

이 논문은 1987년도 문교부 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구한 것임.

비틀림 진동특성을 고려한
서어보모터계의 디지털 최적제어

조 승호*

**Digital Optimal Control of Servomotor System
Considering Torsional Vibration Characteristics**

Seung-Ho Cho*

Abstract

In order to control the transient torsional vibration of rotational shaft system, the torsional stiffness of it has been taken into account in modelling the plant.

In this paper the observer and controller has been designed in two ways. One is to consider the torsional stiffness and the other is to idealize the rotational shaft as rigid body.

The third order observer considering torsional stiffness shows stable response on computer simulation. When the observer is designed on assumption of the rotational shaft being rigid body, the reduced order observer shows stable response whereas the full order observer shows unstable response.

* 홍익대학교 공과대학

NOMENCLATURE

θ_m, θ_1 : 모터, 부하의 회전각변위 rad	K _E : 서보모터의 역기전력상수
J _{m, J_1} : 모터, 부하의 관성모우멘트 kg·m ²	R : 서보모터의 전기자 저항Ω
K : 축의 비틀림 스프링 상수	L : 서보모터의 전기자 인덕턴스 H
C : 회전축계의 등가 점성감쇠계수	T _s : Time Scale sec
K _T : 서보모터의 토크상수	

1. 서 론

회전축계의 위치제어를 고속으로 행하는 경우에 발생하는 과도비틀림 진동은 회전축계를 구성하는 커플링과 축자체에 해로운 뿐만 아니라 때로는 파손의 원인이 된다.

더욱이 이러한 비틀림 진동은 위치제어 서어보계에 있어 고성능의 서어보 기술을 실현하는 데 장애가 되고 있다. DC서어보 모터를 구동장치로 사용하는 위치제어는 정보기기를 포함하여 로봇 등의 기계장치에 공통으로 이용되는 기본기술이며, 점차 높은 정확성을 피하면서 고속화시키는 방향으로 나아가고 있다. 과도 비틀림 진동은 위치제어에서 뿐만 아니라, 정지상태에서 순간적으로 일정한 속도로 기동하거나, 일정한 속도에서 순간적으로 정지하는 속도제어의 경우에 있어서도 최근 중요한 과제로 되어있다.

회전축의 비틀림 진동을 능동제어의 입장에서 고찰한 것으로는 野波健藏⁽¹⁾의 연구가 있다.

그는 회전축계의 속도제어를 하는 경우 기동·정지시 발생하는 비틀림 진동을 최적제어의 입장에서 고찰하였다. 회전축계의 위치제어시 발생하는 진동을 제어하는 방식으로는 山田⁽²⁾의 연구가 있다. 그러나 이는 시변(time varying) 피이드백 구조로 되어 있어 구성이 복잡하게 되고 최대비틀림각이 크다는 난점이 있다.

국내의 연구로서 박영필⁽³⁾⁽⁴⁾은 기준모델을 설정하여 비틀림 진동을 제어하고 있다.

본 연구에서는 제어대상 플랜트를 모델링하는

데 있어 회전축의 탄성을 고려하였으며, 제어기 및 관측기를 설계하는 데 있어서는 탄성을 고려한 경우와 강체로 이상화킨 경우에 대하여 각각 검토하였다. 그 이유는 동일한 제어대상 플랜트에 대하여 어느방식의 제어기 및 관측기를 사용하는 것이 효과적인가를 조사하기 위함이다. 그 과정에서 모델링되지 않은 동특성(unmodelled dynamics), 관측기 고유치의 영향등을 연구하였다. 소프트웨어 방식으로 제어기 및 관측기를 설계할 경우 연산시간의 문제로 제어대상 플랜트를 간단한 모델로 이상화 시켰을 때 발생하는 문제점들을 규명할 필요가 있기 때문이다.

아울러 관측기를 설계할때 모든 상태변수들을 추정하는 총차수(fullorder) 관측기와 측정가능한 출력은 제외시키고 나머지 상태변수들을 추정하는 축소차수(reduced order) 관측기를 비교하였다. 그리고 제어기에서 상태변수들의 최적피이드백 이득값은 리카티(Riccati)방정식의 정상상태해를 이용하였다. 컴퓨터 시뮬레이션 방식에 의하여 위에서 열거한 경우들에 대하여 고찰하였다.

