

# 변위제어법에 의한 철근콘크리트 보의 비선형해석법

## Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Beams by Displacement Control Method

김	진	근*
Kim,	Jin	Keun
이	을	범**
Lee,	Eul	Bum
이	태	규***
Lee,	Tae	Gyu

### 요 약

보의 비선형 해석프로그램의 개발에 있어서 변형연화현상을 고려해 주기 위하여 한점의 변위를 점증시키면서 구조물의 나머지 변위와 가해지는 하중들을 구하는 변위제어법을 사용하였으며, 신속한 결과의 도출을 위하여 단면의 성질인 모멘트-곡률 곡선을 이용하였다. 이때 변형연화현상으로 인하여 요소길이에 따라 같은 구조물일지라도 해석결과가 다르게 나타나는데 이 점을 보완해 주기 위해서 파괴에너지 개념을 도입하여 모멘트-곡률 곡선을 보정하였으며, 비선형 해석을 보다 단순화시키기 위하여 과다철근보에 대해서는 탄성-연화, 과소철근보에 대해서는 탄성-소성-연화로 선형화된 모델을 사용하였다.

이러한 본 해석프로그램을 이용하여 실험된 철근콘크리트 보들을 해석한 결과 보의 하중-처짐 곡선은 실험결과와 거의 일치함을 보였다.

### Abstract

In this paper a computer program for displacement control method was developed, in which a certain displacement of the structure is increased and the applied loads and another displacements are obtained.

To simplify the nonlinear structural analysis, the relationships of moment-curvature were linearized as elasto-softening model for over-reinforced concrete beam and as elasto-plastic-softening model for under-reinforced concrete beam.

Since the result of the analysis of reinforced concrete beam depended on the element size beyond elastic zone, the relationship of moment-curvature was modified for each element by using the concept of fracture energy approach.

Overall, analytical results accurately predicted the load-displacement behavior of reinforced concrete beams.

\* 정회원, 한국과학기술원 조교수, 공학박사

\*\* (주) 현대건설 해외토목사업부 설계실

\*\*\* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

□ 이 논문에 대한 토론을 1989년 6월30일까지 본학회에 보내주시면 1989년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

### 1. 서 언

유한요소법을 이용한 구조물의 비선형 해석방법은 주로 하중을 단계적으로 증가시켜 해석하는 하중제어법이 사용되고 있다. 그러나 하중제어방법은 철골 구조물과 같이 응력-변형을 곡선이 변형경화(strain-hardening)현상을 보이는 구조물 해석에는 적합하나, 응력-변형을 곡선이 변형연화(strain-softening)현상을 보이는 철근 콘크리트 구조물 해석에는 최대하중으로부터 파괴하중까지의 거동에 관한 해석은 할 수 없으므로 파괴 때까지의 거동예측을 위하여서는 적합하지 않다. 그러므로 이러한 경우에는 유한요소법을 이용하여 어느 일정한 지점의 변위를 단계적으로 증가시켜 해석하는 변위제어에 의한 비선형 해석방법을 사용하게 된다.

철근콘크리트 구조물에서 철근과 콘크리트의 응력-변형을 곡선이 주어질 때에 그 부재단면에 대한 모멘트-곡률 곡선을 유도하고, 이 곡선을 이용하여 변위제어에 의한 유한요소법으로 철근콘크리트 구조물이 파괴될 때까지의 하중-처짐 곡선을 이끌어 내고자 한다. 그러나 이 모멘트-곡률의 관계는 부재의 성질이 아니고 단면의 성질이기에 때문에 일반적인 유한요소법에 의하여 해석하면 요소크기(element size)에 결과가 크게 영향을 받게 된다. 이 점을 보완하기 위해서 동일한 구조부재가 파괴될 때 에너지가 일정하다는 점에 착안하여 모멘트-곡률 곡선을 보정하여 해석을 한다.

