

유한요소와 경계요소의 조합에 의한 반무한 영역 문제의 비선형해석

A Nonlinear Analysis of Half Plane Problems Using Coupling of Finite Elements and Boundary Elements

김	문	겸*
Kim,	Moon	Kyum
임	윤	복**
Lim,	Yun	Mook
황	학	주***
Hwang,	Hak	Joo

요 약

본 논문에서는 경계요소법과 비선형 유한요소법의 각 장점을 이용하여 반무한 영역을 가진 구조체의 해석 방법을 논하였다. 여기서, 반무한 경계요소는 Melan의 반무한 평면에 대한 해로부터 구성하였다. 비선형 유한요소는 지하구조물에서 주로 접할 수 있는 탄소성 재료의 비균질성 또는 불규칙성을 모형화하기 위하여 사용하였다. 본 조합방법의 검증을 위하여 얇은 터널에 일정한 내압이 작용하는 경우를 택하여, 비선형 유한요소법과 조합방법의 결과를 비교하였다. 비교결과, 개발된 조합방법이 다른 해석방법에 비해 충분한 정확도를 가짐을 알 수 있었다.

Abstract

A procedure which may be useful in dealing with problems of half plane is considered. Boundary elements are combined with nonlinear finite elements to facilitate their merits. Boundary elements for semi-infinite region are composed using the Melan's solution for half plane. Nonlinear finite elements are used to model irregularity or nonhomogeneity of elasto-plastic materials, which is usual in underground structures. In order to verify the procedure, a shallow tunnel under internal pressure is analysed using the nonlinear finite element method and combined method. It is shown that the developed procedure is accurate enough compared with other method.

* 정회원, 연세대학교 토목공학과 조교수

** 연세대학교 토목공학과 석사과정

*** 연세대학교 토목공학과 교수

□ 이 논문에 대한 토론을 1989년 6월30일까지 본학회에 보내주시면 1989년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

지하구조물, 도로포장, 수로의 해석, 재료의 파괴해석 등 공학의 여러분야에서 반무한 영역의 문제를 자주 접하게 된다. 특히 산업의 발달과 함께 지하구조물 및 터널, 광산의 지하경도 등의 건설이 증가됨에 따라 이에 대한 정확한 해석이 요구되고 있다. 이러한 대상에 대한 이론적인 해석, 실험 해석 등은 이론해의 한정성과 실험여건의 불충분 등으로 상당히 제약되어 있으므로 현재는 전산기의 보급과 함께 수치해석 방법이 다각적으로 시도되고 있다. 수치 모형에 의한 해석 방법으로는 유한요소 해석과 경계요소 해석 방법을 들 수 있다.

일반적으로 유한요소와 경계요소 해석을 비교하면, 유한요소 해석은 수학적 이론이 간단하고, 재료의 성질 및 구조 거동에 대한 다양한 비선형 이론을 고려하기에 용이하며, 강성행렬이 일반적으로 대칭이고 대각행렬을 중심으로 부분적으로 분포하므로 해를 구하기 쉬운 이점이 있다. 반면에 경계요소 해석은 경계만을 요소로 분할하므로 입력자료 및 계산 양이 적고, 경계조건이 무한 및 반무한인 경우에 적용하기 용이하다. 따라서 본 연구에서는 각 방법의 장단점을 보완하여 형상이 복잡하고 재료의 성질에 변화가 있는 부분, 응력이 집중되는 부분은 비선형 유한요소로, 등방성 단일물성의 반무한 영역은 경계요소로 구성하고 두 부분을 조합하여, 보다 효율적인 구조해석을 시도하였다.

경계요소법은 Rizzo⁹⁾(1967)에 의해 처음 탄성학적 문제에 적용된 이래, Lachat²⁾(1975)와 Banerjee³⁾ 등에 의해 직접과 간접경계요소법으로 각각 발전되어 많은 연구가 진행되고 있다. 최근에는 유한요소법과 경계요소법의 조합에 의한 해석방법이 시도되고 있다. 유한요소와 경계요소의 조합에 관한 논의는 Zienkiewicz⁴⁾(1977)에 의해 거론된 이후 Kelly⁵⁾(1979), Brebbia, Gergiou⁶⁾(1979), Mustoe⁷⁾(1980)에 의하여 'interior 문제'에 대하여 적용되었다. Beer와 Meek⁸⁾(1981)는 'exterior 문제'에 대하여 조합방법을 적용한 바 있다. 최근에는 이러한 조합방법에 의한 해석이 Wearing

와 Sheikh⁹⁾(1988) 등과 Hsiao¹⁰⁾(1988)에 의하여 강조되었다.