2. 이론해석

2.1 해석모델과 기초방정식

위치제어를 고속으로 하기 위하여는 부하계의 기계적인 전동특성을 고려할 필요가 있다.

본 연구에서 해석할 위치제어 서보계가 Fig.1에 도시되어 있다. 구동장치에는 DC 서보모터를

사용한다. 모터와 부하의 관성모멘트를 각각 J_m, T_v , 회전각을 θ_m, θ_l 그리고 J_m 축에 구동 토크 T 를 가한다. 회전축의 굽힘(bending)은 무시하고 비틀림(torsion) 강성만을 고려한다.

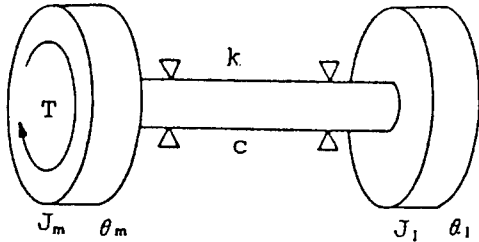


Fig. 1 Rotational System model

아울러 마찰은 점성마찰만을 고려하고 스틱션(stiction)과 쿨롬마찰(coulomb friction)은 무시하였다. DC 서어보모터의 전기자 저항, 인덕턴스, 역기전력상수 그리고 토크상수를 고려하여 전기계를 모델링 하였다.

$$\left\{ \begin{array}{l} J_l \ddot{\theta}_l = c \dot{\theta}_l - k (\theta_l - \theta_m) \\ J_m \ddot{\theta}_m = T - k (\theta_m - \theta_l) \\ L \frac{di}{dt} + Ri + K_E \dot{\theta}_m = e \\ K_T i = T \end{array} \right. \dots\dots\dots(1)$$

상태변수를 설정하는 것은 제어대상 플랜트의 동특성을 조사하는데 있어 구체적인 제어대상을 정하는 일로써, 본연구에서는 부하의 회전각변위 θ_l , 회전축의 비틀림각변위 $\theta_l - \theta_m$ 그리고 각각에 대한 미분치들을 상태변수로 설정하였다.

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T = [\theta_l, \dot{\theta}_l, \theta_l - \theta_m, \dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m]^T \dots\dots\dots(2)$$

DC서어보모터의 시정수가 부하계의 시정수에 비하여 매우 작으므로 그 동특성을 비례요소로 이상화시켜 전체 시스템에 대한 무차원화된 상태방정식을 유도하면 식(3.a)와 같다. 그리고 출력방정식은 식(3.b)와 같다.

$$x(\tau) = A_c x(\tau) + B_c u(\tau) \dots\dots\dots(3.a)$$

$$y(\tau) = C^T x(\tau) \dots\dots\dots(3.b)$$

단, $x(\tau) = [x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau)]^T$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & \frac{-\Omega^2}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\eta + \beta & -\Omega^2 & -\beta \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

그리고 무차원변수들의 표현식들은 아래와 같다.

$$x_1 = \frac{\theta_l}{\theta_o}, x_2 = \left(\frac{T_s}{\theta_o}\right) \frac{d\theta_l}{d\tau}, x_3 = \frac{\theta_l - \theta_m}{\theta_o}$$

$$x_4 = \frac{T_s}{\theta_o} \frac{d(\theta_l - \theta_m)}{d\tau}, \tau = \frac{t}{T_s}, u = \frac{K_T T_s^2 e}{(R J_m \theta_o)}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{K(J_m + J_l)}{J_m J_l}} T_s, \alpha = \frac{J_l}{J_m}, \eta = \frac{c T_s}{J_l}$$

$$\beta = \frac{K_T T_s K_E}{J_m R}$$

다음에는 Fig.1에 도시된 회전축계를 강체(rigid body)로 이상화시켜 모델링하였다.

