

이 논문은 1988년도 문교부 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

다변수 비선형 확률 시스템에 대한
극점배치 제어기 설계

김 종식

**Pole Placement Controller Design
for Multivariable Nonlinear Stochastic Systems**

Jong Shik Kim

ABSTRACT

A controller design method is proposed for multivariable nonlinear stochastic systems with hard nonlinearities such as Coulomb friction, backlash and saturation. In order to take the nonlinearities into account statistical linearization techniques are used. And multivariable pole placement techniques are applied to design controller for the statistically linearized multivariable systems. The basic concept of the controller design method is to solve two coupled equations, characteristic equation and Lyapunov equation, simultaneously and iteratively for statistically linearized multivariable stochastic systems.

An aircraft with saturation serves as a design example. The design example illustrates the influence of nonlinear effects. The results of the analysis are compared to Monte Carlo simulation to test their accuracy.

NOMENCLATURE

d	: desired values
$E[]$: expectation
\underline{f}	: nonlinear function vector
G	: control gain matrix
J	: performance index
L	: disturbance input matrix
\underline{m}	: mean of \underline{x}
N	: describing function matrix
p	: probability density function
Q, q	: white noise intensity
s	: stationary values
\underline{u}	: input vector
U	: covariance matrix of \underline{u}
w	: white noise vector
\underline{x}	: state vector
X	: covariance matrix of \underline{x}
\underline{y}	: output vector
δ	: tolerance
$\delta(\tau)$: Dirac delta function
λ	: eigenvalue
σ_x	: standard deviation of x
ϵ	: difference between nonlinearity and its approximator
$ $: determinant
$ $: norm

1. 서 론

제어시스템 설계에서 가장 어려운 문제 중의 하나는 일반적으로 잘 정립된 선형 제어이론에

의한 설계방법과 실제 제어문제와 차이가 있다는 것이다. 이론과 실제의 차이가 발생하는 중요한 원인은 주로 플랜트의 비선형성 때문이다. 이 비선형 효과를 무시하고 선형 시스템으로 이상화한 후 선형 제어시스템 설계방법을 적용할 때 실제 제어시스템의 성능은 만족스럽지 못한 경우가 많다. 특히 다변수 비선형 확률 시스템(multivariable nonlinear stochastic systems) 경우에는 시스템의 해석 및 설계가 복잡하기 때문에 제어시스템 설계시 일반적으로 비선형 효과를 무시하고 있다. 그렇지만 정밀한 제어가 요구되는 경우에는 비선형 효과를 고려하여 보다 좋은 성능을 갖는 제어기의 설계가 요구된다.

그러므로 본 연구에서는 쿨롱(Coulomb) 마찰, 백래쉬(backlash) 혹은 포화(saturation)와 같은 하드(hard) 비선형 요소를 포함한 다변수 확률 시스템에서 비선형 효과를 고려할 수 있는 제어시스템을 설계하는데 목표를 두고 있다. 하드 비선형 요소를 포함한 확률 시스템을 해석하고 설계하는데 적합한 방법인 통계학적 선형화기법(statistically linearization techniques)[1]을 이용하여 비선형 시스템을 준-선형화(quasi-linearization) 시스템으로 모델링한 후 다변수 극점배치기법(multivariable pole placement techniques)[2]을 적용하여 설계자가 요구하는 제어시스템을 설계할 수 있는 소프트웨어를 개발한다.

다변수 비선형 확률 시스템에 대한 극점배치 제어기 설계 소프트웨어를 구체적으로 적용해 보기 위하여, 실제적인 설계 예로서 항공기(보잉 707)의 측면 방향(lateral) 운동 제어 문제를 선정하였다. 구동기의 포화에 의한 비선형 효과를 고려한 경우와 무시한 경우에 대한 제어시스템의 성능을 비교함으로써 제안한 설계 방법의 가치를 입증하였다. 또한 설계된 제어시스템의 해석 결과의 정확도를 알아보기 위하여

Monte Carlo 시뮬레이션 결과와 비교 검토 하였다.

기술함수행렬 N 에 대하여 성능지수 J 를 최소화함으로써, 기술함수행렬 N 을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$N = E[\underline{x}\underline{f}^T] E[\underline{x}\underline{x}^T]^{-1} \dots\dots\dots(5)$$

2. 이론적 배경

2.1 통계학적 선형화 기법

통계학적 선형화 기법은 비선형 요소와 비선형 요소를 선형화한 것과의 차이에 대한 평균 자승오차(mean squared error)를 최소화할 수 있는 준-선형(quasi-linear) 계인을 선정하는 것이다.

