

단일상태 귀환 제어계의 최적 비선형제어기
설계에 관한 연구

노용균*, 조겸래**, 이진걸***

A Study on the Design of the Optimal Nonlinear Controller
for Single State Feedback

Y. G. Ro*, K. R. Cho**, J. G. Lee***

ABSTRACT

For feedback control of a linear dynamic system the optimum linear state regulator (OLSR) can be implemented only if all states are available for feedback. This work demonstrates that when only the output state is available for feedback, a nonlinear controllers can give improved performance over that obtained by a proportional controller.

This paper found the optimal control law by dynamic programming and principles of optimality. This, performances of both proportional and nonlinear controllers are compared with performance of optimum linear state regulator.

* 부산대학교 대학원 기계공학과

** 부산대학교 기계공학과 조교수

*** 부산대학교 정밀공학과 교수

I. 서 론

출력의 모든 상태를 측정하여 모든 상태변수가 Feedback 되면 Riccati Equation을 써서 가장 이상적인 제어기인 최적 선형 상태조절기 OLSR (Optimum Linear State Regulator)을 구성할 수 있다. 그러나 대개의 실제적인 경우 출력의 모든 상태가 측정되어 제어입력에 이용되기란 거의 불가능하므로 제어변수에 이용되지 않는 상태변수가 생기게 되어 OLSR을 구성할 수 없게 된다. 그래서 측정하지 못한 상태변수를 측정하기 위해서 관측기 (Observer)를 설치하거나 다른 장치를 이용하여 Feedback 되지않은 상태변수를 측정하지만 그렇게 되면 계의 복잡성이 가중되고 외란에 대한 추적이 어렵게 되어 바람직하지않다.

이번 연구에서는 측정되어야 할 많은 상태변수들 중에서 단 하나의 상태만 Feedback 되어 OLSR을 구성할 수 없을때 어떻게 제어기를 구성하면 최적화된 제어기를 설계할 수 있을 것인가를 연구한다. 많은 상태중에서 단 하나의 상태만 측정할 수 있을 때 Rekasius⁽¹⁾와 Hsia⁽²⁾는 전구간에 걸쳐 기울기가 일정한 비례 제어기를 설계했고, Gay⁽³⁾는 Simple Gradient Method를 써서 비례제어기와 구간별 기울기가 다른 비선형 제어기를 설계했다. 그러나 본 논문은 Dynamic Programming과 최적성의 원리를 이용하여 비례제어기와 비선형 제어기를 구성하여 OLSR, 비례제어기, 비선형 제어기를 사용한 계의 성능계수 값과 서로 비교하고, Gay가 이용한 Gradient Method의 결과와도 비교한다.

연구에 이용될 계는 단일 입, 출력을 갖는 플랜트로 n차 미분방적식으로 모델링 될 수 있는 정적계 (Linear Stationary System)이다.

II. 본 론

플랜트, 제어기, Feedback 요소로 구성되

는 제어계는 Fig.1과 같다.

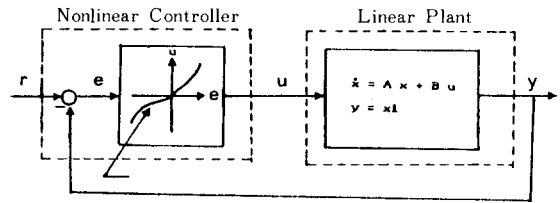


Fig.1 The Configuration of System

여기서 오차신호 e는 원하는 출력 r과 실제 플랜트 출력 y의 차이이고, x는 X_1, X_2, \dots, X_n 의 선형 독립 변수들로 구성된 $n \times 1$ 의 상태벡터 (State Vector)이며, \dot{x} 는 상태를 시간에 대해 미분한 dx/dt 이고, y는 출력으로 (식1)과 같이 표시된다.

$$y = x_1 \dots \dots \dots (식 1)$$

A는 $n \times n$ 상수 matrix이고, B는 $n \times 1$ 상수 제어 matrix이고, 원하는 출력 r은 조절기 문제로 가정하여 0으로 한다. 제어입력 u는 오차신호 e의 함수로 $u=f(e)$ 로 표시된다. 이때 제어신호 u와 오차신호 e의 Graph가 직선이면 비례 제어기이고, 그렇지 않으면 비선형 제어기가 된다.