회전축의 직경이 충분히 크거나 느린운동의 경우에는 강체모델이 타당하며 아울러 상태방정식의 차수가 낮으므로 제어기-관측기의 구성이 간단하다. 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(\tau) \\ \dot{x}_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_T T_s K_E}{J_l R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) \dots\dots\dots(4)$$

단, $x(\tau) = [x_1(\tau), x_2(\tau)]^T = [\dot{\theta}_l(\tau), \theta_l(\tau)]^T$

$$u(\tau) = \frac{K_T T_s^2}{J_l \theta_o R} e(\tau), J_l = J_m + J_l$$

2.2. 디지털 최적제어이론의 적용

2.2.1 제어기

상태방정식 (3. a)와 출력방정식(3. b)를샘플링 주기 T의 이산시간(discrete-time)계로 변환하면

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

단, $A = \exp[A_c T]$

$$b = \int_0^T \exp[A_c \tau] d\tau \cdot B_c$$

$$y(k) = C^T x(k) \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

와 같이 된다. 그리고 평가함수식을 (6)식과 같이 놓았을 때 디지털 최적제어이론에 의하여 리카티(Reccati) 방정식(식7) 및 최적제어피드백입력(식8)이 구해진다⁽⁷⁾.

$$J = \sum_{k=0}^N \{x^T(k) Qx(k) + u^T(k) Ru(k)\} \dots\dots(6)$$

$$P(k) = Q + A^T P(k+1) [I + BR^{-1} B^T P(k+1)]^{-1} A \dots\dots(7)$$

단, $P(N) = 0$

$$u(k) = -K x(k) \dots\dots\dots(8)$$

단, $K = R^{-1} B^T (A^T)^{-1} (P(k) - Q)$

이때의 u(k)는 레귤레이터(regulator)로 구성하였을 때의 입력이며 트래킹(tracking)방식일 경우 $u(k) = r - kx(k)$ 형태로 된다. 본 연구에서는 레귤레이터가 큰 의미가 없어 트래킹 방식으로 제어계를 구성하였다.

그리고 리카티방정식의 정상상태 해를 사용하

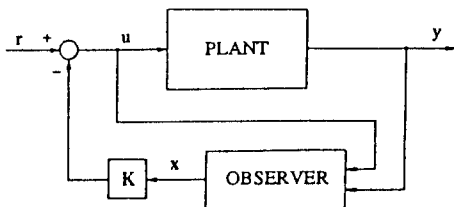


Fig.2 Oberver-based control system

여 피이드백 이득 벡터 k를 결정하였다. 관측기를 사용하여 제어대상 플랜트를 제어하는 과정이 Fig.2에 도시 되어있다.

2.2.2 관측기

위에서 유도한 제어법칙은 모든 상태변수들은 피이드백시키는 구조로 되어 있으므로, 상태변수들을 측정하였거나 혹은 관측기를 사용하여 추정해야 한다.

본 연구에서 후자의 방식을 택하여, 모든 상태변수들을 관측기에서 추정하는 총차수(full order) 관측기와 출력을 제외한 나머지 상태변수들을 추정하는 축소차수(reduced order)관측기를 각각 구성하였다⁽⁸⁾.

총차수 관측기 :

$$q(k+1) = (A - GC) q(k) + Gy(k) + Bu(k) \dots\dots\dots (9)$$

축소차수 관측기 :

$$q_b(k+1) = (A_{b \ b} - GA_{a \ b}) q_b(k) + Gy(k+1) + (A_{b \ a} - GA_{a \ a}) y(k) + (B_b - GB_a) u(k) \dots\dots\dots(10)$$

단,

$$A = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix}$$

$$\text{총차수관측기 : } \alpha_e(z) = |zI - (A - GC)| \dots\dots\dots (11 a)$$

$$\text{축소차수관측기 : } \alpha_e(z) = |zI - (A_{bb} - GA_{bb})| \dots\dots\dots (11 b)$$

관측기의 이득(gain)G를 결정하는 데는 제어대상 플랜트의 동특성을 고려하는 것이 필수적이며, 본 연구에서는 (11)식과 같은 특성방정식을 기준으로 Ackermann공식(12식)을 이용하여 G값을 구하였다.

$$G = \alpha_e(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 컴퓨터 시뮬레이션 및 고찰

컴퓨터 시뮬레이션 절차는 다음과 같다. 연속 시간 상태방정식을 이산시간 상태방정식으로 변환한 후 디지털 최적제어 이론을 적용시켜 최적 상태변수 피이드백 이득값을 구한다.

