

L-형 절곡판의 고유진동수 해석

이길우\*, 정강\*\*

Natural Frequency of L-type Folded Plate

Kil Woo Lee,\* Kang Chung\*\*

Abstract

The frequency equation and numerical process of natural frequencies for several boundary conditions of L-type folded plate given to the different thickness and length are derived by using Rayleigh-Ritz method in this study. Those natural frequencies are attained by choosing the proper eigenfunction for boundary conditions of x-direction and y-direction beams, by considering the convergence of numerical results.

Key Words : Folded Plate(절곡판), Minimum Total Energy Principle (최소전체에너지 원리), Eigenvalue Problem(고유치 문제), Cranked Beam(절곡보), Frequency Equation(진동수 방정식)

\* 홍익 대학교 기계설계학과

\*\* 홍익 대학원 기계공학과

# 1. 서 론

평판(plate)은 많은 산업분야에서 하나의 중요한 구조물 구성요소로서 널리 이용되어 왔다. 특히 구조물에서 절곡 판(folded plate)은 자동차, 조선, 항공 및 우주산업 등 많은 산업분야에서 널리 이용되고 있는 구조물 구성요소로서 정적 및 동적 문제에 있어서의 기본 데이터, 즉 강성 계수와 고유진동수 등과 같은 데이터에 대한 보다 엄밀한 해석이 요구되고 있다. 그렇기 때문에 현재 이에 관한 많은 연구논문들이 발표되고 있다.

먼저 평판(plate)의 진동에 관한 연구논문을 살펴보면, 1951년 Hidaka, K., 1953년 Nishimura, T., 1955년 Abramowitz, M.<sup>1)-3)</sup> 등은 F.D.M을 이용하여 모든 변(edge)이 고정(clamped)조건인 평판(plate)에 대한 진동해석을 하였고, 1947년 Galin, M. p., 1952년 Munakata, K., 1957 Stanistic, M., 1963년 Aynola, L.<sup>4)-7)</sup> 등은 Galerkin 방법을 이용하여 평판(plate)에 대한 진동해석을 하였으며, 1950년 Young, D.<sup>8)</sup>, 1953년 Nagaraja, J.<sup>9)</sup>, 1954년 Warburton, G. B.<sup>10)</sup> 등은 Rayleigh 또는 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 진동해석을 하였다.

그러나, 절곡 판(folded plate)에 대한 진동해석 논문은 거의 미진한 상태로 최근에 와서야 1982년 Guyader, L.<sup>11)</sup> 등은 연성판(coupled plate)에 대한 진동에너지 전달(transmission)에 대하여 연구하였고, 1985년 Nakahira, N.<sup>12)</sup> 등은 판(plate) 구조물에 대하여 Newmark 방법을 이용함으로써 수치적으로 진동해석을 하였으며, 좀 더 구체적인 절곡 판(folded plate)에 대한 진동해석 논문으로서는 1984년 Irie, T.<sup>13)</sup> 등의 Ritz 방법을 이용한 일정두께의 외팔 경계조건하에서의 절곡판(folded plate)에 대한 자유진동 해석논문 정도가 있을 따름이다.

그래서, 본 논문에서는 두께 및 길이가 서로 다른 L-형 절곡 판(L-type folded plate)을 모델로 설정하여 Love이론<sup>14)</sup>에 입각한 최대 변형에너

지 및 최대운동에너지를 해석적으로 평가하고, Rayleigh-Ritz방법을 이용함으로써 각각의 경계조건(boundary condition)에 따른 진동수방정식(frequency equation)을 유도하였으며, 하나의 예로서 각각의 경계조건(boundary condition)중 x방향 고정-고정(clamped-clamped), y방향 고정-고정(clamped-clamped)을 선정하여 형상비에 따른 고유진동수를 수치적으로 해석하였다.

# 2. Rayleigh-Ritz 방법의 이용

Fig. 1에 나타낸 바와 같이 해석모델은 길이가 a, 폭이 b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, 두께가 h<sub>1</sub>, h<sub>2</sub>인 L-형 절곡 판이며, 국부직교(local Cartesian) 좌표를 취하였다.