### 2. 비선형 문제의 해석방법

본 논문에서는 하중제어법에 의한 비선형문제 해석방법을 변위제어에 의한 해석방법으로 형태를 변환시켜 문제를 해석한다. 일반적으로 하중제어법에 의한 해석법은 구조물에 가해진 하중항  $\{f\}$ 가 주어졌을 때 반복기교(iteration scheme)를 도입해서 미지수인 변위항  $\{u\}$ 를 구하면 된다. 하지만 변위제어법에 의한 해석을 하려면 하중항과 제어할 변위항이 바뀌어야 한다. 즉,  $p$ 번째 변위  $u_p$ 를 제어한다면 변위  $u_p$ 가 기지수가 되고

하중항  $\{f\}$ 가 미지수가 된다. 이때 전체 하중항을 임의의 지점에 가해지는 하중항  $f_j$ 로 표시할 수 있으며 하중항은 다음 식(1)과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix} f_j \dots\dots\dots (1)$$

여기서,  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ 은 상수

따라서 연립방정식의 미지수 항과 기지수 항을 이항시키면 풀어야 할 연립방정식은 다음과 같다.

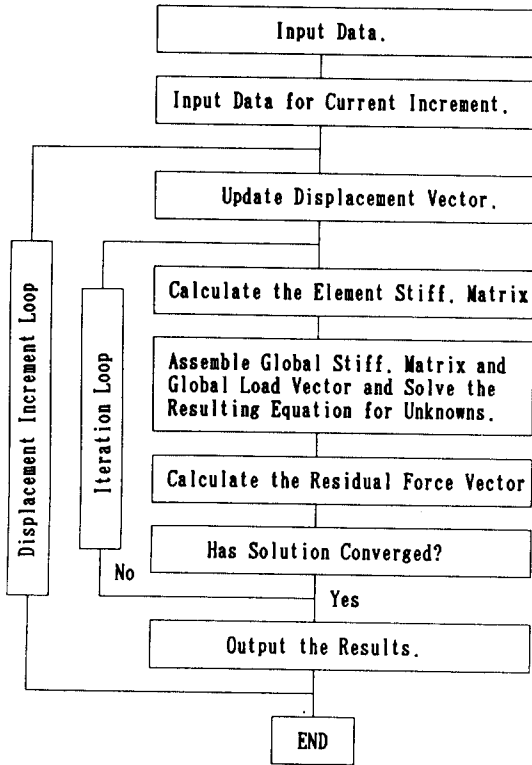
$$K_{11}u_1 + K_{12}u_2 + K_{13}u_3 + \dots - m_i f_j + \dots + K_{in}u_n = -K_{ip}u_p \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2)$$

위 식을 가우스 소거법으로 풀어서 미지수인 하중항  $\{f_j\}$ , 즉  $f_j$ 와 제어된 변위  $u_p$ 를 제외한 제어되지 않은 변위항  $\{u_i\}$ 를 구한다. 이 때 바로 전의 반복단계에서 구했던 하중항과 현재 단계에서 구한 하중항을 비교하여 그 잉여력이 수렴범위(tolerance) 내에 들 때까지 반복계산하여 방정식의 해를 구하게 된다.

### 3. 변위제어법에 의한 해석방법과 프로그램화 과정

임의의 지점에서 변형연화현상을 고려한 하중-변위 곡선을 얻기 위하여, 구하고자 하는 지점의 변위를 제어하여 점차적으로 증분시켜 나가면서 각 증분단계마다 반복계산을 통하여 하중을 구하게 된다. 각 증분단계마다의 하중 계산 방법은 2장에서 설명한 바와 같은 방법을 사용하며, 반복계산시 첫 반복단계에서는 Tangential Stiffness 법을 사용하고 그 후에는 Initial Stiffness 법을 사용하여 보다 빠르게 해를 구하도록 하였

다. 이에 대한 프로그램화 과정을 요약하여 순서도(flow chart)로 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1] 해석과정의 순서도

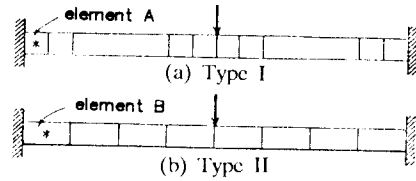
일반적으로 널리 사용되는 보해석 이론은 크게 두가지가 있는데 Euler-Bernoulli 보(EB) 이론과 Timoshenko 보(TB) 이론이 그것이다[1].