다음에는 Ackermann공식을 이용하여 관측기 이득을 구한다. 제어대상 플랜트를 4차로 놓고 관측기는 회전축의 단성을 고려한 경우와 회전축을 강제로 이상화한 경우로 나누어 검토한다.

시뮬레이션 사용한 파라메타값들이 Table 1에 도시되어 있다.

Table 1. Parameter specifications of the control mechanism

Symbol	Physical meaning	Value
J_l	Polar mass moment of inertia of load	$1.25 \times 10^{-1} \text{ Kg m}^2$
J_m	Polar mass moment of inertia of motor	$1.25 \times 10^{-1} \text{ Kg m}^2$
k	Stiffness	5.0 Nm/rad
c	Damping Coefficient	$5.0 \times 10^{-4} \text{ Nms/rad}$
K_T	Torque Constant	0.261 Nm/A
K_b	Back EMF Constant	0.261 Vs/rad
R	Resistance	47.06Ω
L	Inductance	0.2 H
T_s	Time scale	0.01 sec
T	Sampling time	0.03 sec

아울러 위에 기술한 경우에 대한 시뮬레이션 절차가 Fig. 3에 도시되어 있다.

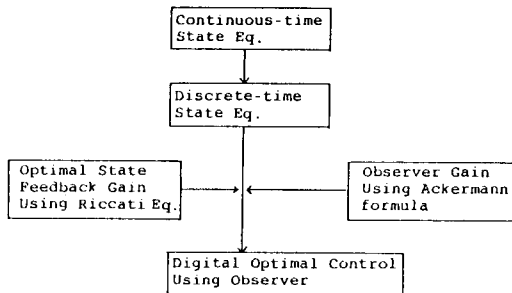


Fig. 3 Procedure for Computer Simulation

가중치행렬 $R=1.0$ 으로 고정시키고 Q 의 변화를 주어 리카티방정식의 정상상태해를 구하였다.

Q 의 명칭을 Q_1, Q_2, Q_3 로 붙이고 나열하면 아래와 같다.

1) 4 차의 경우

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

2) 2 차의 경우

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

여기에서 구한 최적상태변수 피이드백 이득과 Ackermann공식을 이용하여 구한 관측기 이득이 Table 2와 Table 3에 각각 열거되어 있다.

Table 2. Optimal State Feedback Gains

Plant	Q & K Matrix	Q	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}
4th Order	Q_1	6.159 E-01	5.720 E-02	2.839 E-01	-2.999 E-02	
	Q_2	3.158 E-01	4.703 E-02	2.725 E+00	-1.172 E-02	
	Q_3	4.208 E-02	4.253 E-02	3.661 E+00	-2.954 E-04	
2nd Order	Q_1	6.767 E-01	6.084 E-02			
	Q_2	5.327 E-01	7.498 E-02			
	Q_3	9.256 E-02	9.414 E-02			

Table 3. Observer's Gain

G&Eigen Values Plant	Eigenvalue of Observer	G ₁₁	G ₁₂	G ₃₁
4 th Order	0.1	-4.252E +01	1.098E +00	-9.815E +01
2nd Order	0.9	1.822E -01	2.272E -01	
	0.1	2.967E +01		

Table 3에서 4차시스템의 관측기 고유치 0.1에 해당하는 축소치수 관측기의 특성방정식은 $(z-0.1)^3=0$ 으로 표현되고 2차시스템의 관측기 고유치 0.9, 0.1에 총치수 및 축소치수 관측기의 해당하는 특정 방정식은 각각 $(z-0.9)^2=0$, $(z-0.1)=0$ 이다.

비틀림진동특성이 고려된 4차의 제어대상 플랜트를 제어하기 위하여 관측기는 3차(reduced order) 혹은 4차(full order)가 되어야 한다. 그러나 관측기의 차수가 크면 디지털컴퓨터에서의 연산시간이 많이 걸리므로 아날로그방식이 아닌 디지털방식인 경우에 그 실현성이 문제가 된다. 따라서 본 연구에서는 제어대상플랜트를 강체(rigid body)로 가정 한 상태에서 관측기를 1차(reduced order) 혹은 2차(full order)로 구성하여 이를 4차 플랜트의 제어에 이용하는 문제도 검토한다.