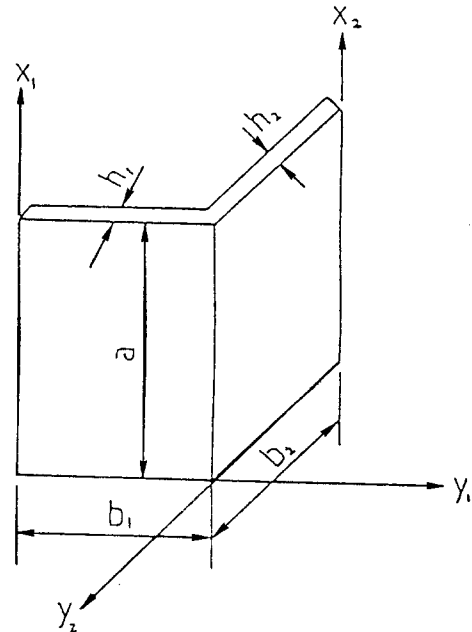


Fig. 1 Geometry of Folded Plate

이와 같은 절곡 판의 최대 변형에너지는 Love이론에 입각하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 D_i \int_0^{b_1} \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) \right]^2$$

$$+ 2 \nu \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big]_1 dx_1 dy_1 \dots \dots \dots (1)$$

또한, 최대운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \sum_{i=1}^2 h_i \int_0^{b_i} \int_0^a W_i^2 dx_1 dy_1 \dots (2)$$

여기서,  $D_1$ 과  $D_2$ 는 굽힘강성 (flexural rigidity) 으로서  $D_1 = Eh_1^3/12(1-\nu^2)$ ,  $D_2 = Eh_2^3/12(1-\nu^2)$  이고,  $E$ 는 탄성계수,  $\nu$ 는 포와송 비,  $\rho$ 는 밀도,  $\omega$ 는 각 진동수 (angular frequency) 이다.

판 (plate) 의 처짐함수  $W_1$ 는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$W_1(x_1, y_1) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mm} X_m(x_1) Y_n^{(1)}(y_1) \dots \dots \dots (3)$$

여기서,  $X_m(x_1)$ ,  $Y_n(y_1)$ 는 각각  $x$  방향 및  $y$  방향의 경계조건 (boundary condition) 을 만족시키는 변위함수이고,  $A_{mm}$ 은 미정계수이다.

그리고, 최소 전체에너지 원칙 (minimum total energy principle) 에 의하여 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{\partial V}{\partial A_{k\ell}} - \frac{\partial T}{\partial A_{k\ell}} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, M : \ell=1, 2, \dots, N) \dots \dots \dots (4)$$

식(3)을 식(1)과 식(2)에 대입하고, 식(4)에 대하여 풀면,

$$D_1 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mm} \left[ \int_0^{b_1} \int_0^a \left\{ X_m'' X_k'' Y_n Y_\ell + X_m X_k Y_n'' Y_\ell'' + \nu (X_m'' X_k Y_n Y_\ell'' + X_m X_k'' Y_n'' Y_\ell) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) X_m' X_k' Y_n' Y_\ell' \right\} dx_1 dy_1 + \alpha^3 \int_0^{b_2} \int_0^a \left\{ X_m'' X_k'' Y_n Y_\ell + X_m X_k Y_n'' Y_\ell'' + \nu (X_m'' X_k Y_n Y_\ell'' + X_m X_k'' Y_n'' Y_\ell) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) X_m' X_k' Y_n' Y_\ell' \right\} dx_2 dy_2 - \rho \omega^2 h_1 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mm} \left[ \int_0^{b_1} \right. \right]$$

$$\left. \int_0^a (X_m X_k Y_n Y_\ell)_{(1)} dx_1 dy_1 + \alpha \int_0^{b_2} \int_0^a (X_m X_k Y_n Y_\ell)_{(2)} dx_2 dy_2 \right] = 0 \dots \dots \dots (5)$$

여기서,  $\alpha$ 는  $h_2/h_1$ 이고,  $X'', Y'' \dots$  등은 각각  $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ ,

$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \dots$  등을 나타낸 것이다.

한편,  $X_m, Y_n$ 의 직교성 (orthogonality) 으로부터

$$\int_0^a X_m X_k dx = a, \quad (m=k) \text{ o}, \quad (m \neq k) \\ \int_0^a X_m'' X_k'' dx = km^4/a^3, \quad (m=k) \text{ o}, \quad (m \neq k) \\ \int_0^{b_1} (Y_n Y_\ell)_1 dy_1 = b_1, \quad (n=\ell) \text{ o}, \quad (n \neq \ell) \\ \dots \dots \dots (6) \\ \int_0^{b_2} (Y_n Y_\ell)_2 dy_2 = \gamma_n^2 b_2, \quad (n=\ell) \text{ o}, \quad (n \neq \ell) \\ \int_0^{b_1} (Y_n'' Y_\ell')_1 dy_1 = k_n^4/b_1^3, \quad (n=\ell) \text{ o}, \quad (n \neq \ell) \\ \int_0^{b_2} (Y_n'' Y_\ell'')_2 dy_2 = \gamma_n^2 \beta^4 k_n^4/b_2^3, \quad (n \neq \ell) = \\ = 0, \quad (n \neq \ell)$$