이 두가지 이론중 보 해석에서 TB 이론이 전단변형을 고려해 주기 때문에 EB 이론에 비해 보다 정확한 값을 구할 수 있으므로 본 논문에서는 전단력-전단 변형을 곡선을 탄성으로 보고 TB 이론을 적용하였다.

하지만 TB 이론은 모멘트가 요소 전체에 걸쳐 일정하기 때문에 결국 요소 중간에서의 응력 상태를 조사하게 된다. 따라서 [그림 2]와 같이 양단 고정된 보를 TB 이론을 써서 해석하면 항복하중이 요소크기에 따라서 달라지게 된다. 즉, 해석시 요소크기를 [그림 2]의 Type I, Type II와 같이 정하면 응력이 계산되는 지점은 \* 점

이 되는데 하중이 가해지면 양단에서 제일 큰 모멘트 값이 발생하므로 상대적으로 볼 때 요소 A가 탄성상태를 넘어서도 요소 B는 탄성상태에 머물다가 하중이 더 증가되어 모멘트가 커져야 탄성상태를 넘는다.

결과적으로, Timoshenko 보 이론을 써서 보를 해석하면 임계단면 근처의 요소크기가 작은 경우가 구조물의 항복하중도 작아지게 된다.

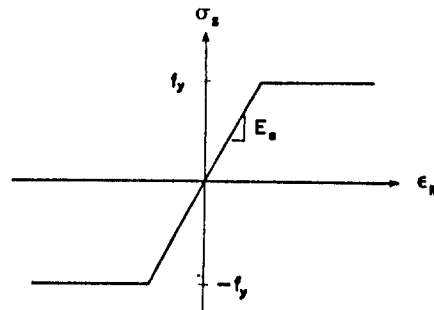


[그림 2] 양단 고정보

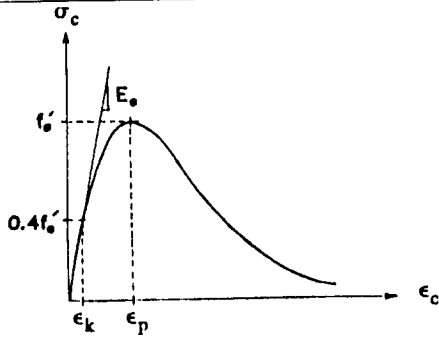
#### 4. 구조물 해석을 위한 모멘트-곡률 곡선

프로그램을 이용하여 실제로 철근콘크리트 구조물을 해석하려면 두가지 방법을 사용할 수 있는데, 직접 철근과 콘크리트의 응력-변형을 곡선을 이용하는 방법과 응력-변형을 곡선으로부터 단면의 모멘트-곡률 곡선을 유도해서 이용하는 방법이 있다. 하지만 응력-변형을 곡선을 직접 이용하는 방법은 단면을 층(Layer)으로 나누어 각 층의 응력-변형을 고려해야 되기 때문에 요소가 너무 많아서 컴퓨터 계산시간과 용량에 있어서 비효율적이므로 여기에서는 부재단면을 층으로 나누지 않고 부재단면에 대한 모멘트-곡률 곡선을 유도해 구조물 해석에 이용하기로 한다.

##### 4.1 철근과 콘크리트의 응력-변형을 곡선



[그림 3] 철근의 응력-변형을 곡선



[그림 4] 콘크리트의 응력-변형률 곡선

철근의 응력-변형률 곡선은 [그림 3]에서와 같이 완전 탄성-소성으로 가정하고, 콘크리트의 응력-변형률 곡선은 [그림 4]와 같은 형태로 보통 나타나는데 콘크리트의 응력-변형률 곡선 식은 다음과 같은 지수 형태의 식을 사용한다.

$$\sigma_c = A \text{Exp}(-\alpha \epsilon_c^m) \epsilon_c \dots\dots\dots (3)$$

여기서 A, α, m은 상수

두가지 경계조건 즉,  $\sigma_c|_{\epsilon_c=\epsilon_p} = f'_c$  과

$$\left. \frac{d\sigma_c}{d\epsilon_c} \right|_{\epsilon_c=\epsilon_p} = 0 \text{ 을 이용하여 식(3)을 다시 쓰면}$$