제어대상플랜트를 4차, 관측기를 3차로 놓은 상태에서 가중행렬 Q의 변화가 과도응답특성에 미치는 영향이 Fig. 4에 되시되어 있다. 가중치가 커질수록 감쇠현상이 두드러진다.

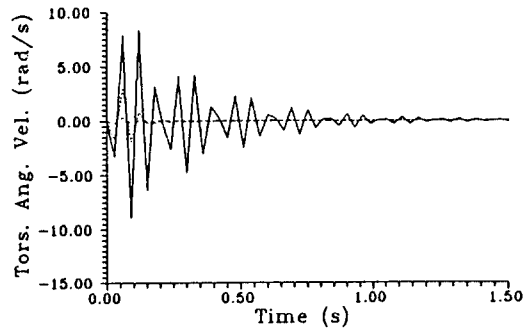
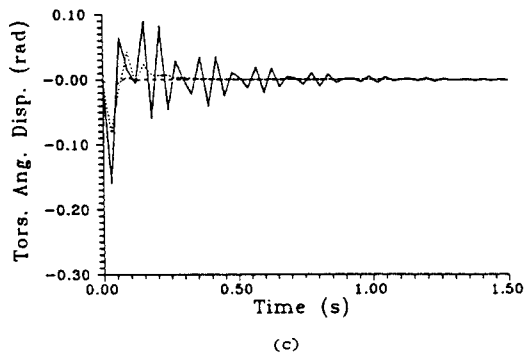
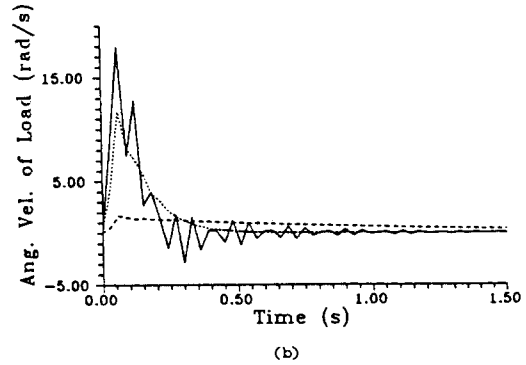
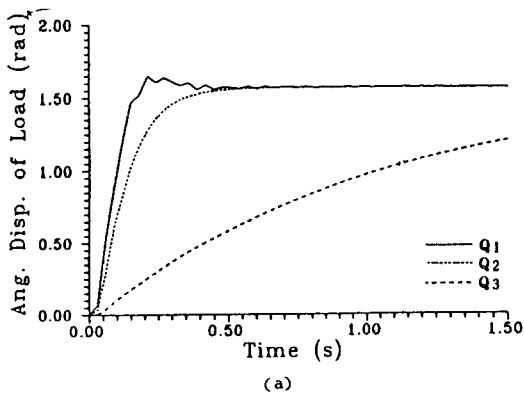


Fig. 4 Responses using the third observer

Q=Q1일때 상대변수들을 직접 피이드백 시킨 경우와 3차의 관측기를 사용한 경우가 Fig. 5에 도시되어 있다. 이로부터 본 연구에서 채택한 관측기 고유치가 적합함을 알 수 있다.

제어대상플랜트를 강체로 놓고 1차의 관측기로서 제어한 경우와 4차플랜트를 3차의 관측기로서 제어한 경우가 Fig. 6에 도시되어 있다. 후자의

경우 과도응답 상태에서 미소한 리플(ripple)현상이 발생하였다.

