P-Version 有限要素法

우 광 성*

1. 序論

有限要素法(finite element method)은 連續體 문제를 解析하는데 가장 高度化된 컴퓨터기초의 數學的 定式化道具(mathematical modeling tool)로 脚光을 받아오고 있다. 이 방법은 航空·宇宙, 自動車, 造船, 化工, 土木, 建築, 原子力등에 널리 사용되고 있고 심지어는 純粹科學과 醫工學분야(biomechanics)의 連續體 문제에서도 중요한 수단으로 適用되고 있는 段階에 올 만큼 놀라운 發展을 해왔다. 그러나 現在 사용되고 있는 F.E.M. 소프트웨어는 소위 h-version 有限要素法에 根據하고 있는데 여러가지 短點들을 갖고있는 것도 사실이다. 몇가지 例를 들면 다음과 같다.[1)2)4)16)17)18)24)] 첫째는 非信賴度(unreliability)인 데, 즉 有限要素의 信賴度(reability)는 一般的으로 入力媒介變數(input parameters) 다시 말하면 幾何學的 形狀(geometry), 材料性質(material properties), 境界條件의 形態(type of boundary conditions), 荷重의 性質(nature of loading)등에 대한 敏感度(sensitivity)로 豫測할 수 있는데 종래의 有限要素 解析은 이러한 값들에 매우 敏感함을 보이고 있다. 둘째는, 計算의 非効率性(computational inefficiency), 셋째는 解析과 設計의 큰 비중을 차지하는 使用者時間(users' time)의 非經濟性과, 넷째는 收斂速度(convergence rate)의 緩慢을 꼽을 수 있다. 우선적으로 제기된 이러한 문제들을 기존의 有限要素 理論의 틀을 유지하면서 좀 더 효율적인 定式化 과정을 통해 向上시킬 수 있는 方法을 제시하는 것이 이 글의 目的이라 하겠다.

종래의 有限要素法(conventional F.E.M.)은 連續體를 有限한 個數의 要素로 分割하여 有限要素內의 擧動을 三角形(triangular) 혹은 多角形(polygonal) 少領域(sub-domain)에서 區間別 補間函數(iecewise interpolation function)을 사용하여 表現하며 共通境界(common boundary)에서의 어떤 連續條件(C^0 or C^1-continuity)을 만족시키는 Lagrange 1次(linear), 2次(quadratic) 혹은 3次(cubic) 多項式函數(polynomial function)를 補間函數로 사용한다.[3)] 解는 要素를 잘게 分割하면서 向上되는데 이때 分割된 要素의 最大 直徑을 h라하고 h가 0에 접근하면서 眞解(true solution)에 收斂하는 방식인데 이때 補間函數의 次數는 固定되어 있다. 이를 h-extension이라 하고 이에 따른 컴퓨터 수행을 h-version 有限要素法(h-version of the finite element method)이라 命名하며 대부분 有限要素 소프트웨어들이 이 version에 基礎하고 있다.

이와 對比되는 방법으로 解析 하고자 하는 連續體의 幾何學的인 形狀을 表現하는데 필요한 最少의 要素만을 사용하여 그 要素(mesh)들을 固定시키고 補間函數로 Legendre polynomial을 사용하며 補間函數(interpolation function)의 次數(order) P를 점차 增加시켜 무한대(∞)에 접근하면서 收斂하는 방식인데 실제로는 P=1에서 10까지 보통 사용한다. 이러한 접근방식을 p-extension이라 하며 이의 컴퓨터 수행(computer implementation)을 p-version 有限要素法(p-version of the finite element

*정회원, 전남대학교 전임강사, 공학박사

method)이라 命名한다.[4,5] 여기서 注意해야 될 점은 P의 次數를 低次(p=1, 2 or 3)로 줄이고, 그 次數를 固定시킨 후 要素分割에 의해 眞解에 收斂시키는 방법을 취하면 다시 h-version이 되므로 넓은 의미로 보면 h-version은 p-version에 包含 된다고 생각할 수 있다.