( $\gamma_n$ :  $y_2$  방향판의  $y_1$  방향판에 대한 상당계수,  $k_m, k_n$ : 각각  $x$  방향,  $y$  방향에 대한 보의 고유치,  $\beta = b_2/b_1$ ) 관계가 성립하며,

$$E_{mk} = a \int_0^a X_m X_k'' dx, \\ E_{km} = a \int_0^a X_m'' X_k dx, \\ (F_{n\ell})_1 = b_1 \int_0^{b_1} (Y_n Y_\ell'')_1 dy_1 \\ (F_{n\ell})_2 = b_2 \int_0^{b_2} (Y_n Y_\ell'')_2 dy_2, \\ (F_{\ell n})_1 = b_1 \int_0^{b_1} (Y_n'' Y_\ell)_1 dy_1, \dots \dots \dots (7) \\ (F_{\ell n})_2 = b_2 \int_0^{b_2} (Y_n'' Y_\ell)_2 dy_2 \\ G_{mk} = a \int_0^a X_m' X_k' dx,$$

$$(D_{n\ell})_1 = b_1 \int_0^{b_1} (Y'_n Y'_\ell)_1 dy_1,$$

$$(D_{n\ell})_2 = b_2 \int_0^{b_2} (Y'_n Y'_\ell)_2 dy_2$$

라 하고  $\beta = b_2/b_1$ 라 하면, 식(5)는  $m=k$   $n=\ell$ 인 경우

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mm} \left[ \frac{k_m^4}{a^3} b_1 (1 + \gamma_n^2 \alpha^3 \beta) + a \frac{k_m^4}{b_1^3} (1 + \gamma_n^2 \alpha^3 \beta) + \frac{2\nu}{ab_1} E_{mm} \left\{ (F_{nn})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (F_{nn})_2 \right\} + \frac{2(1-\nu)}{ab_1} G_{mm} \left\{ (D_{nn})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (D_{nn})_2 \right\} - \frac{\rho h_1 \omega^2}{D_1} ab_1 (1 + \gamma_n^2 \alpha \beta) \right] = 0 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$m \neq k$  또는  $n \neq \ell$ 인 경우

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mm} \left[ \frac{\nu}{ab_1} \left\{ \left\{ (F_{n\ell})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (F_{n\ell})_2 \right\} E_{km} + \left\{ (F_{\ell n})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (F_{\ell n})_2 \right\} E_{mk} \right\} + 2(1-\nu) \frac{1}{ab_1} G_{mk} \left\{ (D_{n\ell})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (D_{n\ell})_2 \right\} \right] = 0 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

결국, 식(8)과 식(9)로부터 고유치 문제(eigen problem)는 다음과 같이 된다.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[ C_{mn}^{(k\ell)} - \lambda^2 (1 + \gamma_n^2 \alpha \beta) \delta_{mn} \right] A_{mn} = 0$$

( $k=1, 2, \dots, M; \ell=1, 2, \dots, N$ ) .....

여기서,  $\lambda^2 = \omega^2 \rho h_1 a^3 b_1 / D_1$

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= 1 \quad (m=k, \quad n=\ell) \\ &= 0 \quad (m \neq k \quad \text{또는} \quad n \neq \ell) \end{aligned}$$

$C_{mn}^{(k\ell)}$ 은

(1)  $m=k, \quad n=\ell$ 인 경우

$$C_{mn}^{(mn)} = \frac{b_1}{a} k_m^4 (1 + \gamma_n^2 \alpha^3 \beta) + \left( \frac{a}{b_1} \right)^3 k_m^4 (1 + \gamma_n^2$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 \beta) + 2\nu \frac{a}{b_1} E_{mm} \left\{ (F_{nn})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (F_{nn})_2 \right\} + 2(1-\nu) \frac{a}{b_1} G_{mm} \left\{ (D_{nn})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (D_{nn})_2 \right\} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

(2)  $m=k, \quad n \neq \ell$ 인 경우

$$\begin{aligned} C_{mn}^{(m\ell)} &= \nu \frac{a}{b_1} E_{mm} \left\{ (F_{n\ell})_1 + (F_{\ell n})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} \left\{ (F_{n\ell})_2 + (F_{\ell n})_2 \right\} \right\} + 2(1-\nu) \frac{a}{b_1} G_{mm} \left\{ (D_{n\ell})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (D_{n\ell})_2 \right\} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