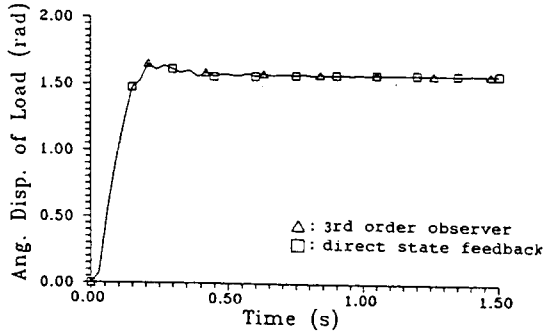


Fig. 5 Comparison of responses between using the third order observer and direct state feedback

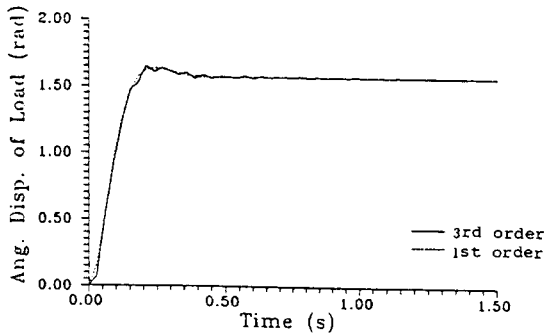


Fig. 6 Comparison of responses between using the third order observer and the first order observer

제어대상플랜트를 4차, 관측기를 강제모드에서 구한 2차(full order)로 하였을때의 응답특성이 Fig. 7에 도시되어 있다. 관측기의 고유치가 원점 가까이 있을수록 불안정한 응답을 나타내고 있다. 특히 관측기의 고유치를 0.9로 놓고 가중행렬 Q를 변화시키면서 응답특성을 구한것이 Fig. 8에 도시되어 있다. 강제모드에서 구한 2차 관측기를 사용하여 비틀림진동을 제어하는 적합치 못함을 알 수 있다.

제어대상플랜트를 4차, 관측기를 강제모드에

서 구한 1차(reduced order)로 하였을 때의 응답 특성이 Fig. 9에 도시되어 있다. 가중행렬 Q의 변화에 따라 과도응답 특성이 결정된다.

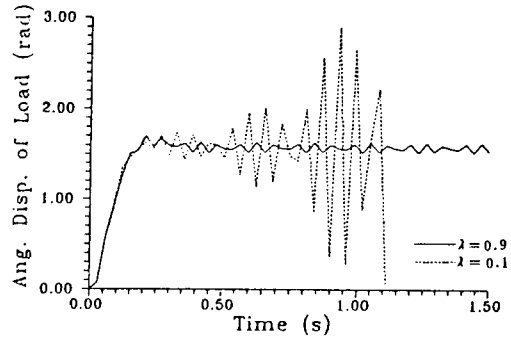


Fig. 7 Responses with the second order observer according to the change of observer eigenvalue

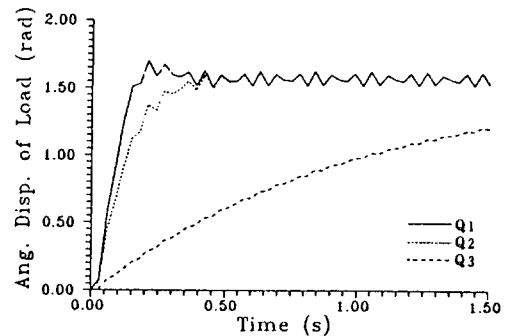
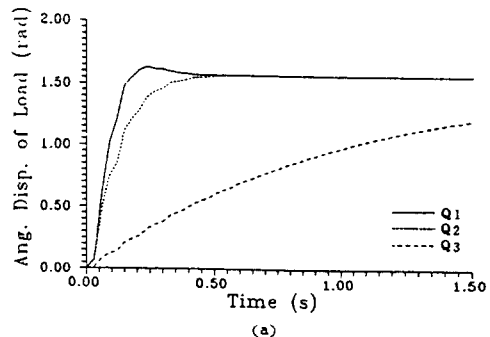