경계요소법에 의한 반무한영역의 고려는 Telles와 Brebbia¹¹⁾(1981) 및 Wang 과 Liu¹²⁾(1986) 등에 의하여 시도된 바 있다. Brebbia는 무한영역의 기본해와 반무한 영역에 대한 보충항을 고려함으로써 전체 기본해를 구성하여 경계요소해석을 실시하였다. 본 연구에서는 Brebbia의 접근방법을 이용하여 반무한 영역을 경계요소법에 의하여 고려하고, 이를 비선형유한요소법과 조합하여 반무한 영역에 존재하는 구조물을 효율적으로 해석하고자 한다.

2. 경계요소법 및 비선형 유한요소법

기본방정식

그림 1에서와 같이 영역 Ω 와 경계 Γ 를 갖는 정적 하중계에 대하여, 내부 응력텐서 증분 $d\sigma_{ij}$ 와 물체력 증분 df_i 와의 평형조건은

$$d\sigma_{i,j,j} + df_i = 0 \tag{1}$$

이 성립한다. 영역 Γ 의 경계조건은 전체 경계를 기하학적 경계 Γ_1 과 역학적 경계 Γ_2 로 분할하였을 때, 식 (2) 및 (3)과 같이 된다.

$$du_i = \bar{d}u_i \quad \text{on } \Gamma_1 \tag{2}$$

$$dt_i = d\sigma_{j,n_j} = \bar{d}t_i \quad \text{on } \Gamma_2 \tag{3}$$

여기서, du_i 는 변위, $\bar{d}u_i$ 는 기지의 변위이며, dt_i 는 표면력, n_j 는 외부로 향한 수직벡터의 방향여현, $\bar{d}t_i$ 는 기지의 표면력이다.

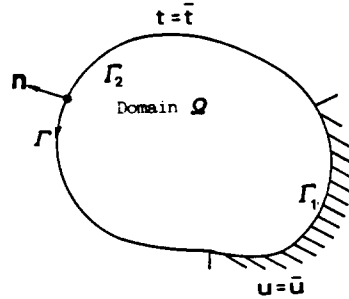


그림 1. 대상영역의 점의

식 (1)에 가중함수 u_k^* 를 사용하여 weighted residual equation 을 구성하여 경계 Γ 에서 적분 형식의 평형조건식을 구성하면 식 (4)와 같다.

$$du_i^i + \int_{\Gamma} du_i t_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} dt_{ik} u_{ik}^* d\Gamma \quad (4)$$

여기서 du_i^i 는 i 점에서의 x_i 방향 변위를 표시하며, u_{ik}^* 와 t_{ik}^* 는 그림 2에서와 같이 i 점에서 x_k 방향으로 작용하는 단위하중에 의한 x 점에서의 x_i 방향의 변위와 표면력을 의미한다.

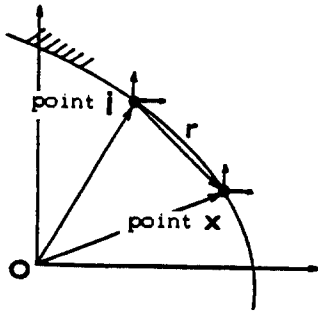


그림 2. 기본해를 위한 좌표계

이들 u_{ik}^* 와 t_{ik}^* 는 Kelvin의 기본해로부터 구할 수 있다¹¹⁾.

반무한영역 문제

그림 3에서와 같이 Kelvin 문제의 영역을 무한의 수평 경계 $\bar{\Gamma}$ 와 그 경계 밑의 반무한영역으로 분할한다. 반무한영역은 그림에서와 같이 공동의 경계 Γ' 과 무한경계영역 Γ_p 를 포함하고 있다.

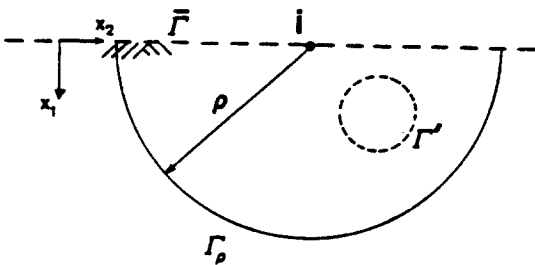


그림 3. 반무한영역의 정의

기본방정식 (4)를 그림 3의 반무한영역에 적용하면, 반무한 영역의 표면 $\bar{\Gamma}$ 에서 표면력이 0인 조건으로부터 식 (5)의 형태로 바꿀 수 있다.

$$du_i^i + \int_{\Gamma'} du_k t_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} dt_{ik} u_{ik}^* d\Gamma \quad (5)$$

식 (5) 또한 Kelvin의 기본해를 포함하고 있으므로 경계 Γ' 을 따라 가해지는 하중점에 대하여 Kelvin의 기본해에 의한 특이점이 발생하게 된다. 따라서 이에 대해 고려하면 식 (5)는

$$c_i^i du_i^i + \int_{\Gamma'} du_k t_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} dt_{ik} u_{ik}^* d\Gamma \quad (6)$$

이 된다. 여기서 c_i^i 는 내부점에서는 δ_{ii} 이고, 연속적인 곡면에서는 $1/2 \delta_{ii}$ 의 값을 갖는 계수로서 특이점 i 에 인접한 미소경계영역 Γ_ϵ 을 생각하여

$$c_i^i = \delta_{ii} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} t_{ik}^* d\Gamma \quad (7)$$

에 의하여 계산되어진다¹²⁾.