통계학적 선형화 개념을 설명하기 위하여, 우선 비선형 확률 시스템을 다음과 같이 정의 한다.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{L}\underline{w}(t) \dots\dots\dots(1)$$

여기서

$$E[\underline{w}(t)] = 0, E[\underline{w}(t)\underline{w}^T(t-\tau)] = \underline{Q}\delta(\tau)$$

식(1)에서 비선형 함수 $\underline{f}(\underline{x})$ 를 선형화 하기 위하여 $\underline{f}(\underline{x})$ 가 근사적으로 $N\underline{x}$ 와 같다고 가정한다. 즉,

$$\underline{f}(\underline{x}) \simeq N\underline{x} \dots\dots\dots(2)$$

그리고 비선형 요소와 비선형 요소를 선형화한 것과의 차이를 $\underline{\epsilon}$ 으로 정의하고 $\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}$ 의 기대값을 성능지수 J 로 정의한다.

$$\underline{\epsilon} = \underline{f}(\underline{x}) - N\underline{x} \dots\dots\dots(3)$$

$$J = E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}] \dots\dots\dots(4)$$

스칼라 경우에는,

$$N = \frac{E[xf]}{E[x^2]} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) P(x) dx \dots\dots\dots(6)$$

여기서 $p(x)$ 는 확률밀도함수(probability density function)이다. 공학적인 문제에 대한 랜덤프로세스는 일반적으로 정규분포(Gaussian distribution) 프로세스로 가정한다. 이 때 확률밀도함수 $p(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}\right] \dots\dots(7)$$

그리고 간단한 예로서 Fig.1에 포화 비선형 요소에 대한 랜덤입력 기술함수(random input describing function)가 주어져 있다.

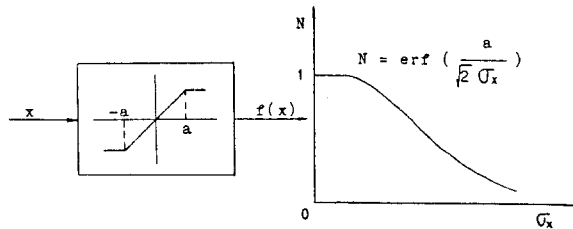


Fig.1 Random Input Describing Function for the Saturation Nonlinearity

이제 통계학적으로 선형화된 시스템의 고유값을 구하기 위하여, 정상(stationary) 평균 \underline{m}_s 와 상호분산(covariance) \underline{X}_s 로부터의 섭동(perturbation) 값 $\delta \underline{m}$ 과 $\delta \underline{X}$ 에 대하여 생각하기로 한다.

$$\delta \underline{m} = \underline{m} - \underline{m}_s \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\delta \underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_s \quad \dots\dots\dots(9)$$

Taylor 급수전개에 의하여 선형화된 평균전파식(mean propagation equation)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \dot{\underline{m}} = \frac{\partial E[\underline{f}]}{\partial \underline{m}} \Big|_s \cdot \delta \underline{m} + \frac{\partial E[\underline{f}]}{\partial \underline{X}} \Big|_s \cdot \delta \underline{X} \quad \dots\dots\dots(10)$$

선형시 불변 시스템 경우, 상호분산은 평균에 비해 2배 빠르게 감쇠하므로, [3]

식(10)에서 둘째 항을 무시하기로 한다. 이때 $\delta \dot{\underline{m}}$ 는 근사적으로 다음과 같다.

$$\delta \dot{\underline{m}} \simeq \frac{\partial E[\underline{f}]}{\partial \underline{m}} \Big|_s \cdot \delta \underline{m} \quad \dots\dots\dots(11)$$

특히 정규분포 랜덤프로세스 경우에는 다음 식이 성립되므로, [4]

$$\frac{\partial E[\underline{f}]}{\partial \underline{m}} = \underline{N} \quad \dots\dots\dots(12)$$

식(11)을 간단하게 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta \dot{\underline{m}} \simeq \underline{N}_s \cdot \delta \underline{m} \quad \dots\dots\dots(13)$$

이 관계식은 비선형 확률 시스템에 대한 제어기를 설계하는 데 매우 중요한 식이다. \underline{N}_s 의 고유값은 Fig.2 와 같이 섭동된 평균의 과도응답을 예시할 수 있다.