다음 식이 된다.

$$\sigma_c = \frac{f'_c}{\epsilon_p} \text{Exp}\left\{ \frac{1}{m} \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_p} \right)^m \right] \right\} \epsilon_c \dots\dots\dots (4)$$

콘크리트의 탄성계수를  $E_c = 0.4f'_c / \epsilon_k$  라 하고  $E_c = 170 w^{3/2} f'_c{}^{0.3} = 2.96 \times 10^5 f'_c{}^{0.3}$  [2]을 이용하면 식(5)와 같이 상수 m을 나타낼 수 있다.

$$\ln(2.96 \times 10^5 \frac{\epsilon_p}{f'_c{}^{0.7}}) = \frac{1}{m} \left[ 1 - \left( \frac{f'_c{}^{0.7}}{7.42 \times 10^5 \epsilon_p} \right)^m \right] \dots\dots\dots (5)$$

그러므로 [표 1]과 같이 각 f'\_c에 대해서 실험을 통한 실험치로부터 가정될 수 있는 ε\_p 값을 이용하여 식(5)로 부터 m 값을 구하고 다시 이 m 값을 이용하면 식(4)로 부터 콘크리트의 응력-변형률 곡선을 얻을 수 있다.

[표 1] 콘크리트의 f'\_c에 대한 ε\_p의 가정치

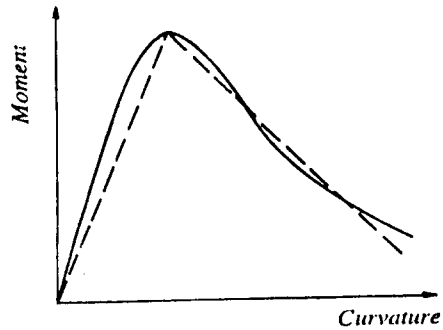
f'_c(×10³ psi.)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ε_p(×10⁻⁴)	20	21	22	24	25	26	27	28	29	30	31

#### 4.2 모멘트-곡률 곡선의 모델링

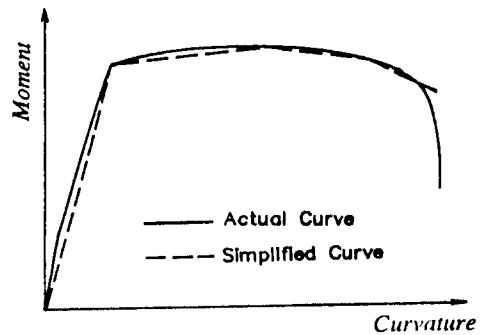
철근과 콘크리트의 응력-변형률 곡선을 이용

하여 부재단면에 대한 모멘트-곡률 곡선을 구할 수 있다. 이러한 과정으로 구한 모멘트-곡률 곡선은 과다철근보의 경우 [그림 5](a), 과소철근보의 경우 [그림 5](b)에 실선으로 나타난 것과 같이 대표적인 두가지 경우로 구분될 수 있다.

비선형 문제를 보다 단순화시키기 위해서, 얻어진 모멘트-곡률 곡선을 [그림 5](a)와 [그림 5](b)에 각기 점선으로 나타난 것과 같이 과다철근보에 대해서는 탄성-연화 그리고 과소철근보에 대해서는 탄성-소성-연화로 단순하게 모델화하여 구조해석에 이용한다.



(a) 과다철근 단면의 경우



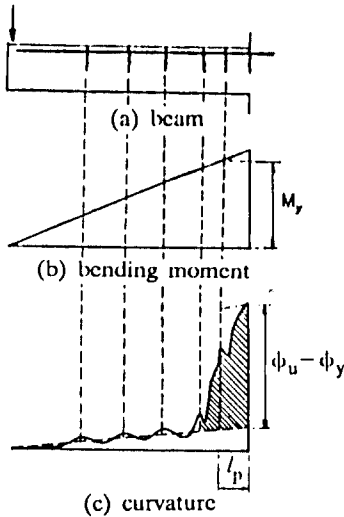
(b) 과소철근 단면의 경우

[그림 5] 단면의 모멘트-곡률 곡선

#### 4.3 소성길이에 의한 모멘트-곡률 곡선의 보정

철근콘크리트 구조물과 같이 재료가 변형연화 현상을 보이는 구조물 해석은 [그림 6]에서 처럼 부재의 곡률분포도에서 휨 모멘트가 항복모멘트 M\_y를 넘어서면 단면에서는 곡률이 비선형적으로 변하게 된다. 곡률분포도에서 빗금치치 않

