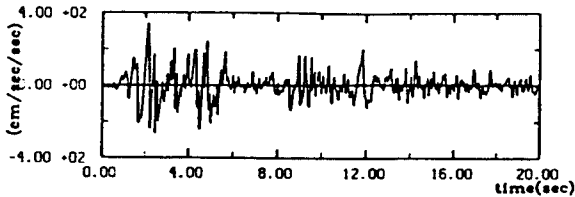


그림 2 지진가속도 (El Centro 지진 - 1940, 남북성분)

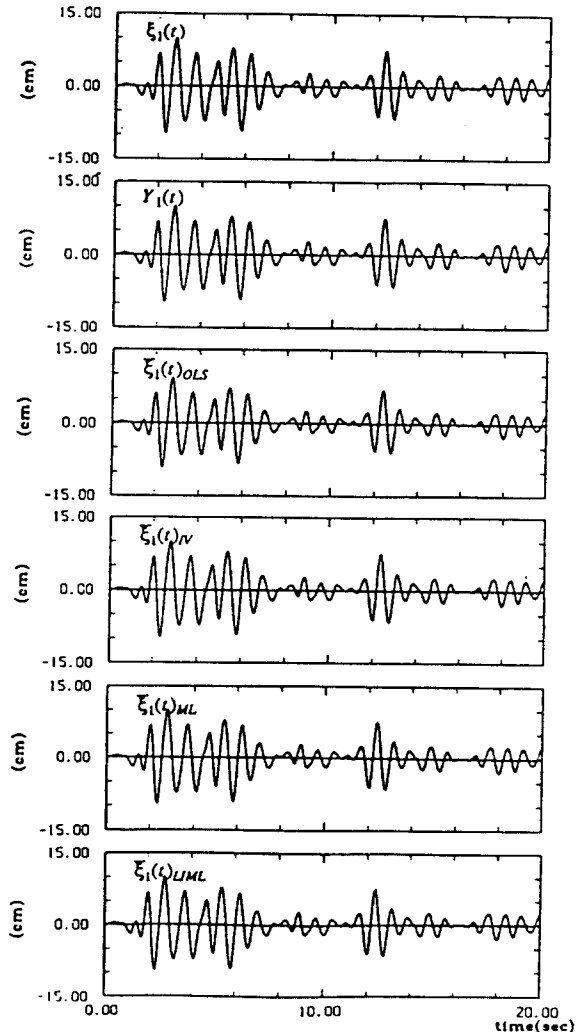


그림 3 정확한 구조물의 변위와 측정된 변위의 비교 (3층; 1% 측정오차)

표 1 정확한 구조계수와 추정된 계수의 비교 (1% 측정오차)

Parameters		K			J			L
Exact Values		2.00E+2	-2.00E+2	0.00E+0	5.00E+0	-5.00E+0	0.00E+0	-1.00E+0
		-1.00E+2	3.00E+2	-2.00E+2	-2.50E+0	7.50E+0	-5.00E+0	-1.00E+0
		0.00E+0	-1.33E+2	3.33E+2	0.00E+0	-3.30E+0	8.30E+0	-1.00E+0
Estimated Values	OLS	7.04E+2	-1.45E+3	1.07E+3	1.71E+1	-1.80E+1	-1.00E+1	-1.05E+0
		-5.06E+2	1.42E+3	-1.30E+3	-1.60E+1	3.51E+1	-2.10E+1	-2.36E-1
		2.80E+1	-2.57E+2	5.09E+2	2.84E+0	-1.27E+1	1.93E+1	-1.30E+0
	IV	2.21E+2	-2.81E+2	1.05E+2	7.63E+0	-1.17E+1	5.88E+0	-1.07E+0
		-8.28E+1	2.65E+2	-1.80E+2	-3.17E+0	9.98E+0	-8.20E+0	-9.27E-1
		8.46E+0	-1.64E+2	3.73E+2	9.70E-1	-5.64E+0	1.02E+1	-9.64E-1
	ML	2.23E+2	-2.87E+2	1.13E+2	7.70E+0	-1.17E+1	5.82E+0	-1.14E+0
		-8.31E+1	2.66E+2	-1.81E+2	-3.24E+0	1.02E+1	-8.44E+0	-9.56E-1
		1.02E+1	-1.69E+2	3.78E+2	1.09E+0	-5.89E+0	1.04E+1	-1.01E+0
	LIML	2.18E+2	-2.83E+2	1.16E+2	7.69E+0	-1.18E+1	5.80E+0	-1.11E+0
		-8.27E+1	2.62E+2	-1.74E+2	-3.28E+0	1.03E+1	-8.49E+0	-9.81E-1
		8.69E+0	-1.68E+2	3.79E+2	1.09E+0	-5.89E+0	1.04E+1	-9.81E-1
Units :		K - [1/sec <sup>2</sup> ]; J - [1/sec]; L - dimensionless						