반무한영역의 기본해

등방성 반무한체의 내부에 작용하는 집중하중에 대한 문제는 Melan¹⁴⁾에 의해 해석되었으며, 3차원 문제에 대하여 Mindlin¹⁵⁾이 확장하였다.

기본해는 무한탄성영역에 대한 Kelvin의 기본해항과 반무한영역의 보충항을 ()^{*}와 ()^c로 표시하면 반무한영역의 기본해 ()^{*}는

$$()^* = ()^k + ()^c \quad (8)$$

로 할 수 있다. 보충항에 대한 기본해는 Melan에 의하여 유도되었고 Brebbia 등에 의하여 경계요소법에 적용되었다¹³⁾.

하중의 재하점이 반무한영역의 표면에 놓이는 경우 변위와 표면적은 Flamant¹⁶⁾의 문제로 할 수 있다.

행렬형태의 표현

기본방정식 (5)를 행렬형태로 나타내기 위하여 전체좌표계에 대한 변위와 표면력을 다음과 같이 벡터로 표현한다.

$$\{u_r\} = \{\varphi\}^T \{u\} \quad (9)$$

$$\{t_r\} = \{\varphi\}^T \{t\} \quad (10)$$

여기서, $\{\phi\}$ 는 변위와 표면력에 대한 형상함수로 서 본 논문에서는 선형요소를 취하였다. 식 (9)와 (10)을 식 (6)에 적용하면 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{c\} \cdot \{du\} + \sum_{j=1}^N (\int_{r_j} \{t^*\} \{\phi\}^T d\Gamma) \{du\} \\ = \sum_{j=1}^N (\int_{r_j} \{u^*\} \{\phi\}^T d\Gamma) \{dt\} \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)의 적분항을 수치적분하기 위한 형태로 표현하면

$$\begin{aligned} \{c\} \cdot \{du\} + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{\ell=1}^L |J|_{\ell} w_{\ell} (\{t^*\} \{\phi\}_{\ell}^T) \right] \{du\} \\ = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{\ell=1}^L |J|_{\ell} w_{\ell} (\{u^*\} \{\phi\}_{\ell}^T) \right] \{dt\} \end{aligned} \quad (12)$$

이 되며, 여기서 $|J|$ 는 Jacobian 행렬이며, w 는 Gauss 적분의 가중치이다. 또는, 식 (13)로 표현되어 진다.

$$[H] \{du\} = [G] \{dt\} \quad (13)$$

식 (13)의 양면에 $[G]^{-1}$ 를 곱하면

$$[G]^{-1} [H] \{du\} = [C] \{du\} \quad (14)$$

이 된다.

비선형 유한요소법

본 논문에서는 비선형 거동을 고려하기 위하여 물체의 거동을 탄소성 거동으로 고려하였으며, 흐름법칙과 경화법칙에 의하여 탄소성 강성행렬을 구성하였다. 탄소성 이론에 의한 탄소성 변형을 증분 $d\epsilon_{ij}$, 탄성 변형을 증분 $d\epsilon_{ij}^e$ 와 소성변형을 증분 $d\epsilon_{ij}^p$ 로 구성한다. 또한, 응력 증분 $\{d\sigma\}$ 와 탄소성 변형을 증분 $\{d\epsilon\}$ 의 관계는 식 (15)와 같다.

$$\{d\sigma\} = [C^{ep}] \{d\epsilon\} \quad (15)$$

유한요소법에 사용되는 형상함수는 경계요소의 연결부에서의 접합조건을 만족시키기 위하여 경계요소에서 사용한 선형 형상함수를 사용한다. 절점변위 $\{du\}^e$ 와 변형율의 관계는 식 (16)에 의하여 나타난다.

$$\{d\epsilon\} = [B] \{du\}^e \quad (16)$$

영역이 Ω^e 인 요소에 대하여 가상일의 원리를 이용하면 식 (17)과 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$[K^{ep}]^e \{du\}^e = \{dF\}^e \quad (17)$$

여기서

$$[K^{ep}]^e = \int_{\Omega^e} [B]^T [C^{ep}] [B] d\Omega \quad (18)$$

는 요소의 비선형 강성행렬이고 $\{dF\}^e$ 는 요소의 절점하중 벡터이다.

요소당의 강성도행렬과 절점하중벡터를 강성도행렬과 전체하중벡터로 합하여 식(19)의 비선형 유한요소부분의 강성도 행렬 $[K^{ep}]_{FE}$ 를 구성한다.

여기서 $\{du\}_{FE}$ 은 유한요소영역의 변위이고 $\{dF\}_{FE}$ 는 유한요소영역에 가해지는 외부하중이다.