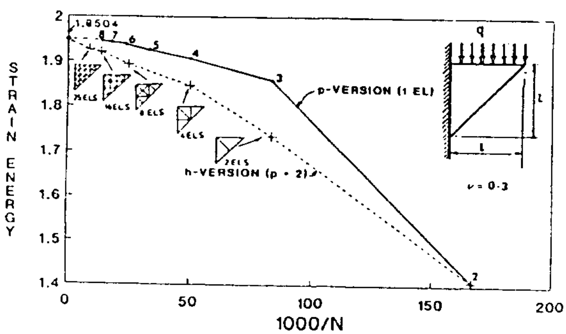
한편 p-version은 큰 要素(large element)를 사용하게 되므로 標準要素(standard element)로 부터 원하는 任意의 實際要素(actual element)의 임의의 境界面에 정확한 寫像(exact mapping)을 통하여 幾何學的인 形狀을 정확하게 나타낼 수 있어야 하는데 이를 만족시키기 위하여 超有限寫像(transfinite mapping)이나 混合寫像(blending mapping)등을 사용하여 曲線境界(curved boundary) 즉, 圓形(circular), 楕圓形(elliptical)과 그밖의 임의의 曲線境界를 정확하게 나타낼 수 있다. 또한 高次函數를 數値積分할 수 있도록 選擇點(sampling points)에서의 重量係數(weight coefficients)와 座標값을 擴張시켜 Gaussian Quadrature의 경우 보통 2×2 Gauss points로 부터 12×12 Gauss points까지를 사용할 수 있도록 한다.[6,24]

2. P-version의 長點

旣存의 h-version에 대한 p-version의 優越性(superiority)은 COMET-X[5], COMET-XA[9], PROBE[10] 등과 같은 p-version 소프트웨어에 의한 數値實驗的 방법과 Babuska, Szabo[7,8]등에 의한 數學的 證明을 통해서 立證되고 있다. 다시 말하면 任意의 점에서 局部的 意味(local sense)의 變位, 應力 등의 값들과 連續體 전체에서 全體的 意味(global sense)의 total potential energy 값으로 自由度 증가에 따른 p-version 解의 收斂速度(convergence rate)와 正確度(accuracy)등을 종래의 h-version 解析과 비교하면 많은 長點(merits)들이 있음을 알 수 있다. 그것들을 짧게 要約해 보면 다음과 같으며 相對的으로 이 點들이 h-version의 短點들이 되는 것이다.

첫째, 모델링의 單純性(modeling simplicity). 幾何學的인 形狀을 表現할 수 最少數(때로는 1個)의 要素를 使用한다. 故로 INPUT DATA를 준비하는 使用者(user)의 時間을 크게 節減할 수 있음과 동시에 사용하기가 매우 容易하다. Fig. 1을 參考하면 오직 1個의 要素만을 모델링하므로 入力資料가 매우 簡單하다.

둘째, 優越한 收斂性(superior convergence characteristics). 즉 自由度(degree of freedom)증가에 따른 收斂速度가 應力集中이 심하게 일어나는 龜裂(crack) 문제의 경우는 h-version에 비해 2배 가량 빠르다는 것이 立證[4,8,11,13,14]되었고 一般的으로도 收斂性이 매우 뛰어나다는 것이 많은 論文에서 立證되고 있다.[1,2,4,5,7,8,11] 簡單한 例로 'Fig.1과 같이 3角선반받이(triangular bracket)에 等分布荷重이 작용하고 있는 문제에서 h-version과 p-version의 自由度增加에 따른 解의 收斂性이 全體的 意味(global sense)의 變形 에너지 값으로 나타내지고 있는데 p-version의 경우는 h-version에 比해 自由度가 增加함에 따라 빠른 速度로 眞解 1.9504에 收斂하고 있음을 알 수 있다.



[N=NDOF, S.E.=UE/(ql)^2]

Fig.1

셋째, 강한 適用性(robustness). 한 例로 C^0-hierarchic quadrilateral element는 平板과 쉘(shell)構造物의 경우 R/L (R=반경, t=두께)比의 심한 變化 즉, very thin, thin, thick plates/shells에 相關없이 適用되고 poisson 比가 0.499999에서도 解가 收斂됨을 보이고 있다. 即, 入力媒介變數(input parameters) 등에 敏感하지 않고[1,2,12,17,24] 또, 特別要素(special element)의 不必要 즉, 應力特異(stress singularity)가 發生하는 點(crack-tips, notches)등에서 特異要素(singular element)등과 같은 特別要素를 사용하지 않아도 Legendre 高次(p=8, 9 or 10)