(3)  $m \neq k, \quad n=\ell$ 인 경우

$$\begin{aligned} C_{mn}^{(kn)} &= \nu \frac{a}{b_1} (E_{km} + E_{mk}) \left\{ (F_{nn})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (F_{nn})_2 \right\} + 2(1-\nu) \frac{a}{b_1} G_{mk} \left\{ (D_{nn})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (D_{nn})_2 \right\} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

(4)  $m \neq k, \quad n \neq \ell$ 인 경우

$$\begin{aligned} C_{mn}^{(k\ell)} &= \nu \frac{a}{b_1} \left\{ E_{km} \left\{ (F_{n\ell})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (F_{n\ell})_2 \right\} + E_{mk} \left\{ (F_{\ell n})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (F_{\ell n})_2 \right\} \right\} + 2(1-\nu) \frac{a}{b_1} G_{mk} \left\{ (D_{n\ell})_1 + \frac{\alpha^3}{\beta} (D_{n\ell})_2 \right\} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

### 3. 변위함수

(1) x-방향의 각각의 경계조건에 따른 고유함수 ( $X_m$ )

(i) 고정-고정 보(clamped-clamped beam)

$$X_m = \cosh \frac{k_m}{a} x - \cos \frac{k_m}{a} x - \sigma_m \left( \sinh \frac{k_m}{a} x - \sin \frac{k_m}{a} x \right) \dots\dots\dots (15)$$

(ii) 고정-자유 보(clamped-free beam)

$$X_m = \cosh \frac{k_m}{a} x - \cos \frac{k_m}{a} x - \sigma_m (\sinh \frac{k_m}{a} x - \sin \frac{k_m}{a} x) \dots \dots \dots (16)$$

(iii) 자유-자유 보 (free-free beam)

$$X_1 = 1 \dots \dots \dots (17a)$$

$$X_2 = \sqrt{3} (1 - 2x/a) \dots \dots \dots (17b)$$

$$X_m = \cosh \frac{k_m}{a} x + \cos \frac{k_m}{a} x - \sigma_m (\sinh \frac{k_m}{a} x + \sin \frac{k_m}{a} x), \quad (m=3, 4, 5, \dots) \dots \dots \dots (17c)$$

여기서,  $k_m$ 과  $\sigma_m$ 의 값은 Table 1에 나타낸 바와 같다.

(2) y-방향 (cranked beam)의 각각의 경계조건에 따른 고유함수 ( $Y_n$ )

절곡보 (cranked beam)의 고유함수 일반형은 다음과 같다.

$$Y_n^{(1)}(y_1) = \gamma_1^{(1)} \sin \frac{k_n^{(1)}}{b_1} y_1 + \gamma_2^{(1)} \cos \frac{k_n^{(1)}}{b_1} y_1 + \gamma_3^{(1)} \sinh \frac{k_n^{(1)}}{b_1} y_1 + \gamma_4^{(1)} \cosh \frac{k_n^{(1)}}{b_1} y_1 \dots \dots \dots (18)$$

$$Y_n^{(2)}(y_2) = \gamma_1^{(2)} \sin \frac{k_n^{(2)}}{b_2} y_2 + \gamma_2^{(2)} \cos \frac{k_n^{(2)}}{b_2} y_2 + \gamma_3^{(2)} \sinh \frac{k_n^{(2)}}{b_2} y_2 + \gamma_4^{(2)} \cosh \frac{k_n^{(2)}}{b_2} y_2 \dots \dots \dots (18b)$$

$$(k_n^{(1)} = b_1 \lambda_n = k_n, \quad k_n^{(2)} = b_2 \lambda_n = \beta k_n)$$

절곡보 (cranked beam)의 절곡 이음부조건 (interface condition)은

$$Y_n(b_1) = Y_n(b_2), \quad Y_n'(b_1) = -Y_n'(b_2) \\ D_1 Y_n''(b_1) = D_2 Y_n''(b_2), \quad D_1 Y_n'''(b_1) = -D_2 Y_n'''(b_2) \dots \dots \dots (19)$$

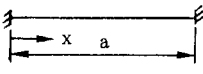
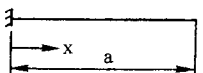
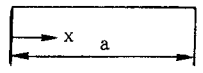
이므로, 식(18a)와 (18b)의 변수(parameter)  $k_n$ 과 계수  $\gamma_n^{(i)}$  ( $i=1, 2; j=1, 2, 3, 4$ )는 경계조건에 따른 다음식의 고유치 (eigenvalue)와 고유벡터

(eigenvector)를 계산함으로써 결정된다.