3. 조합방법

경계요소 계방정식의 변형

앞에서 얻은 경계요소법에 의한 계방정식 (14)는 변위-표면력의 관계로 유한요소법의 계방정식 (19)의 변위-하중 관계와 차이가 있다. 따라서, 경계 요소의 계방정식을 변위-하중관계로 변형하여야 한다. 여기서는 최소위치에너지의 원리를 적용한다.

경계요소 영역에 있어서 전체의 위치에너지는 식 (20)으로 나타낼 수 있으며, 여기서 변형에너지항을 발산 정리에 의해 식 (21)로 나타낼 수 있다.

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\epsilon\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{u\}^T \{\bar{t}\} d\Gamma \quad (20)$$

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{u\}^T \{t\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{u\}^T \{\bar{t}\} d\Gamma \quad (21)$$

여기서, $\{t\}$ 는 경계에서 작용하는 표면력 벡터이다.

전체좌표계에 대한 형상함수를 고려하여 정리하면

$$\pi^p = \frac{1}{2} \{u\}^T [M] \{t\} - \{u\}^T \{F\} \quad (20)$$

를 얻는다. 여기서, $[M]$ 과 $\{F\}$ 는 다음과 같다.

$$[M] = \int_{\Gamma} \{\varphi\}^T \{\varphi\} d\Gamma \quad (23)$$

$$\{F\} = \int_{\Gamma} \{\varphi\}^T \{\bar{t}\} d\Gamma \quad (24)$$

식 (22)에 경계요소의 계방정식 (14)를 대입하여 식 (25)를 얻는다. 여기에 $\{u\}$ 의 variation 을 생각하여 식 (26)를 구성한다.

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{u\}^T [M] [C] \{u\} - \{u\}^T \{F\} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{u\}} = \frac{1}{2} ([M][C] + [C]^T [M]^T) \{u\} - \{F\} = \{0\} \quad (26)$$

따라서 경계요소의 변위-표면력 관계의 계방정식은 변위-하중관계의 계방정식 (27)로 변환된다.

$$[K]_{BE} \{u\}_{BE} = \{F\}_{BE} \quad (27)$$

여기서 $[K]_{BE}$ 는 대칭형 강성도행렬로써

$$[K]_{BE} = \frac{1}{2} ([M][C] + [C]^T [M]^T) \quad (28)$$

이고, $\{u\}_{BE}$ 는 경계요소부분의 변위, $\{F\}_{BE}$ 는 경계요소부분에 작용하는 하중이다.

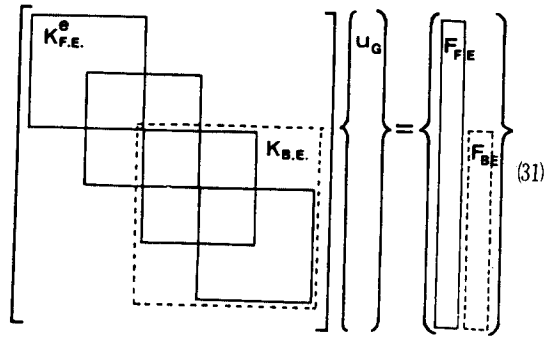
유한요소법과 경계요소법의 조합

앞에서 유도한 유한요소의 강성도행렬 $[K^{ep}]_{FE}$ 와 경계요소의 강성도행렬 $[K]_{BE}$ 는 각각의 해석 영역에 대한 같은 성질의 강성도행렬로서 두 영역의 집합 부분에 따라 합성하여 전체영역의 변위-하중관계의 계방정식을 구할 수 있다. 즉,

$$([k^{ep}]_{FE} + [K]_{BE}) (\{du\}_{FE}) + \{du\}_{BE} = \{dF\}_{FE} + \{dF\}_{BE} \quad (29)$$

$$[K^{ep}]_G \{du\}_G = \{dF\}_G \quad (30)$$

여기서, $[K^{ep}]_G$ 는 전체영역에 대한 강성도행렬, $\{du\}_G$ 는 전체영역에서 고려되는 각 결점의 변위벡터, $\{dF\}_G$ 는 유한요소와 경계요소에 가해지는 하중의 합성이다. 식 (29)은 식 (30)과 같이 구성된다.



비선형 문제의 반복해법

일반적으로 비선형 지배방정식에 대한 해법으로 증분법과 반복법을 생각할 수 있다. 증분법은 하중을 여러개의 하중단계로 나누어 각 하중단계마다 변위증분을 계산하면서 전체하중이 가해질 때까지 계속하는 방법이며, 반복법은 전체하중을 구조물에 가하고 구조물이 평형조건을 만족할 때까지 반복 계산한다. 본 논문에서는 구조물에 대한 비선형문제를 해결하기 위하여 증분법과 반복법을 조합하여 사용하였다. 전체하중을 몇 단계의 하중으로 나누고 각 하중 단계에 대해서는 Newton-Raphson 방법을 이용하였다. 반복법은 각 반복 단계마다 잉여력을 구하고 이에 대한 수렴성을 검토하게 되는데, 본 논문에서는 유한요소 영역과 경계요소 영역을 나누어 각각의 잉여력을 구하였다.