은 부분의 면적은 탄성회전(elastic rotation)을 나타내고 빗금친 부분의 면적은 임계단면 근처의 소성힌지에서 발생하는 비탄성회전(inelastic rotation)을 나타낸다. 즉, 이 면적은 극한상태에서 탄성회전에 더해서 발생하는 부재의 소성회전(plastic rotation)을 의미한다.



[그림 6] 극한 모멘트에서의 보의 곡률 분포도[3]

그림에서 보는 바와 같이 극한상태에서 비탄성곡률 부분의 면적은 실제 면적과 등가면적인  $(\phi_u - \phi_y) l_p$  로 나타낼 수 있으며, 따라서 임계단면에서의 소성회전은 다음과 같다.

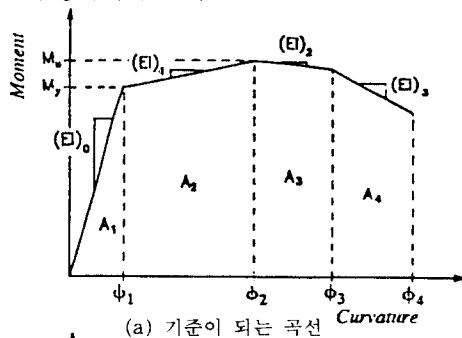
$$\theta_p = (\phi_u - \phi_y) l_p \dots\dots\dots (6)$$

- 여기서,  $\theta_p$  : 소성힌지회전, 또는 소성회전
- $\phi_u$  : 극한모멘트일 때의 곡률
- $\phi_y$  : 항복모멘트일 때의 곡률
- $l_p$  : 곡률이 일정한 소성힌지의 등가길이 (즉, 소성길이)

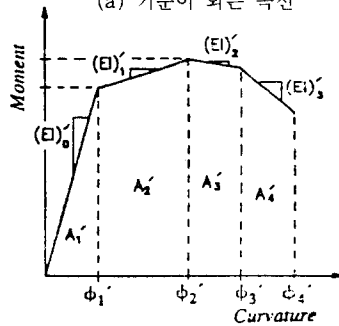
그런데 부재의 단면에서 파괴되는데 소요되는 파괴에너지 값은 구조해석시 유한요소의 크기에 관계없이 항상 일정하여야 되기 때문에 이 소성회전은 일정한 값을 유지해야 된다. 부재단면의 [모멘트-곡률 곡선의 면적]은 단면이 소성화되는데 소요되는 에너지를 의미하므로 요소 전체가 파괴되는데 소요되는 에너지는 [모멘트-곡률 곡선의 면적] × [요소길이] 와 같다. 이 값

이 일정하기 위해서는 유한요소의 길이가 변했을 때 여기에 맞게 모멘트-곡률 곡선을 보정해 줄 필요가 있다.

[그림 7](a)가 기준(요소크기를 소성길이를 했을 때)이 되는 단면의 모멘트-곡률 곡선이라면 해석시 유한요소의 길이에 맞게 [그림 7](b)와 같이 보정하여 주어야 한다. 탄성범위 내에서는 유한요소의 크기에 관계가 없으므로 [그림 7]에서 탄성범위인  $(EI)_0$ 의 크기는 변하지 않고 따라서  $A_1$ 과  $A'_1$ 는 항상 같다. 그러나 비탄성부분은 다음 식(7)을 만족하도록 그 기울기를 수정하여야 한다.