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^{(1)} \\ \gamma^{(2)} \end{Bmatrix} = 0, \quad \{\gamma^{(i)}\} = \{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4\}^{(i)T} \dots \dots \dots (20)$$

여기서, 분할 매트릭스 (partition matrix)는 각각의 경계조건에 따라 Appendix에 나타낸 바와 같다.

**Table 1. Values of  $k_m$  and  $\sigma_m$  for boundary conditions.**

Boundary Conditions	$k_m : m = 1, 2, 3, \dots$	$\sigma_m : m = 1, 2, 3, \dots$
 <p>C-C</p>	4.73004074	0.98250221
	7.85320462	1.00077731
	10.99560780	0.99996645
	14.13716550	1.00000145
	17.49336143	0.99999993
	$(2m+1)\pi/2$ : $m > 5$	1.0 : $m > 5$
 <p>C-F</p>	1.87510407	0.73409551
	4.69409113	1.01846731
	7.85475744	0.99922449
	10.99554073	1.00003355
	14.13716839	0.99999855
	$(2m-1)\pi/2$ : $m > 5$	1.0 : $m > 5$
 <p>F-F</p>	0.00000000	0.00000000
	0.00000000	0.00000000
	4.73004074	0.98250221
	7.85320462	1.00077731
	10.99560780	0.99996645
	14.13716550	1.00000145
	17.27875970	0.99999993
	$(2m-3)\pi/2$ : $m > 7$	1.0 : $m > 7$

#### 4. 수치적 결과 및 고찰

본 논문에서는 각각의 경계조건중 하나의 예로서

Fig. 2와 같은 x방향 고정-고정(clamped-clamped), y방향 고정-고정(clamped-clamped) 조건을 선정하여 형상비에 따른 고유치  $\lambda = (\sqrt{\omega^2 \rho h_1 a^3 b_1 / D_1})$ 를 수치적으로 해석하였다. 이와 같은 본 논문의 앞서 전개한 수치적 해석에 대한 컴퓨터 프로그래밍의 주 프로그램 흐름도는 Fig. 3에 나타낸 바와 같다.

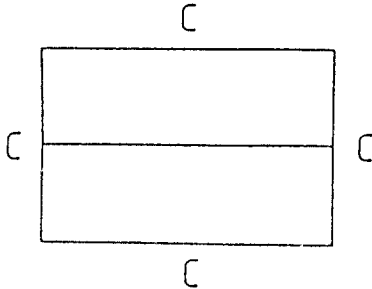


Fig. 2 C-C, C-C L-type Folded Plate.

모든 구조물의 동적 문제에 대한 수치적 산정에 있어서, 고유치는 어느 정도의 모드차수 이상이 되면 수렴성의 특징을 나타내게 된다. Fig. 2의 조건의 경우,  $M \times N$ 은  $3 \times 5$  이상에서 수렴성을 나타내게 된다.

Fig. 4은  $\alpha = (h_2/h_1) = 1$ ,  $b_1 + b_2 = a$ ,  $\nu = 0.3$ 인 경우, 임의의  $\beta = (b_2/b_1) = 0.2 \sim 1.0$  값에 대한 고유치  $\lambda = (\sqrt{\omega^2 \rho h_1 a^3 b_1 / D_1})$ 를 6차모드 (I~VI) 까지 나타낸 것이다. 여기서,  $\beta = 0$ 는 일반 평판을 나타내는 것으로서, 본 논문에 의한 수치 해석문제에  $\beta \rightarrow 0$ 를 적용시키면, 고유치  $\lambda$ 는 일반 평판에 대한 Young의 결과에 수렴하게 된다. 그리고  $\beta$ 의 값이 증가함에 따라 고유치  $\lambda$ 는 전 모드 수(mode number)에 걸쳐서 일정하게 증가하게 된다.