비선형 유한요소의 경우 각 요소당의 평형조건으로 부터 절점의 등가하중(equivalent force)을 식 (32)에 의하여 계산한다.

$$\{F^{eq}\}^e = \int_{\sigma^e} [B]^T \{\sigma^e\} d\Omega \quad (32)$$

여기서, $\{\sigma^e\}$ 는 계산되어진 전단계 변위로 부터 계산되는 응력이고, $\{F^{eq}\}^e$ 는 각 요소당 절점에서 생각하는 등가하중이다. 식 (33)에서 구

한 요소당 절점의 하중을 비선형 유한요소 전체에 대해 합하여 유한요소 영역의 전체 증가하중을 구한다.

$$\{F^{eq}\}_{FE} = \Sigma\{F^{eq}\}^e \quad (33)$$

여기서 $\{F^{eq}\}_{FE}$ 는 유한요소 영역 내에서의 증가하중을 나타낸다.

경계요소의 경우는 유한요소와 달리 경계요소 전체를 하나의 강성행렬로 구성하고 있으므로 유한요소에서 요소당의 증가하중을 구하는 방법으로 증가하중을 구할 수 없다. 따라서 경계요소 영역에서는 대입방법을 이용하여 경계요소 영역의 증가하중을 구한다. 대입법은 식 (34)와 같다.

$$\{F^{eq}\}_{BE} = [k]_{BE} \{u\}_{BE} \quad (34)$$

여기서 $\{u\}_{BE}$ 는 전단계의 계산된 변위이며 $\{F^{eq}\}_{BE}$ 는 증가하중이다.

식 (34)와 (35)에서 구한 경계요소 영역과 비선형 유한요소 영역의 평형력을 합하여 전체 구조체에 대한 평형력을 구한다.

$$\{F^{eq}\}_G = \{F^{eq}\}_{FE} + \{F^{eq}\}_{BE} \quad (35)$$

위에서 구한 전체 구조체의 평형력을 가해진 하중단계의 하중으로 부터 감하므로써 다음 단계의 잉여력을 구할 수 있다.

$$\{F^r\} = \{F\} - \{F^{eq}\}_G \quad (36)$$

여기서 $\{F\}$ 은 계산중인 하중단계의 가해진 하중이며, $\{F^r\}$ 은 하중단계 내에서 반복계산되는 $r+1$ 번째 잉여력을 나타낸 것으로 그림 4에서 볼 수 있다.

본 논문에서 수렴정도는 매 반복계산 마다 발생하는 변위증분 벡터 내적에 대한 전체 변위벡터 내적의 비에 의하여 계산되며, 계산된 수렴정도가 입력된 허용 오차범위 내에 들면 다음 하중단계로 넘어가게 된다.

$$\|n\| = \frac{\sqrt{\{\Delta u\} \cdot \{\Delta u\}}}{\sqrt{\{u\} \cdot \{u\}}} < \epsilon \quad (37)$$

여기서, $\{\Delta u\}$ 는 단계별 변위증분 벡터이고, $\{u\}$ 는 $\Sigma\{\Delta u\}$ 인 전체 변위벡터이다. ϵ 은 허용 오차범위를 나타낸다.

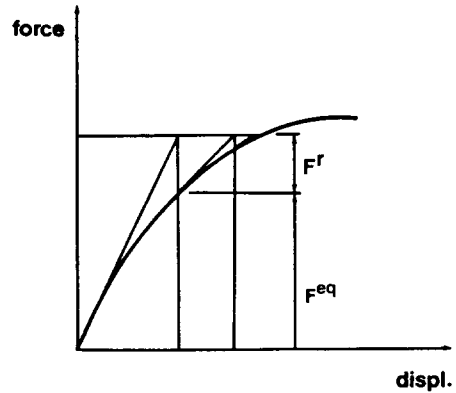


그림 4. 반복단계별 잉여력

4. 적용 및 검증

그림 5는 해석을 실시한 반무한 경계를 가진 평면변형을 상태의 동공 문제를 보여주고 있다. 동공은 중심이 표면으로부터 40m하부에 있고, 하중은 균일한 내압 30kg/m²을 받고 있다고 하였다. 지반의 조건으로는 탄성계수가 250000kg/cm²이고 포아손비가 0.15인 경우를 취하였다. 또한 지반의 항복조건으로는 Mohr-Coulomb 조건을 취하여 점착력은 30kg/cm², 마찰각은 30°로 하였다. 재료는 선형탄성-완전소성으로 소성경화는 고려하지 않았다.