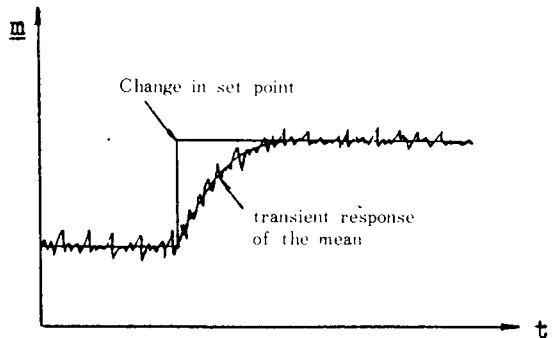


Fig.2 Transient Response of the Perturbed Mean

2.2 다변수 극점배치 기법

극점배치 기법을 다변수 시스템에 적용하기 위하여 다음과 같은 상태공간 모델식을 생각한다.

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t) ; \underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \\ \underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m \quad \dots\dots\dots(14) \\ \underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) ; \underline{y}(t) \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

시스템 외부로부터 생긴 신호는 실제 페루프 극점을 지정하는 데 영향을 주지 않으므로 상태 피드백 제어법칙 $\underline{u}(t)$ 를 다음과 같이 표시하기로 한다.

$$\underline{u}(t) = -\underline{G}\underline{x}(t) \quad \dots\dots\dots(15)$$

여기서 \underline{G} 는 $(m \times n)$ 제어게인 행렬이다.

단일입출력 시스템에 대한 극점배치 기법은 n 개의 제어게인을 극점배치하는 데에만 사용할 수 있으나, 다변수 시스템에 대한 극점배치 기법은 mn 개의 제어게인행렬요소 G_{ij} 가운데 n 개의 게인은 극점배치하는 데 사용하고 나머지 $(m - n)$ 개의 게인은 다른 유용한 제어목적에 위하여 사용할 수 있다. [2, 5, 6, 7]

본 연구에서는 제어게인행렬의 노름(norm), $\|\underline{G}\|$ 을 최소화하는 방법을 이용한 다변수 극

점배치 기법을 적용하기로 한다. 우선 상태 공간 모델식(14)에서 시스템 $[A, B]$ 가 제어가능 (controllable)하다고 가정한다. 또한 바람직한 페루프 시스템이 다음과 같다고 가정한다.

$$\dot{x}(t) = A_d x(t) \dots\dots\dots (16)$$

여기서 A_d 는 바람직한 페루프 시스템행렬이다.

이제 가-역행렬 (pseudo-inverse matrix)을 이용하여 식(14)와 식(16)으로부터 제어 $u(t)$ 를 선정한다.

$$u(t) = (B^T B)^{-1} B^T (A_d - A) x(t) \dots\dots\dots (17)$$

식(17)을 식(14)에 대입하면,

$$\dot{x}(t) = (MA - MA_d) x(t) + A_d x(t) \dots\dots\dots (18)$$

여기서

$$M = I - B (B^T B)^{-1} B^T \dots\dots\dots (19)$$

따라서 식(16)과 식(18)로부터 다음 식이 성립되어야 한다.

$$MA = MA_d \dots\dots\dots (20)$$

또한 식(15)와 식(17)로부터 제어게인행렬 G 는 다음과 같다.

$$G = (B^T B)^{-1} B^T (A - A_d) \dots\dots\dots (21)$$

이제 식(20)을 만족하는 A_d 를 선정하기 위하여, A_d 를 다음과 같이 정의한다.

$$A_d = T A_c T^{-1} \dots\dots\dots (22)$$

여기서 T 는 정칙(nonsingular) 행렬이고 A_c 는 동반(companion)행렬이다. 즉,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

여기서 α_i ($i=0, 1, \dots, n-1$)는 바람직한 극점 λ_{id} ($i=1, 2, \dots, n$)를 만족시키는 특성방정식의 계수이다.

$$(C.E.)_d = (\lambda - \lambda_{1d})(\lambda - \lambda_{2d}) \dots (\lambda - \lambda_{nd}) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

혹은

$$(C.E.)_d = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \dots\dots\dots (25)$$

이 때 다음 식을 만족시킬 수 있는 T 를 선정해야 한다.