Fig. 5는  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\nu = 0.3$ 인 경우, 임의의 형상비  $\delta = (a/b_1) = 1.0 \sim 3.0$ 에 대한 고유치  $\lambda$ 를 나타낸 것이다. 고유치  $\lambda$ 는 형상비  $\delta$ 가 증가함에 따라 모드수 3까지는 일정하게 증가하는 반면에 모드수 4이상에서는 급격하게 증가하고 있다. 또한,

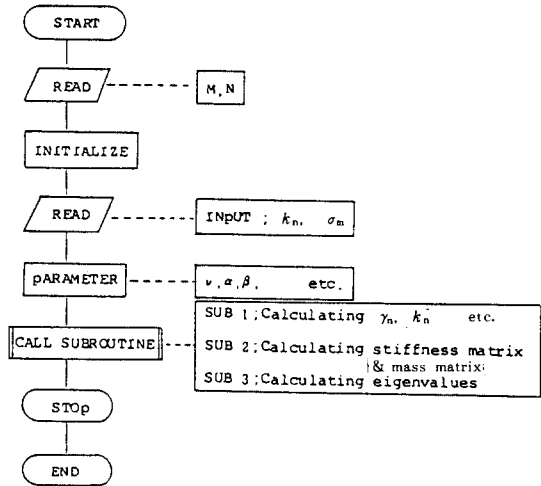


Fig. 3 Flow chart of main program.

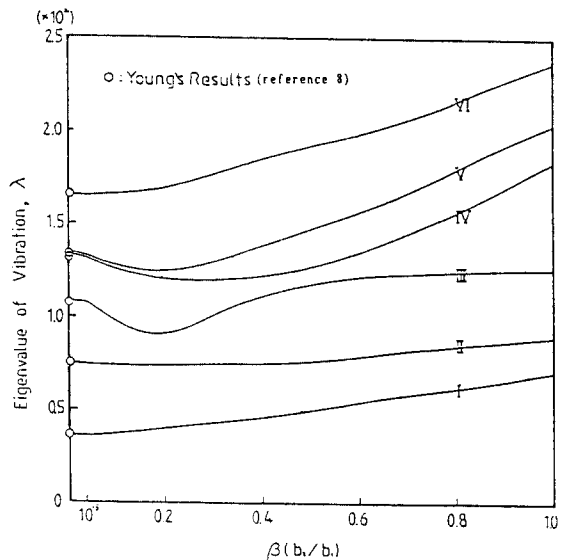


Fig. 4 Eigenvalues of Vibration vs.  $\beta (b_2/b_1)$  of L-type Folded Plate, for which  $\alpha = 1$ ,  $b_1 + b_2 = a$ ,  $\nu = 0.3$

Fig. 6는 Fig. 5의 경우와 똑같은 체적을 가지면서  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 2$ ,  $\nu = 0.3$ 인 경우에 대하여 형상비  $\delta$ 에 대한 고유치  $\lambda$ 를 나타낸 것으로서 고유치  $\lambda$ 는 전반적으로 Fig. 5의 경우와 유사한 값을 가지며 특히, 모드 수 3까지는 거의 같은 값을 나타내고

있다. 그러나, 모드 수 4 이상에서는 형상비  $\delta$ 가 2 이하인 경우 다소 차이가 나는 고유치  $\lambda$ 를 나타내고 있다.

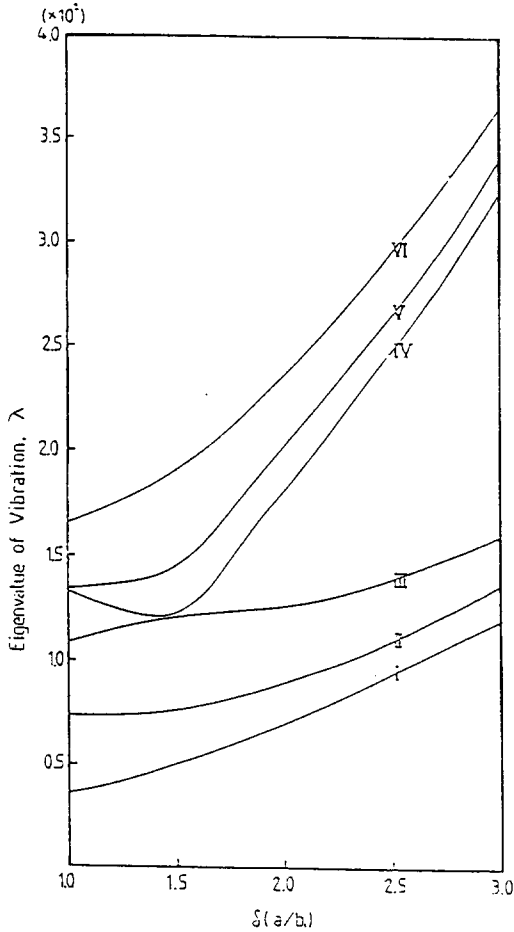


Fig. 5 Eigenvalues of Vibration vs. Aspect Ratio of L-type Folded Plate, for which  $\alpha = 1, \beta = 1, \nu = 0.3$