Fig.1과 같은 계가 주어지면 설계의 목적에 따라 적절한 성능계수를 선정하여 이값을 최소화 시키는 제어입력을 설계해야 한다. 성능계수 중에서 가장 널리 이용되는 것은 (식2)와 같이 상태변수와 제어입력으로 표시되는 적분 2차형 성능계수 (Integral Quadratic Performance Index)이다.

$$PI = \int_0^{\infty} (X^T Q X + u^T W u) dt \dots \dots \dots (식 2)$$

Q는 $n \times n$ 의 NDM (Nonnegative Definite Matrix)이고, W는 양의 상수로 제어입력의 가중치로 이 값들은 해석의 목적에 따라 적절하게 선정하는데 OLSR, 비례제어기, 비선형제어기의 성능계수는 모두 같다고 가정한다.

성능계수가 선정되면 이 성능계수의 값을

최소화시키는 제어기를 설계해야 하는데 만약 모든 상태변수가 Feedback 되어 OLSR을 구성할 수 있으면 다행이지만 실제적으로 모든 상태를 측정하기란 어려우므로 OLSR에 가장 근접하는 다른 제어기를 설계해야 한다.

Fig. 1에서처럼 한 상태만 측정 가능하고 $u = f(e)$ 의 함수가 선형이면 제어기는 비례제어기로 그때의 제어입력은 (식3)과 같다.

$$u = K_p e = -K_p y \dots\dots\dots (식 3)$$

여기서 K_p 는 비례 제어상수로 초기값에 대해 (식2)와 같은 성능계수를 최소화시키는 값이다. 이 값을 구하기 위해 Rekasius와 Hisa는 전 구간에 걸쳐 기울기가 일정한 비례 제어기를 설계했지만 Gay는 Simple Gradient Method를 써서 구간별 기울기가 다른 비선형 제어기를 설계했다.

Fig. 2를 보자.

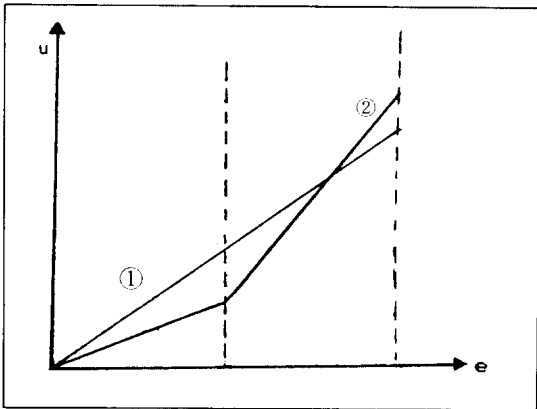


Fig. 2 Proportional and Control Signal

경로①은 기울기가 일정한 비례제어기이고 경로 ②는 각 구간마다 기울기가 다른 비선형 제어기이다. 즉 임의로 나눈 각 구간에 대하여 최적경로를 찾아 구간별 최적경로를 합하여 전체의 최적경로를 구한다. 이번 연구는 Gay가 적용한 Simple Gradient Method와 달리 Dynamic Programming과 최적성의 원리

를 이용하여 비선형 제어기를 구성함으로써 Gay 논문의 값들과 서로 비교한다.

최적 경로를 찾는 과정은 아래와 같다. Fig. 3을 보자.

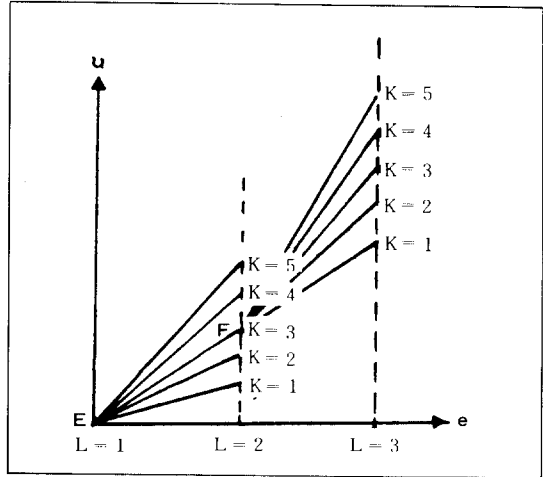


Fig. 3 The finding of Optimal Path

Fig. 3에서 두점 $(E(L-1), F(L-1, K))$ 을 지나는 직선의 방정식은 (식4)와 같다. 여기서 점 (E, F) 는 임의의 좌표 (e, u) 를 의미한다.

$$u - F(L, K) = (F(L, K) - F(L-1, K)) / (E(L) - E(L-1)) (e - E(L)) \dots\dots\dots (식 4)$$

(식4)를 정리하면

$$u = GG e + HH \dots\dots\dots (식 5)$$

여기서 $GG = (F(L, K) - F(L-1, K)) / (E(L) - E(L-1))$

$$HH = F(L, K) - GG E(L) \text{ 이고,}$$

$E(L), F(L, K)$ 에서 L 은 나눈 구간을 의미하고 K 는 그때의 제어입력을 시험하는 값이고, $e = -X_1$ 이므로 (식5)는 (식6)과 같이 표시된다.

$$u = -GG x_1 + HH \dots\dots\dots (식 6)$$

적용할 계는 조절기 문제이므로 오차신호와 제어신호의 최종 상태는 0이어야 한다. 즉 $E(1)$, $F(1, 1)$ 은 각각 0이다.