유한요소 해석에 있어서는 대칭성을 고려하여 그림 6에서와 같이 전체의 1/2에 대하여, 하중의 영향이 작은 영역까지 요소망을 구성하였다. 외곽경계의 절점에서는 고정지지(fixed boundary)로 하였다. 본 논문의 경계요소 해석에는 동공 주변을 16개의 균일한 직선으로 분할하여 요소망을 구성하였다. 조합해석에서는 그림 7에서의 방법으로 구성하여 다음의 네가지 경우를 고려하였다. (1) FEBEM/1: 동공의 반경방향으로 5m의 1층 유한요소망, (2) FEBEM/2: 동공의 반경방향으로 각각 2m, 3m의 2층 유한요소망, (3) FEBEM/3: 동공의 반경방향으로 각각 2m, 3m, 5m의 3층 유한요소망, (4) FEBEM/4: 동공의 반경방향으로 각각 2m, 2m, 3m, 3m의 4

층 유한요소망. 본 논문에서 사용한 요소망에 의한 해석결과는 세밀한 요소망을 사용한 경우의 결과치에 비하여 오차가 미세하다¹⁷⁾.

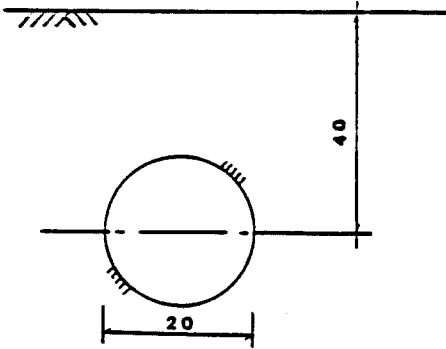


그림 5. 반무한영역내의 해석대상 (단위 m)

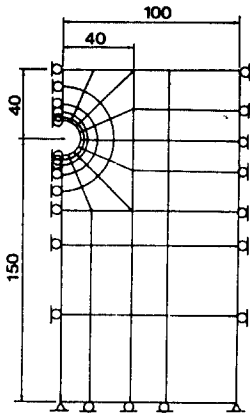


그림 6. 반무한영역 FEM 검증모형 (단위 m)

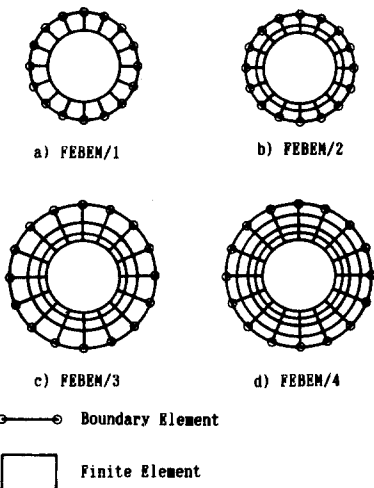


그림 7. 조합방법의 수치모형

선형해석

그림 8은 전술된 대상에 대하여 p 가 15kg/cm^2 일때 선형 해석한 결과를 비교한 것이다. 표에서 FEM의 결과에 비하여 FEBEM의 결과가 큼을 볼 수 있다. 이것은 FEM에 의한 요소망은 외곽 경계를 고정으로 한 것으로 인위 경계조건을 부여함에 따라 변위를 제약하고 있기 때문이다. FEBEM/1과 FEBEM/2의 결과에 차이가 있음은 FEBEM/1에 있어서 동일한 폭 (5m)의 유한요소 영역을 1층으로 분할함에 따라 구조의 자유도를 FEBEM/2에 비하여 상대적으로 구속하고 있기 때문에 역시 변위가 제약되었기 때문이다.

비선형해석

비선형 해석은 내압 p 가 30kg/cm^2 일때 하중단계를 0.5, 0.3, 0.2로 나누어 적용하였다. 그림 9에서 볼 수 있듯이 비선형해석에 있어서도 선형 해석에서와 마찬가지로 FEM의 결과는 경계조건의 오차, FEBEM/1의 결과는 거친 유한요소망에 의한 오차를 지니는 것을 볼 수 있다. 그러나, 조합방법을 사용하면 거친 유한요소망을 구성하여도 FEM의 결과보다 합리적인 결과가 해석됨을 알 수 있다.

그림 10은 FEM과 FEBEM에 의하여 구한 소성영역의 범위를 비교한 것이다. 해석결과에서 차이점을 볼 수 있으나 그림에서와 같이 차이가 발생하는 Gauss점에서의 응력비 α 를 비교하면 그 오차가 크지 않음을 알 수 있다.

유한요소망 영역의 영향

앞에서 유한요소망의 영역크기에 따라 해석의 결과에 차이가 있음을 보았다. 따라서, 비선형 거동의 영역이 변함에 따라 사용된 유한요소망의 영향을 분석하기 위하여 재료의 점착력을 변화시키며 해석을 실시하였다. 그림 11, 그림 12, 그림 13은 각각 점착력 C 가 27, 25, 22kg/cm^2 일 때의 비선형해석 결과이다.