形狀函數(shape functions)를 特異點 부근에 사용하면 역시 훌륭한 信賴度(reliability)와 正確度(accuracy) 를 보여준다.[1,13,14,15]

넷째, Database使用의 効率性(efficiency) 즉, 解의 正確度는 形狀函數의 次數(p-level)를 要素를 固定시킨 채 全體的으로(globally) p-level을 單純增加시키든가 또 局部的으로(locally) 使用者가 應力集中이 일어나는 點을 共有하는 要素들의 p-level 만을 增加시키고 그 외의 要素들의 次數는 固定시킬 수 있으며 次數의 변화에 대한 몫을 Database에 記憶시키기 위한 最少의 修正(minimal changes)만 하면 된다. 다시 말하면 p-version은 階層的 性質(hierarchic characteristics)을 갖고 있으므로 p-level을 增加시켜 同一한 문제를 再解析할 경우 次數가 增加된 부분에 대한 몫만 그 前의 값(pre-computed values)에 더해주면 된다. 다시 말하면(p-1)次 要素의 剛度메트릭스(stiffness matrix)와 荷重벡터(load vector)는 p次 要素(element)의 從屬메트릭스(submatrix) 가 된다.

다섯째, 計算上의 効率性(computational efficiency) 즉, Legendre polynomial은 直交性(orthogonality)을 갖고 있어서 剛度메트릭스가 대각선화(diagonalized)됨을 誘發하고 h-version에서 要素를 잘게 分割하면서 발생되는 round-off error가 p-version에서는 놀랄만큼 줄어들어 well-conditioned matrix가 됨을 條件數(CN : condition number)를 사용하여 입증되고 있으며 이로 인해 많은 CPU 時間을 줄일 수 있다.[1,16,17,18,24]

3. 硏究方向

1976年 이후 p-version 有限要素法에 대한 아이디어가 처음 Basu, Peano[5,19]에 의해 提案되어 처음에는 주로 Washington과 Maryland를 중심으로 實驗的으로 硏究되어 오다가 1980년대에는 Vanderbilt 와 Purdue등 여러 대학에서 꾸준한 연구를 통한 論文 발표에 힘입어 종래의 有限要素法을 사용해온 Zienkiewicz 등을 비롯한 많은 학자들의 注目을 끌기 시작하여 最近에는 1989년 5월 美國 샌프란시스코에서열린 ASCE 7th Structures Congress 에서 p-version of the F.E.M. 分科를 독립적으로 개최할만큼 활발한 硏究가 이루어지고 있고 또한 商業用 소프트웨어 開發이 Noetic 회사의 PROBE 를 시작으로 현재 여러 곳에서 개발중에 있다. 첫번째 實驗的 p-version 有限要素 Software COMET-X[5]가 Basu에 의해 개발되었고 Peano[19]에 의해 Hierarchic C^0-conforming triangular element 가 提案되었다. 물론 그 이전에도 Brombolish[20]의 rotational shell element에서도 hierarchy 概念이 無意識 중에 사용되었는데 Legender polynomial을 사용한 것과 같이 well-conditioned 매트릭스를 形成하지 못했다. h-version과 p-version에 대한 收斂速度에 대한 硏究가 Babuska와 Szabo[7,8,11,21,22]에 의해 주로 數學的으로 立證되었고 Szabo를 위시한 Washington팀에 의해 COMET-XA의 개정판 FIESTA를 수정개발한 PROBE[10]가 開發되었으며 Basu와 Woo에 의해 Hierachic C^0-quadrilateral element가 제안되어 plane stress/strain, axisymmetric, plates & shells에 應用 되었고[1,23], 최근에 dynamics, stability(arches, thin-walled members), plasticity, composites, adapticity, dimension reduction등에 대한 硏究가 활발하게 進行되고 또 試圖되고 있다.