첫 구간의 최적경로는 $E(1)$, $F(1, 1)$ 을 고정점으로 하여 $L=2$ 이고, $K=1$ 일때 ($E(2)$, $F(2, K)$)까지 이르는 제어입력 u 와 상태변수 X_1 과의 관계식을 구하고 미분방정식을 풀어 성능계수 값을 구한후 $K=2$ 일때도 위와 같은 과정을 반복하여 $K=1$ 에서 $K=kk$ 까지 중에서 가장 최소의 성능계수 값을 가지는 관계식이 우리가 찾는 제어입력이다. 두번째 구간은 먼저 구한 최적점을 고정점으로 하여 위와 같은 방법으로 두번째 구간의 제어입력을 찾는다.

마찬가지로 세구간, 네구간...으로 나누었을 때의 구간별 제어입력을 구한 후 전체구간의 제어입력을 구하면 된다.

Table1은 예제의 구간을 두번 나누었을 때의 결과이다.

E = 0.5		E = 1.0	
F	PI	F	PI
0.39	1.33569	2.18	8.03893
0.40	1.34988	2.19	8.04397
0.41	1.34089	2.20	8.04907
0.42	1.33585	2.21	8.05420
0.43	1.33449	2.22	8.03266
0.44	1.33653	2.23	8.03809
0.45	1.34189	2.24	8.04356
0.46	1.35027	2.25	8.04908
0.47	1.36141	2.26	8.05463

Table1. The Numerical Results of $L=2$

Table1에서 보듯이 ($E(1)$, $F(1, 1)$)에서 ($E(2)$, $F(2, k)$)까지의 경로에서는 (0, 0)에서 (0.5, 0.43)으로 가면 성능계수의 값이 1.3344로 최소이므로 첫 구간의 최적경로이고 (0.5, 0.43)에서 ($E(3)$, $F(3, k)$)까지는 (1.0, 2.22)일때 성능계수 값이 8.03266으로 최소가

되므로 최적경로이다. 따라서 전체 구간의 성능계수 값은 각 구간별 성능계수를 합한 9.36715이다.

설계된 특정한 초기치에 대하여 성능계수를 최적화 시키도록 제어기를 구성하면 성능은 최소가 되지만 안정성의 문제는 아직 해결되지 않은 채 남아있다.

본 논문에서는 안정성 문제를 Popov Criterion⁽⁴⁾과 극점천이 기술을 써서 판별한다. Popov Criterion은 Fig. 4와 같이 비선형 함수 $f(e)$ 가 Popov Sector안에 들면 안정하다.

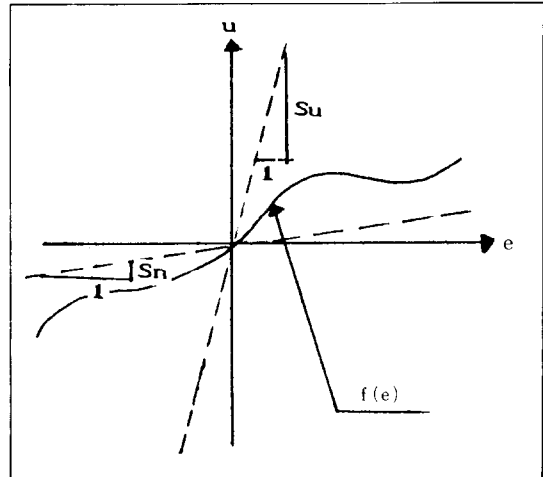


Fig. 4 Popov Criterion

III. 예 제

다음과 같은 2차계를 선정하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

계의 출력은 $y=X_1$ 이고 이때의 초기조건은 $X_1=-1.0$, $X_2(0)=0$ 이고, 성능계수는 $PI = \int_0^T (10X_1^2 + U^2) dt$, 또한 적분의 무한시간은 10초 정도면 충분하므로 Popov Criterion

n과 극점천이 기술을 써서 Popov Sector을 구해보면 $0.25 < u/e < \infty$ 이다.