그림 12에서 FEBEM/1은 발산하여 하중에 의한 평형을 찾지 못하였다. 마찬가지로 C 가 22kg/cm^2 일 때(그림 13), FEBEM/1 및 FEBEM/2

는 발산하였다. 따라서 조합방법을 사용할 때, 비선형 거동이 예상되는 충분한 영역까지 유한 요소망을 구성할 필요가 있음을 알 수 있다. 또한, C 가 감소함에 따라 FEM과 FEBEM 결과치 간의 차이가 점점 커지는 것을 볼 수 있다. 이는 소성영역이 확대됨에 따라 유한요소의 경계조건이 에너지의 재분배에 미치는 영향이 커지기 때문으로 사료된다.

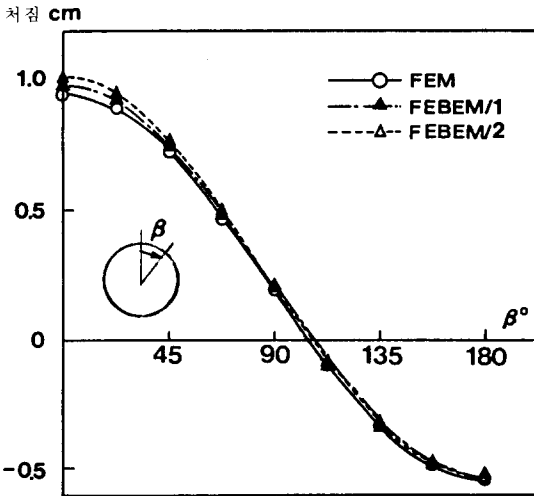


그림 8. 반무한영역 문제의 선형해석

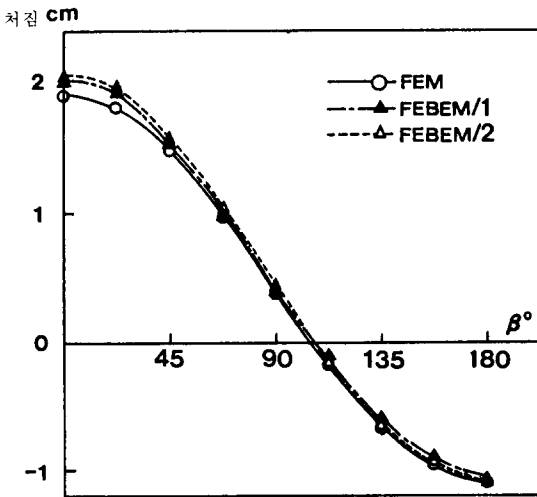


그림 9. 반무한영역 문제의 비선형해석 ($C=30\text{kg/cm}^2$)

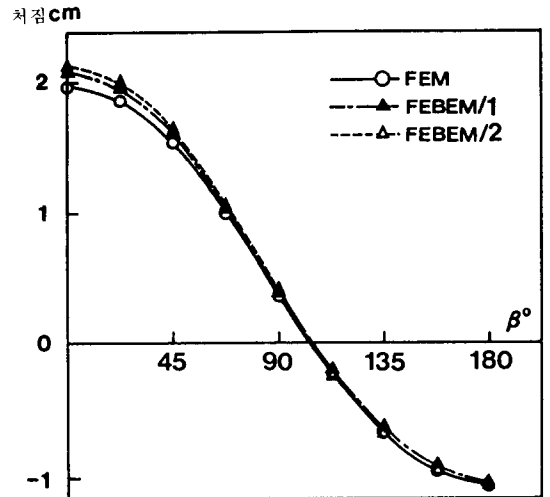


그림 10. 반무한영역 문제의 비선형해석 ($C=27\text{kg/cm}^2$)

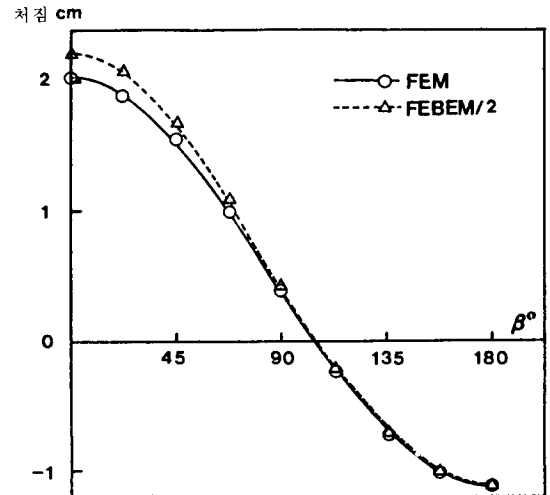


그림 11. 반무한영역 문제의 비선형해석 ($C=25\text{kg/cm}^2$)