4. p-version 解析例

(1) Short Cantilever Beam

平面 變形率(plane strain)상태의 짧은 외팔보가 Fig.2와 같이 Poisson 比가 0.3이고 等分布荷重 q를 받으며 좌측은 固定端이다. h-version의 경우는 p=1을 固定시키고 均等要素分割(uniform mesh refinements)을 通해 收斂되는 樣相을 보이고 p-version 의 경우는 p=1에서 漸進的으로 p=7까지 증가 시키며 眞解(true solution)에 收斂되는데 두가지 모두 硏究用 프로그램 COMET-X에 의해 遂行되었다. 橫軸은 自由度 N의 LOG 값을 나타내고 있다. 좌측 從軸은 變形에너지노름(strain energy norm)의 LOG값, 우측 相對誤差(relative error)의 %값이 LOG-LOG눈금으로 나타내고 있다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 h=1/2, p=1로 부터 시작하여 h-version 解釋은 均等要素分割에 의해 h가 1/4, 1/6,…1/12로 줄어들면서 眞解(true solution)에

收斂하도록 했고 p-version 解析은 p=1로 부터 2, 3…,7로 單純增加시킴으로써 역시 眞解에 收斂하도록 하여 眞解에 대한 5%誤差를 기준으로 볼때 h-version은 h가 1/90이고 自由度 N이 17200일때 p-version은 p가 7이고 自由度 N이 불과 450일때 同一한 誤差를 나타내 보이며 각각의 收斂速度(convergence rate) 는 각각의 기울기(slope)로 比較할 수 있는데 h-version의 경우는 기울기가 0.356인데 반하여 p-version은 0.711로 거의 2배 가량 收斂 속도가 빠름을 알 수 있다. 이와같은 사실은 Babuska와 Szabo에 의해 數學的으로도 證明된 바 있다.[7,8,11,21,22] 그리고 참고로 얇은 點線으로 표시된 것은 應力의 root-mean-square測定에 의한 誤差의 下限境界(lower bound)를 나타내는 것으로 p-version 은 이 領域안에 있음을 보여주고 있다.

(2) Cracked Cantilever Beam

p-version 解析은 一般的 應力解析例보다는 심한 應力特異(stress singularity)현상이 나타나는 問題에서 h-version에 대해 더욱 그 優越性(superiority)을 보여준다. 應力은 變位를 한 번 微分(first derivative)한 값 즉, 變形率에 比例함을 우리는 알고 있다. 그런데 變位場(displacement fields)을 形狀函數(shape functions)를 使用하여 表現하기 때문에 바로 이 函數를 微分한 값 다시 말하면 任意의 點에서의 接線기울기(slope of tangent line)로 判斷할 수 있다. $-1<X<1$ 되는 區間에서 低次(low order) Lagrange polynomial에 比해 高次(high order) Legendre polynomial은 兩端에서의 接線기울기가 매우 扱激함을 볼 수 있는데, 兩端에서의 接線기울기의 급격함은 應力傾斜(stress gradient)가 兩端에서 급격(steep)할때 即, 應力集中이 심하게 일어나는 樣相을 表現하는데 適合하다고 할 수 있다. 또한 Legendre 函數의 根(roots)들이 中央點에 比해 兩端에 比較的 모여 있으므로 兩端(즉, 特異點)부근에서 解의 信賴度를 높일 수 있다. 이러한 이유로 p-version 解析이 從來의 h-version 解析에 比해 심한 應力傾斜가 發生되는 特異擧動(singular behavior)을 表現하는데 더 適合함을 알 수 있으며 이를 뒷 받침하는 여러 論文들이 發表되어 있다.[1,13,14,15,24] 위에 言及한 사항들을 간단한 解析例를 通해 입증하고자 例題1과 同一한 問題에 固定端 上部에서 0.25L 만큼 龜裂이 發生하였을 때 COMET-X에 의한 h-version과 p-version의 結果를 Fig.3에 比較하여 나타내었다. 이때 龜裂선단(crack tip)에서의 應力集中係數(stress intensity factor)K는 Mesh A를 사용한 p-version 解析이 MeshB와 C를 Lagrange 2次 polynomial을 使用한 h-version 解析보다 收斂速度 등에서 越等함을 알 수 있다. 여기서 e_K는 K의 相對誤差(relative error)를 나타내며 e_E는 에너지노름(energy norm)의 相對誤差를 나타내고 있다. p-version의 경우