(a) 기준이 되는 곡선



(b) 보정된 곡선

[그림 7] 모멘트-곡률 곡선의 보정

$$A_i l_p = A'_i l \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (7)$$

여기서,  $l$  : 채택하는 유한요소의 길이  
즉,

$$(EI)_i = \frac{M_u - M_y}{\phi_{i+1} - \phi_i}, \quad (EI)'_i = \frac{M_u - M_y}{\phi'_{i+1} - \phi'_i} \quad (8)$$

따라서,

$$(EI)'_i = (EI)_i \frac{l}{l_p} \dots\dots\dots (9)$$

$$\phi'_{i+1} = \frac{l_p}{l} (\phi_{i+1} - \phi_i) + \phi'_i \dots\dots\dots (10)$$

모멘트-곡률 곡선의 기울기 보정에 기준이 되는 소성길이는 경험적으로 제안된 식들을 이

용하여 구할 수 있으며, 여러가지 제안된 경험식이 있지만 일반적으로 대표적인 것으로 다음 식들을 들 수 있다.

(1) CORLEY[4]

$$\ell_p = 0.5d + 0.2\sqrt{d} (z/d) \dots\dots (11)$$

여기서,  $d$  : 보의 유효높이(in.)

$z$  : 휨 모멘트가 최대인 점부터 변곡점까지 거리(in.)

$\ell_p$  : 소성길이(in.)

(2) MATTOCK[5]

$$\ell_p = 0.5d + 0.05z \dots\dots (12)$$

(3) SAWYER[6]

$$\ell_p = 0.25d + 0.075z \dots\dots (13)$$

본 논문에서는 소성길이에 대한 연구가 아니므로 소성길이를 주로 많이 사용되는 위의 세가지 경험식에 의해 구한 값의 평균값을 이용하였다.

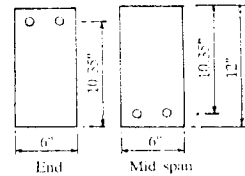
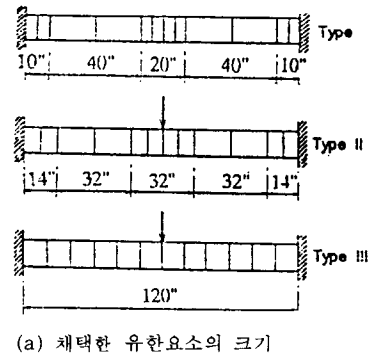
5. 예제해석 및 결과분석

이 절에서는 먼저 가정된 양단고정의 철근콘크리트보를 해석하여 해석시 채택한 유한요소의 크기에 따른 결과의 차이를 보이고자 하며, 또한 문헌에서 구한 단순지지보의 실험치와 여기서 제시한 방법에 의한 수치해석 결과를 비교하고자 한다.

5.1 양단고정보의 해석

양단이 고정된 보에서 요소크기에 따라 결과가 매우 다르게 나타나는 것을 보여주기 위해서 유한요소의 크기를 [그림 8]과 같이 세가지로 구분하여 보 중앙점의 하중-처짐 곡선을 구하였다. 철근비를 조정하여 과다철근단면과 과소철근단면으로 구분한 후 모멘트-곡률 곡선의 보정여하에 따른 결과의 차이를 나타내면 과다철근단면의 경우는 [그림 9]와 같으며, 과소철근단면의 경우는 [그림 10]과 같다.

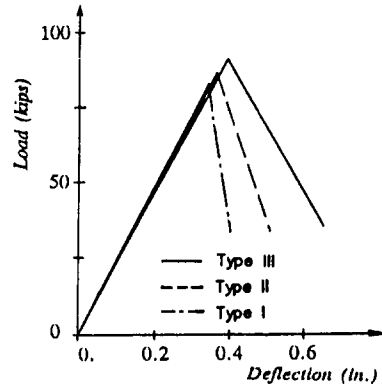
결국 모멘트-곡률 곡선을 보정하여 줌으로써 유한요소 크기에 관계없이 비슷한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있으며, 앞의 3장에서 언급한 바와 같이 단부에서의 유한요소 크기가 작을수



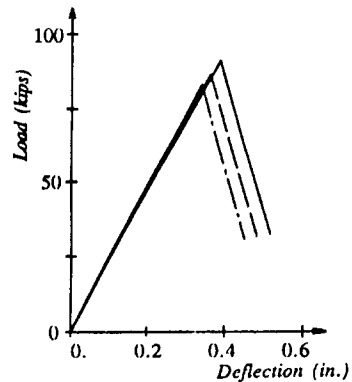
End                      Mid span  
 $f_c = 4500$  psi  
 $f_y = 41000$  psi  
 $E_s = 28.2 \times 10^6$  psi  
 $A_s = 3.8$  in.<sup>2</sup>(over-reinf.)  
           2.0 in.<sup>2</sup>(under-reinf.)