미분 방정식을 푸는 Routine은 정확도와 시간을 위해 Runge-Kutta 4th Order 적분을 사용했고, 시간 증분은 0.01초, 오차한계는 1%

이다. OLSR의 제어입력은 $u = -3.162 x_1 - 1.7062 x_2$ 이고 최적 성능계수 값은 8.588이다.

L=에서 5가지 나누었을때의 결과가 Table2 에 있다.

		Gay		논 문	
L	E	F	PI	F	PI
1	1.00	1.55	10.202	1.55	10.26379
2	0.50	0.187	9.612	0.43	9.36715
	1.00	1.781		2.22	
3	0.333	0.195	9.143	0.20	9.12327
	0.667	0.167		1.05	
	1.000	2.526		2.48	
4	0.25	0.221	9.070	0.13	8.99753
	0.50	0.126		0.59	
	0.75	0.545		1.39	
	1.00	2.706		2.39	
5	0.20	0.230	9.001	0.10	8.95829
	0.40	0.101		0.43	
	0.60	0.204		0.96	
	0.80	0.965		2.07	
	1.00	2.727		2.46	

Table2. The Numerical Results of Simulation

Table2 에서 보듯이 구간을 한번 나눈 비례 제어기는 성능계수의 값이 10.2679인데 반하여 구간을 많이 나눌수록 성능이 개선되어 구간을 다섯번 나누었을 때는 성능계수의 값이 8.95829로 감소하여 성능의 개선율이 약 12.36% 까지되어 구간을 적절하게 나누어 구간별 기울기가 다른 비선형 제어를 설계하면 성능이 훨씬 개선됨을 알 수 있다. 구간을 많이 나눌수록 성능이 개선되지만 그렇다고

너무 많이 나누면 계산이 복잡하고 시간이 오래 걸리므로 구간을 나누다가 성능의 개선이 거의 이루어지지 않으면 작업을 마치는게 좋다.

이번 예제의 경우 L=2일때는 약 8.7% 개선 되지만 L=4일때와 L=5일때는 0.44%의 개선만 이루어지므로 L=3이나 4정도에서 멈추어도 좋겠다. 그러나 아주 정확성을 요구할 때는 그 이상 나눈 비선형 제어를 설계한다.

또 하나 주목할 만한 것은 Gay의 결과와 비교해 보면 Dynamic Programming에 의한 결과들이 개선된다. 즉 구간을 나누는 조건을 똑같이 했을때 성능계수의 값들을 비교해 보면 Dynamic Programming에 의한 Algorithm에 의한 방법이 Gay에 의한 Gradient Method의 Algorithm의 결과보다 개선됨을 알 수 있다.

Fig. 5는 Table2의 결과로 ①은 OLSR, ②는 비례제어기, ③은 L=5일때의 Gay의 비선형 제어기, ④는 L=5일때의 본 논문에서 구한 비선형 제어기에 의한 제어신호 u와 오차신호 e의 궤적이다. Fig. 5에서 보듯이 설계한 비례 제어입력과 L=5일 경우 비선형 제어입력은 파선으로 표시된 Popov Sector 안에 존재하므로 안정하다.

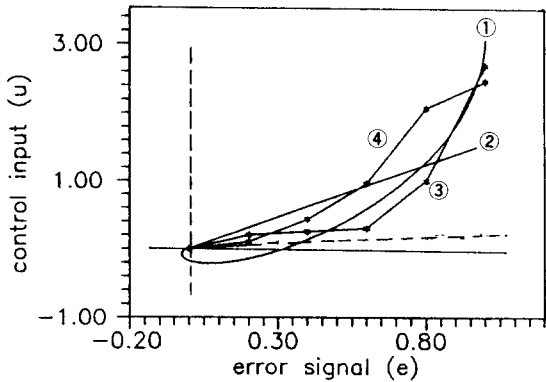


Fig. 5 The Trajectories of Control Signal

다음으로 Gay는 구간의 간격을 일정하게 나누어 구간을 많이 나누기만 하면 성능이 개선 된다고 보았었으나 Computer 시뮬레이션 결과 구간을 적절하게 나누지 못하면 성능이 개선되지 않고 오히려 성능이 증가하여 이론에 위배됨을 알 수 있었다. Table3은 그 결과이다.

Table3에서 보듯이 구간을 두번 나누면 Gay의 방법대로 하면 오차신호의 값이 0.5와 1.