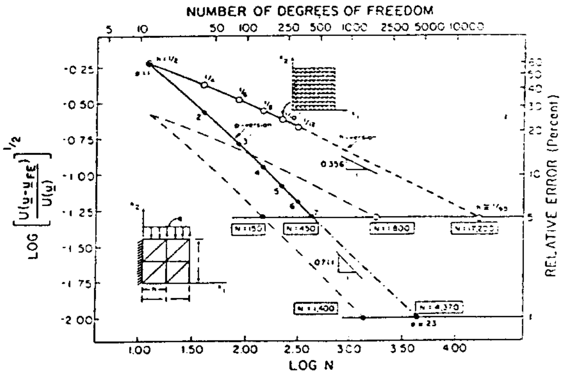
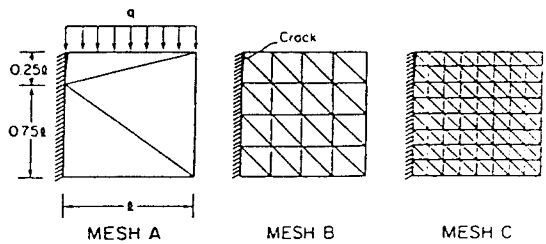


Fig.2 Relative error in strain energy norm vs. number of degress of freedom 3



MESH	p	N	$K/q\sqrt{\ell}$	e_K (%)	e_E (%)
A	5	90	1.850	3.23	18.6
A	6	126	1.867	2.35	15.8
A	7	168	1.879	1.73	13.7
B	2	148	1.780	6.90	24.0
C	2	556	1.821	4.76	17.3
Limit Value		∞	1.912	0	0

Fig.3 Results of computation for the cracked cantilever beam

3개의 要素가 사용되고 있는데 이는 幾何學的 形狀을 表現하는 最少 要素의 數라고 하겠다. 한편 應力集中係數 K로 부터 形狀係數(shape factor)F를 $K/q\sqrt{l}$로 나타낼 수 있는데 眞解 1.912와 비교할때 Mesh A로 p=7을 사용한 p-version 解析結果는 F=1.879로 相對誤差가 1.73%이며 이때의 自由度 N은 168이었다. 이에 比해 Mesh C로 p=2를 사용한 p-version의 경우의 結果는 F=1.821로 相對誤差 4.76%이며 이때의 自由度 N은 556이었다. 故로, p-version 解析의 特異性(singularity)問題에 매우 有用함을 알 수 있다.

5. 結論

앞에서 2가지 例題를 통해 h-version과 p-version의 比較를 살펴보면서 p-version 解析이 h-version에 比해 相對的으로 많은 長點들을 가지고 있으며 信賴度, 正確度, 效率性, 經濟性, 容易性 等 側面에서 優秀함을 증명해 보였다. 特히 應力集中(stress concentration)이 일어나는 crack-tips, cut-outs, reentrant corners, presence of stiffners, mixed bounday conditions등 많은 特異性(singularity) 問題에 더욱 適合함을 위의 例題외의 發表된 많은 論文들을 통해 알 수 있으며[1,12,13,14,15,23,24] 모델링(modeling)의 單純性(simplicity)에 기인하여 使用이 매우 쉽다는 것도 무엇보다 큰 利點이라 하겠다. 여기서 다시 強調하고 싶은 것은 p-version은 h-version의 非效率性을 修正補完하여 擴張된 概念으로 만약에 形狀函數의 次數 p를 1, 2 또는 3으로 줄인후 이 값을 固定시키고 다시 要素分割을 通해 眞解(true solution)에 接近시키는 방식을 취하면 다시 종래의 h-version으로 還元되는 互換性(reciprocity)을 갖고 있다는 것이다. 故로 構造解析에서 h-p version이 가장 理想的인 有限要素解析 방법이라 할 수 있겠는데[21,22,24], 다시 말하면 龜裂問題의 경우 龜裂선단(crack-tip)에서는 p-level을 높이고(p=8, 9 or 10) 比較的 應力集中이 낮은 領域(domain)에서는 p-level을 낮춤으로서(p=3, 4 or 5)그 效率性을 極大化할 수가 있겠다.