(b) 가정된 단면

[그림 8] 예제단면과 해석시 채택한 유한요소의 크기

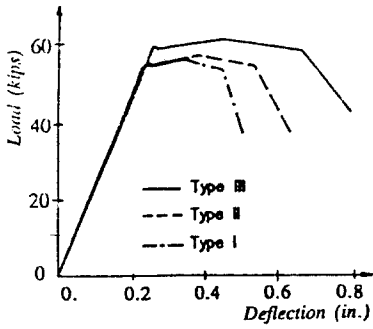


(a) 보정하지 않은 경우

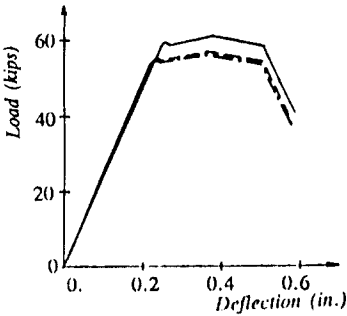


(b) 보정한 경우

[그림 9] 과다철근 보의 하중-처짐의 곡선



(a) 보정하지 않은 경우



(b) 보정한 경우

[그림 10] 과소철근 보의 하중-처짐 곡선

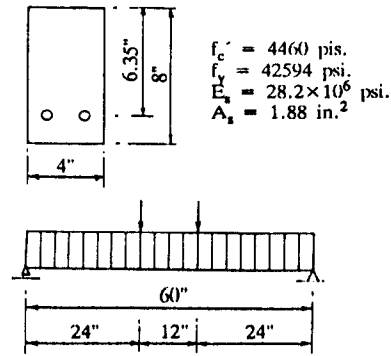
특 항복하중이 작게 나타나고 있음을 알 수 있다.

5.2 단순지지보의 해석

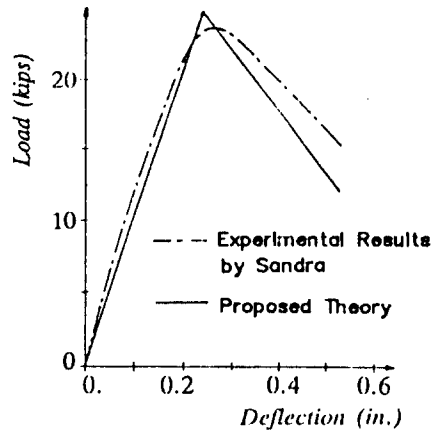
본 프로그램을 이용하여 과다철근보와 과소철근보를 해석한 결과를 문헌[7,8]에서 구한 실험결과와 비교하였다.

과다철근보에 대한 예제 단면의 재료 특성 및 해석시 요소크기는 [그림 11]과 같고, 이 과다철근단면에서 얻어진 모멘트-곡률 곡선을 단순화시켜서 탄성-연화로 모델화하였다. 이에 대한 해석결과는 [그림 12]에 보이는 바와 같으며 전단스팬 내에 전단보강을 충분히 하여 전단 파괴가 일어나지 않도록 한 Sandra 등[7]에 의해 실험된 실험결과와 비교하여 볼 때 거의 일치함을 알 수 있다.

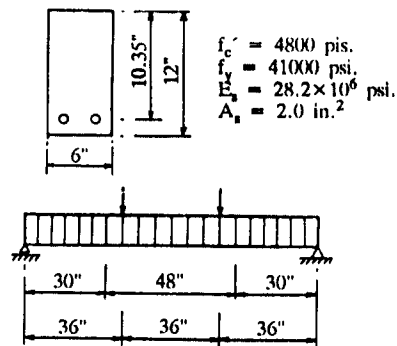
과소철근보에 대한 예제 단면의 재료 특성 및 해석시 유한요소의 크기는 [그림 13]과 같고, 이 과소철근단면에 대한 모멘트-곡률 곡선을 단순화시켜서 탄성-소성-연화로 모델화하였다. 이에 대한 해석결과는 [그림 14]에 보이는 바와 같으며 Faud 등[8]에 의해 실험된 휨 파괴에 의한 실험결과와 비교해 볼 때 파괴하중 전까지는 실험치에 비해 강성이 약간 크게 나타나며 파괴하중 후에는 실험치와 거의 일치하게 됨을 알