Fig. 8 Responses using the second order observer



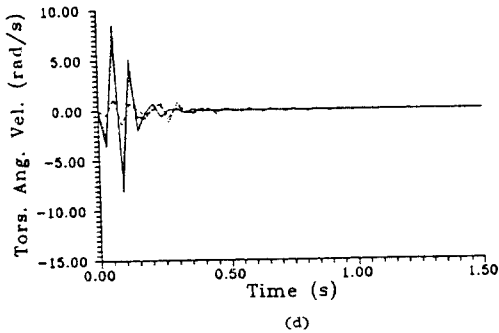
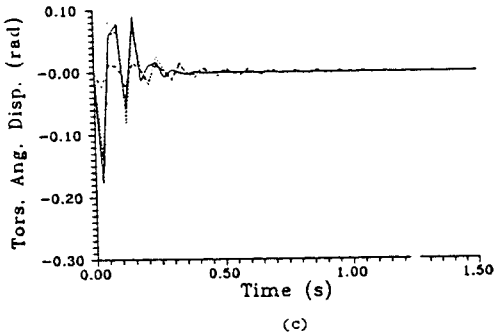
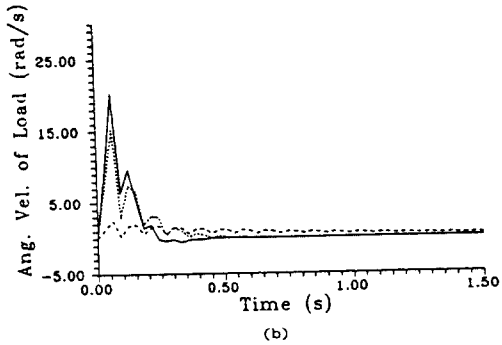


Fig. 9 Responses using the first order observer

4. 결론

비틀림 진동특성을 고려하여 회전축계의 위치 제어를 수행하는 데 소프트웨어 서보방식을 채택하였다. 관측기 및 제어기를 소프트웨어 방식으로 구성할때 탄성을 고려하는 경우와 강제로 가정한 경우로 나누어 검토하였으며 본 연구에서

얻은 결론은 아래와 같다.

(1) 제어대상 플랜트를 4차 시스템으로 놓고 탄성을 고려하여 3차의 축소차수 관측기를 설계하였을 때 안정한 응답을 얻을수 있었다.

(2) 제어대상 플랜트를 4차 시스템으로 놓고 4개의 상태변수들을 직접 측정하여 피이드백 시키는 경우에 대하여 시뮬레이션 한 결과 탄성을 고려한 3차의 축소차수 관측기를 이용하였을 때의 동일한 결과가 얻어졌다. 따라서 상태변수들을 측정하는 노력을 경감시킬수 있다.

(3) 강제로 가정하여 관측기를 설계하는 경우 2차의 총차수 관측기 와 1차의 축소차수 관측기로 나누어 검토하였다. 제어대상 플랜트를 4차 시스템으로 놓았을 때 총 차수 관측기에서는 불안정한 응답을 나타낸 반면 축소차수 관측기에서는 안정한 응답을 얻을 수 있었다. 이는 모델링 되지 않은 동특성의 영향이며 이에 대한 해석적인 연구가 앞으로의 과제이다.

參 考 文 獻

- (1) 野波健藏, 東成昭, 戸谷隆美 “回轉軸系の起動・停止時のねじり振動制御,” 日本機械學會論文集 (C編), 51卷 463號, pp. 535~543, 1985.
- (2) 出田・中川, “機械的な振動特性を考慮したサーボモタ系の位置決め制御”, 計測自動制御學會論文集, 18-1, pp. 84~91, 1982.
- (3) 박영필외 3인, “모델추종에 의한 기동시 회전축의 비틀림진동제어”, 대한기계학회 '88년도 추계학술대회 초록집, pp. 346~351, 1988.
- (4) 박영필외 3인, “유연한 회전축계의 기동·정지시 비틀림진동제어”, 대한기계학회 '89년도 춘계학술대회 초록집, pp. 221~226, 1989.
- (5) Mark J. Balas, “Feedback Control of Flexible Systems”, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-23, PP. 673~679, 1978.

- (6) D. Luenberger, "An Introduction to observers" IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-16, PP. 596~602.
- (7) James A. Cadzow and Hinrich R. Martens, "Discrete-Time and Computer Control Systems", Prentice-Hall, PP. 302~306, 1970.
- (8) Charles L. Phillips and H. Troy Nagle, Jr., "Digital Control System Analysis and Design", Prentice-Hall, PP. 288~296, 1984.