### 5. 결 론

두께 및 길이가 서로 다른 L-형 절곡판(L-type folded plate)의 진동수 방정식(frequency

equation)이 Rayleigh-Ritz 방법을 이용함으로써 유도되었다. 또한, 각각의 경계조건에 따른 고유진동수의 수치적 산정과정도 유도되었다. 이러한 고유진동수의 값은 x-방향 보와 y-방향 보(cranked beam)의 경계조건에 따른 적절한 고유함수를 선정하고, 그에 따른 수치적 결과의 수렴성을 고려함으로써 얻을 수 있다.

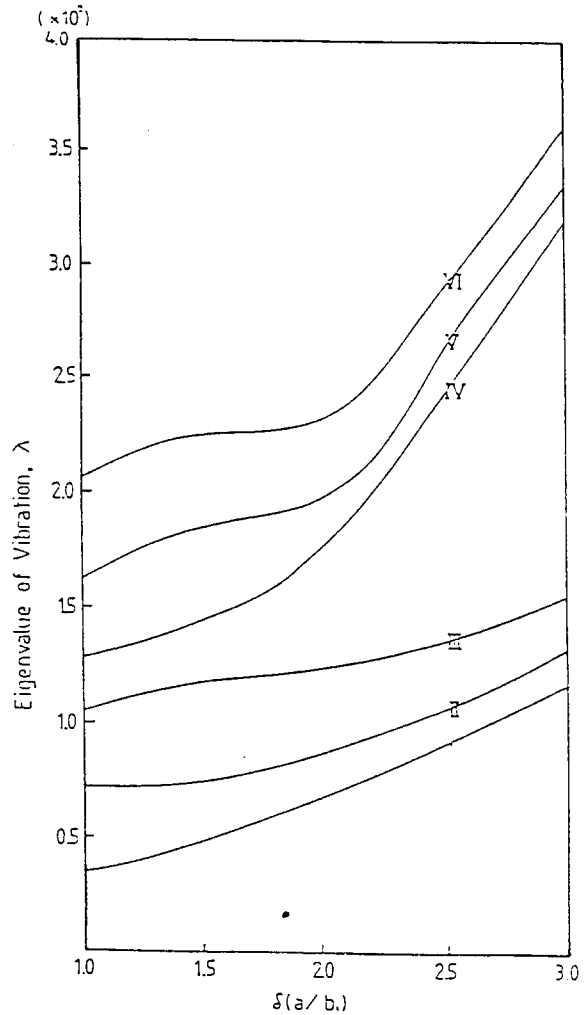


Fig. 6 Eigenvalues of Vibration vs. Aspect Ratio of L-type Folded Plate, for which  $\alpha = 0.5, \beta = 2, \nu = 0.3$

附

錄

(i) 고정-고정 보 (cranked-clamped beam) 인 경우

$$[B_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin k_n & \cos k_n & \sinh k_n & \cosh k_n \\ \cos k_n & -\sin k_n & \cosh k_n & \sinh k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta k_n & -\cos \beta k_n & -\sinh \beta k_n & -\cosh \beta k_n \\ \cos \beta k_n & -\sin \beta k_n & \cosh \beta k_n & \sinh \beta k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin k_n & -\cos k_n & \sinh k_n & \cosh k_n \\ -\cos k_n & \sin k_n & \cosh k_n & \sinh k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{22}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2 \sin \beta k_n & \alpha^2 \cos \beta k_n & -\alpha^2 \sinh \beta k_n & -\alpha^2 \cosh \beta k_n \\ -\alpha^2 \cos \beta k_n & \alpha^2 \sin \beta k_n & \alpha^2 \cosh \beta k_n & \alpha^2 \sinh \beta k_n \end{bmatrix}$$

(ii) 고정-자유 보 (clamped-free beam) 인 경우

$$[B_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin k_n & \cos k_n & \sinh k_n & \cosh k_n \\ \cos k_n & -\sin k_n & \cosh k_n & \sinh k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta k_n & -\cos \beta k_n & -\sinh \beta k_n & -\cosh \beta k_n \\ \cos \beta k_n & -\sin \beta k_n & \cosh \beta k_n & \sinh \beta k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin k_n & -\cos k_n & \sinh k_n & \cosh k_n \\ -\cos k_n & \sin k_n & \cosh k_n & \sinh k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{22}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha^2 \sin \beta k_n & \alpha^2 \cos \beta k_n & -\alpha^2 \sinh \beta k_n & -\alpha^2 \cosh \beta k_n \\ -\alpha^2 \cos \beta k_n & \alpha^2 \sin \beta k_n & \alpha^2 \cosh \beta k_n & \alpha^2 \sinh \beta k_n \end{bmatrix}$$