[그림 11] 예제단면의 재료특성 및 해석시 요소크기



[그림 12] 과다철근 보의 중앙점의 하중-처짐 곡선

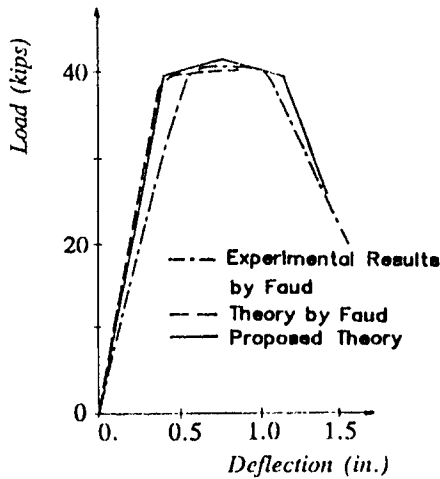


[그림 13] 예제단면의 재료특성 및 해석시 요소크기

수 있다.

6. 결 론

변위제어법을 이용하여 철근콘크리트 구조물



[그림 14] 과소철근 보의 중앙점의 하중-처짐 곡선

을 비선형 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 콘크리트와 같이 변형연화현상을 보이는 재료로 된 철근콘크리트 구조물의 비선형 해석은 변위제어법에 의해서 연화영역까지 해석할 수 있다.

2) 특히 콘크리트와 같이 변형연화현상을 나타내는 재료로 된 구조물을 변위제어법에 의하여 비선형해석을 하면 요소크기에 따라서 해석 결과가 매우 다르게 나타나는데 파괴에너지 개념을 이용하여 요소마다 모멘트-곡률 곡선을 보정하여 해석하면 비슷한 거동을 얻을 수 있다.

3) 구조물이 선형영역을 넘어서 연화상태에 이르면 변위제어시 변위의 증분을 미세하게 증가시키지 않으면 잉여력이 쉽게 수렴되지 않기 때문에 변위증분을 미세하게 조절하여야 한다.

4) 본 연구는 Timoshenko 보 이론에 의한 해석 프로그램을 이용하였기 때문에 요소크기에 따라서 보의 항복하중이 다르게 나타나므로, 단부에서는 요소크기를 너무 크게 취하지 않는 것이 좋다.

## 감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 1987년 목적기초연구비 지원에 의하여 이루어진 연구의 일부이며, 이에 한국과학재단에 깊은 감사를 드립니다.

## 참 고 문 헌

- Owen D. R. J. and Hinton E., "Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice," Pineridge Press Limited, Swansea, 1980, pp. 121~153.
- Arthur H. N. and Floyd O. S., "Structural Properties of Very High Strength Concrete," Second Process Report, Cornell Univ., Ithaca, New York, pp. 42.
- Park R. and Paulay T., "Reinforced Concrete Structures," John Wiley & Sons, New York, 1975, pp. 243.
- Corley W. G., "Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams," J. of Structural Division, ASCE, Vol. 92, ST-2, Oct., 1966, pp. 121~146.
- Mattock A. H., Discussion of "Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams," J. of Structural Division, ASCE, Vol. 93, ST-2, April, 1967, pp. 519~522.
- Sawyer H. A., "Design of Concrete Frames for Two Failure States," Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI, Miami, November, 1964, pp. 405~431.
- Sandra K. T., Prakash D. and Nagy R., "Flexure of Reinforced Concrete Beams with Confined Compression Zones," J. of ACI, Vol. 68, No. 9, Sept., 1971, pp. 719~725.
- Faud B. and David D., "Nonlinear Model for Reinforced Concrete Slabs," J. of Structural Division, ASCE, Vol. 104, ST-1, January, 1978, pp. 157~171.

(접수일자 1988. 12. 22)