E	F	PI
0.2	0.1	9.49719
1.0	1.42	
0.3	0.17	9.29966
1.0	1.67	
0.4	0.28	9.27370
1.0	1.90	
0.5	0.43	9.36715
1.0	2.22	
0.6	0.55	9.50939
1.0	2.33	
0.7	0.69	9.68992
1.0	2.46	

Table. 3 The Numerical Results of Different Interval Length

0으로 나누어 지지만 그때의 성능계수 값은 구간을 달리했을 때의 결과와 비교해 보면 그 값이 차이가 있다. 즉 첫번째 구간이 0.0과 1.0 근방으로 가면 성능계수의 값이 증가하여 바람직하지 않으나 구간을 0.4근방으로 나누면 성능이 개선된다. 그러므로 구간을 똑같은 간격으로 나누기 보다는 각 구간을 나누는 문제도 고려해야 한다.

다음으로 Table4는 예제의 계와, 성능계수를 가지지만 초기조건이 다를 때의 비선형 제어기를 구성했다.

예제의 초기조건은 $X_1(0) = -1.0$, $X_2(0) = 0.0$ 이었지만 이번에는 $X_1(0) = -0.5$, $X_2(0) = -1.0$ 이다. Table4는 그 결과이다.

Table4에서 $X_1(0) = -1.0$, $X_2(0) = 0.0$ 일때 비례제어기는 $u = 1.559e$, 그때의 성능계수 값은 10.26379 이지만 초기조건이 $X_1(0) = -0.5$, $X_2(0) = -1.0$ 일때 비례제어기는 $u = 2.53e$, 그때의 성능계수 값은 9.36131로 차이가 있고, L=5 일때의 비선형 제어기의 성능계수 값도 8.95829와 7.84581로 차이가 있다.

N	$X_1(0) = -1.0$ $X_2(0) = 0.0$			$X_1(0) = -0.5$ $X_2(0) = -1.0$		
	E	F	PI	E	F	PI
1	1.00	1.55	10.26379	1.00	2.53	9.36132
2	0.50	0.43	9.36715	0.20	0.09	9.01748
	1.00	2.22		0.80	2.54	
3	0.333	0.20	9.12327	0.20	0.09	8.33354
	0.667	1.05		0.30	0.26	
	1.000	2.48		0.80	2.04	
4	0.25	0.13	8.99753	0.10	0.04	7.92152
	0.50	0.59		0.20	0.16	
	0.75	1.39		0.40	0.56	
	1.00	2.39		0.80	2.68	
5	0.20	0.23	8.95829	0.10	0.04	7.84581
	0.40	0.43		0.20	0.16	
	0.60	0.96		0.30	0.38	
	0.80	2.07		0.40	0.72	
	1.00	2.46		0.80	2.91	

Table. 3 The Numerical Results of Different Initial Value

IV. 결 론

모든 상태를 측정하지 못하여 OLSR을 구성할 수 없을 때 Dynamic Programming에 의한 시뮬레이션으로 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째 비례제어기보다 비선형 제어기를 설계하는 것이 성능을 훨씬 개선시킬 수 있음을 알았다. 또한 비선형 제어기 중에서도 구간을 많이 나눌수록 성능이 개선된다는 사실도 확

인할 수 있었다.

둘째 Gay가 적용한 Simple Gradient Method를 이용한 Algorithm보다 Dynamic Programming에 의한 Algorithm이 더 효과적이라는 사실도 알았다.

세째 구간을 적절히 나누지 못하면 성능계수 값이 증가될 수도 있다.

네째 상태방정식의 초기조건이 달라지면 전

혀 다른 결과가 나온다. 이 논문에서는 언급
하지 않았지만 비대칭형 비선형제어기 설계

문제, 비선형계의 비선형제어기를 설계하는
것은 계속 연구해 볼 가치가 있을 것이다.

參 考 文 獻

- (1) Rekasius, Z. V., "Optimal Linear Regulators with Incomplete State Feedback", IEEE Transactions on Automatic Control, June 1966. pp. 296 - 299.
- (2) Hsia, T. C., "An Approach for Incomplete State Feedback Control System Design", IEEE Transactions on Automatic Control, June 1972. pp. 383 - 389.
- (3) Gay, T. A. "Constrained Optimal Nonlinear Regulators for Single State Feedback", ASME Transactions on Dynamic Systems, and control, September 1974. pp. 283 - 286
- (4) Y. Takahashi, M. J. Rabins, "Control and Dynamic Systems", Addison - Wesley, 1972.