(iii) 자유-자유 보 (free-free beam) 인 경우

$$[B_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \sin k_n & \cos k_n & \sinh k_n & \cosh k_n \\ \cos k_n & -\sin k_n & \cosh k_n & \sinh k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta k_n & -\cos \beta k_n & -\sinh \beta k_n & -\cosh \beta k_n \\ \cos \beta k_n & -\sin \beta k_n & \cosh \beta k_n & \sinh \beta k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin k_n & -\cos k_n & \sinh k_n & \cosh k_n \\ -\cos k_n & \sin k_n & \cosh k_n & \sinh k_n \end{bmatrix}$$

$$[B_{22}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha^3 \sin \beta k_n & \alpha^3 \cos \beta k_n & -\alpha^3 \sinh \beta k_n & -\alpha^3 \cosh \beta k_n \\ -\alpha^3 \cos \beta k_n & \alpha^3 \sin \beta k_n & \alpha^3 \cosh \beta k_n & \alpha^3 \sinh \beta k_n \end{bmatrix}$$

y 방향 자유-자유 보 (cranked free-free beam) 의 처음 세 모드는 병진 (translation) 및 회전 (rotation) 모드이다. 즉,  $Y_1^{(1)} = 1$ ,  $Y_1^{(2)} = 0$ ,  $Y_2^{(1)} = 0$ ,  $Y_2^{(2)} = 1$ ,  $Y_3^{(1)} = (-1)^i (1 - y_i/b_i)$ .

參 考 文 獻

1. Hidaka, K., 1951, "Vibration of a Square Plate Clamped at Four Edges.", Math. Jap., Vol. 2, No. 3, pp. 97-101
2. Nishimura, T., 1953 "Studies on Vibration Problems of Flat Plates by Means of Difference Calculus.", Proc. 3d. Congr., Appl. Mech., pp. 417-420
3. Abramowitz, M. and Cahill, W.F., 1955, "On the Vibration of a Square Clamped Plate.", J. Assoc. Comput. Mach., Vol. 2, No. 3, pp. 162-168
4. Galin, M.P., 1947, "On the Transverse



- Vibrations of Plates.", *Prikl. Mat. Mekh.*, Vol. 12, No. 3, pp. 387-388
5. Munakata, K., 1952, "On the Vibration and Elastic Stability of a Rectangular Plate Clamped at Its Four Edges.", *J. Math. and Phys.*, Vol. 31, No. 1, pp. 69-74
  6. Stanisic, M., 1957, "An Approximate Method Applied to the Solution of the Problem of Vibrating Rectangular Plate.", *J. Aeron. Sci.*, Vol. 24, No. 2, pp. 159-160
  7. Aynola, L. Ya, 1963, "Method of Investigating Elastic Plate Vibrations.", *Inz. Zhurnal*, Vol. 3, No. 2, pp. 312-321
  8. Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method.", *J. Appl. Mech.*, Vol. 17, No. 4, pp. 448-453.
  9. Nagaraja, J. and Rao, S. S., 1953, "Vibration of Rectangular Plates.", *J. Aeron. Sci.*, Vol. 20, No. 12, pp. 855-856
  10. Warburton, G. B., 1954, "The Vibration of Rectangular Plates.", *Proc. Inst. Mech.*, Ser. A, Vol. 168, No. 12, pp. 371-384
  11. Guyader, J. L., Boisson, C. and Lesueur, C., 1982, "energy Transmission in Finite Coupled Plates.", *J. Sound Vib.*, Vol. 81, No. 1, pp. 81-92
  12. Nakahira, N., Natsuaki, Y., Ozawa, K. and Naruoka, M., 1985, "Numerical Vibration Analysis of Plate Structures by Newmark's Method.", *J. Sound Vib.*, Vol. 99, No. 2, pp. 183-198
  13. Irie, T., amada, G. and Kobayashi, Y., 1984, "Free Vibration of a Cantilever Folded Plates.", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 76, No. 6, pp. 1743-1748
  14. Szilard, R., 1974, "Theory and Analysis of Plates.", *Prentice-Hall Inc.*, pp. 28