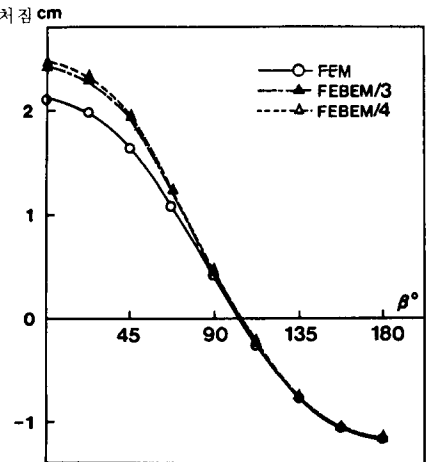


그림 12. 반무한영역 문제의 비선형해석 ($C=22\text{kg/cm}^2$)

결 론

본 연구에서는 직접경계요소법을 사용하여 비선형 유한요소법과의 조합을 실시하였다. 개발된 조합 해석의 방법을 반무한 영역을 가진 비선형 문제에 적용하여 다른 수치해석 결과와 비교한 결과, 비선형 유한요소법과 경계요소법의 조합에 의하면 이러한 문제에 대하여 경제적이고 타당성있는 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

또한, 비선형 거동의 영역이 커질수록 조합방법에 의한 해석이, 비록 거친 요소망을 구성한다 하여도, 유리함을 알 수 있다.

조합방법에서 유한요소 층수와 폭의 변화에 따른 해석 결과는 상호간에 차이가 있었다. 이는 거친 요소망의 구성에 의한 오차보다는 비선형 거동이 선형경계요소 부분까지 영향을 미치기 때문에 발생하는 오차에 기인한다고 판단되었다. 따라서, 비록 거친 요소망이라 하여도 비선형 거동이 예상되는 충분한 영역까지 유한요소를 구성함으로써 정확한 결과를 기대할 수 있다.

조합방법은 비선형유한요소법에서 하중의 영향이 적은 위치까지 요소망을 구성하고 이에 대한 비선형성 여부를고려해야 하는 불편과 이에 따른 불필요한 실행시간과 기억용량을 줄일 수 있다. 따라서, 비선형성이 국부적으로 발생하는 지하구조물 등의 구조물 해석에 적합함을 보였다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 1986년 후반기 연구비 지원에 의하여 이루어진 연구의 일부이며, 이에 한국과학재단에 깊은 감사를 드리는 바이다.

참 고 문 헌

1. Rizzo, F.J., "An integral equation approach the boundary value problems in classical elastostatics", *J. of Appl. Math.*, Vol. 25, 1967, pp. 83-95.
2. Lachat, J.C., "A further development of the boundary integral technique for elastostatics", *Thesis*, University of Southampton, 1975.

3. Banerjee, P.K., "Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three dimensional elastic solids of arbitrary shape", *Int. J. Meth. Sci.*, Vol. 18, 1976, pp. 293-303.
4. Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W. and Bettess, P., "The coupling of the finite element method boundary solution procedures", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 11, 1977, pp. 355-375.
5. Kelly, D.W., Mustoe, G.G. and Zienkiewicz, O. C., "Coupling boundary element methods with other numerical methods", Ch. 10 in *Developments in Boundary Element Methods-1*, Applied Science Publisher Ltd., London, 1979.
6. Brebbia, C.A. and Georgiou, P., "Combination of boundary and finite elements in elastostatics", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 3, 1979.
7. Mustoe, G.G. and Volait F., "A Symmetric direct integral equation method for two-dimensional elastostatics", Paper presented at 2nd *Int. Seminar on Boundary Element Methods*, Southampton, 1980.
8. Beer, G. and Meek, J.L., "A boundary finite element for underground mining applications", *New Developments in Boundary Element Method*, CML Publications, Southampton, U.K., 1980, pp. 281-294.
9. J.L. Wearing and M.A. Sheikh, "A Combined Finite Element Boundary Element Techniques for stress Analysis", *10th Int. Conference on Boundary Element, BEM-10*, Univ. of Southampton, Sept. 1988, pp. 493-597.
10. G.C. Hsiao, "The Coupling of BEM and FEM-A Brief Review", *10th Int. Conference on Boundary Element, BEM-10*, Univ. of Southampton, Sept. 1988, pp. 431-445.
11. Tels, J.C.F. and Brebbia, C.A., "Boundary element solution for half-plane problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, 1981, pp. 1149-1158.
12. Wang, C. and Liu, X., "Boundary Element Method for Semi-Infinite Region Problem", *Boundary Element VIII Conference*, 1986, pp. 237-246.
13. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.G., *Boundary element techniques*, Springer-Verlag, 1984.
14. Melan, E., "Der spannung szuatand der durch eine einzelkraft in innern beanspruchten", *Z. Angew. Math. Mech.*, 1932, Vol. 12.
15. Mindlin, R.D., "Force at a point in the interior

- of a Semi-infinite Solid", *Physics*, Vol. 7, 1936, pp. 195-202.
16. Crouch, S.L. and Starfield, A.M., *Boundary element methods in solid mechanics*, George Allen & Unwin, 1983.
17. 김문경, 임윤목, "반무한영역 문제에 대한 유한 요소와 경계요소의 조합", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제1권 1집, 1988, pp. 49-54. (접수일자 1988. 12. 20)