參 考 文 獻

1. K.S. Woo, P.K. Basu,"Analysis of singular cylindrical shells by p-version of F.E.M.", International Journal of Solids & Structures, Vol. 25, No. 2, pp. 151~165, 1989.
2. P.K. Basu, A. Peano,"Adaptivity in p-version F.E. Approximation", Journal of Structural Engineering, Proc. ASCE, Vol., 109, No. 10, pp. 2110~2324, Oct. 1983.
3. R.W. Clough,"The Finite Element in Plane Stress Analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittshurgh, PA. Sep. 1960.
4. P.K. Basu, R.M. Lamprecht,"Some Trends in Computerized Stress Analysis", Proc. of the 7th ASCE Conference in Electronic Computation, Washington University, St. Louis, MO. Aug. 1979.
5. P.K. Basu, M.P. Rossow, B.A. Szabo,"Technical Documentation and User's Manual: COMET-X", Report No. R-340, Federal Railroad Administration, Aug. 1977.
6. D.A. Dunavant,"Economical Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for Complete Polynomials over a Square Domain", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 21, pp. 1777~1784, 1985.
7. I. Babuska, B.A. Szabo, I.N."The p-version of F.E.M.", Report WU/CCM-79/1, Washington University, May 1979.
8. B.A. Szabo,"Estimation and Control of Error Based on P-convergence", Accuracy and Adaptive Refinements in Finite Element Computations Edited by I. Babuska et al., John Wiley & Sons Ltd. 1986.
9. P.K. Basu, B.A. Szabo, B.D. Taylor,"Theoretical Manual and User's Guide for COMET-XA", Research Report No. WU/CCM-79/2, Washington University, 1979.
10. D.A. Dunuvant,"Experience with the p-version program PROBE", Computer Utilization Structural Engineering, Proceedings Seventh Structures Congress, ASCE, San Francisco, pp. 286~295, May 1989.
11. I. Babuska, B.A. Szabo,"On the rates of convergence of the finite element method", Int.J. Numer. Meth. Eng., Vol. 323~341, 1982.
12. B.A. Szabo, P.K. Basu,"Fatigue Life Computations in the Railroad Industry", Computational Methods

in Ground Transportation Vehicles, The Winter Annual Meeting of ASCS, Phoenix, Arizona, pp. 61~73. Nov. 1982.
13. A.K. Metha, "P-convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechanics," Doctoral Dissertaion, Washing University, St. Lcuis, Misouri, 1978.
14. K.S. Woo. P.K. Basu, "LEFM of Cracked Pipes with P-version Finite Element Modeling", Proceedings of Tenth International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Anaheim, California, 1989.
15. P.K. Basu, K.S. Woo, "LEFM Analysis of Craked Plates and Membranes Using P-version of the Finite Element Method," NUMETA 90. Feb. 1990, Swansea, United Kingdom.
16. K. Izadapanah, "Computation of Stress Components in the P-version of the Finite Element Method," Doctoral Dissertation, Washington University, 1984.
17. M.N. Akhtar, "Stability analysis of thin-walled members using P-version of finite element method," Ph. D. Dissertation, Vanderbilt University, Jan. 1989.
18. C.Cheng, "Dynamic analysis by the P-version of the finite element method," Ph.D. Dissertation, Purdue University, May 1986.
19. A.G. Peano, "Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending," Comp. Math. Applied. Vol. 221~224, 1976.
20. L.J. Brombolish, P.L. Gould, "Finite analysis of shells of revolutionby minimization of the potential energy," Proc. of the Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Eng., Vanderbilt University, ASCE, pp. 279~307, Nov. 1969.
21. I. Babuska, M. Suri, "The hp-version of the finite element method with quasiuniform mesh," Technical Note, Laboratory for Numerical Analysis, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, March 1986.
22. I. Babuska, M. Suri, "The Optimal Convergence Rate of the P-version of the Finite Element Method," Technical Note BN-1045, Laboratory for Numerical Analysis, Institute for physical science and Technology, University of Maryland, Oct. 1985.
23. P.K. Basu, "Dimensional Reduction of Structural Plats and Shells," NSF Research Report, Grant No. CEE-84115675, Vanderbilt University, Nashille, TN. 1986.
24. K.S. Woo, "High precision analysis of plates and cylindrical shells in the presence of singularities by the p-version of the finite element method," Ph. D. Dissertation, Vanderbilt University, Dec. 1988.