$$MA = M T A_c T^{-1} \dots\dots\dots (26)$$

혹은

$$M A T = M T A_c \dots\dots\dots (27)$$

식(21), 식(22) 그리고 식(23)으로부터 바람직한 위치에 고유값을 배치시킬 수 있는 제어게인행렬 G 를 선정할 수 있다. 식(27)에는 $(n-m)$ 개의 독립적인 행이 있으므로 $n(n-m)$ 개의 T_{ij} 에 대해서는 해를 구하고 나머지 nm 개의 종속적인 T_{ij} 는 지정해야 한다. 이 nm 개의 종속적인 T_{ij} 를 지정하는 방법은 무한히 많을 것이다. 그 중에서 제어량을 최소로 한다는 관점에서 다음의 성능지수 J 를 최소화하는 T_{ij} 를 선정하기로 한다.

$$J = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n G_{ij}^2 \dots\dots\dots (28)$$

이와 같이 변환행렬 T 가 선정되면 이 때 바람직한 제어게인행렬 G 는 다음과 같다.

$$G = (B^T B)^{-1} B (A - T A_c T^{-1}) \dots\dots (29)$$

그리고 이에 대한 수치적 알고리즘은 Hedrick[2, 8]에 의하여 개발되었다.

3. 제어시스템 설계

지금까지 설명한 통계학적 선형화 기법과 다변수 극점배치 기법을 이용하여 다변수 비선형 확률 시스템에서 비선형 효과를 고려할 수 있는 제어시스템을 설계하고자 한다. 다시 말하면 식 (30)으로 표현되는 통계학적으로 선형화된 다변수 비선형 확률 시스템에 대한 상태방정식에서 적절한 제어게인행렬 G 를 선정하는 문제이다.

$$\dot{\underline{x}}(t) = (N - B G) \underline{x}(t) + L \underline{w}(t) \dots\dots (30)$$

제어게인행렬 G 를 선정하기 위해서는 두 개의 상관된 방정식인 특성방정식 (31)과 Lyapunov 식 (32)를 동시에 만족하는 해를 찾아야 한다.

$$|\lambda I - N + B G| = 0 \dots\dots\dots (31)$$

$$(N - B G) X + X (N - B G)^T + L Q L^T = 0 \dots\dots\dots (32)$$

여기서 X 는 상태 상호분산행렬 (state covariance matrix)이고 Q 는 외란 (disturbance)의 강도 (intensity)이다.

위의 상관된 두 방정식은 반복계산에 의하여 해를 구해야 한다. 왜냐 하면 기술함수행렬 N 은 미지의 상태벡터 $\underline{x}(t)$ 와 제어입력벡터 $\underline{u}(t)$ 의 rms (root-mean-square) 값의 함수이기 때문이다.

또한 제어게인행렬 G 를 선정하기 위하여, 본

연구에서 고려된 설계사양은 다음과 같다.

- 1) 새로운 설정값에 도달되는 과도응답속도가 빨라야 한다.
- 2) 평균값으로부터 편차를 작게하기 위하여 가능한 한 X 값을 작도록 한다.
- 3) 제어입력의 크기를 작게하기 위하여 제어게인행렬의 노름 $\|G\|$ 를 작도록 한다.

위와 같은 다변수 비선형 확률 시스템에 대한 극점배치 제어기 설계절차를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 통계학적으로 선형화된 비선형 플랜트에 대한 수학적 모델 설정
- 2) 설계사양 및 바람직한 극점 결정
- 3) 비선형 요소에 대한 입력의 표준편차 추정
- 4) 비선형 요소에 대한 기술함수계인 계산
- 5) 다변수 극점배치 기법을 적용하여 바람직한 페루프 극점이 되도록 피드백 제어게인행렬 G 선정
- 6) Lyapunov 식 (32)를 이용하여 상태 상호분산행렬 X 계산
- 7) 상태 상호분산행렬과 상태 피드백 제어법칙 (15)를 이용하여 제어 상호분산행렬 $U (= G X G^T)$ 와 비선형 요소에 대한 입력의 표준편차 σ_z 계산
- 8) 비선형 요소에 대한 입력의 추정된 표준편차 σ_z^R 와 계산된 표준편차 σ_z^C 를 비교한다. 그 결과가 만족스럽지 않으면 σ_z 를 수정된 Newton-Raphson 방법을 이용하여 계산된 표준편차 σ_z^C 를 수정하여 새로 추정된 표준편차 σ_z^R 를 가지고 단계 4)로 되돌아가 반복 수행한다. 만일 모든 비선형 요소에 대하여 σ_z^R 와 σ_z^C 의 차가 허용오차 범위 내에 있으면 제어시스템 설계를 마치게 된다.
- 9) 설계된 제어시스템의 해석 및 시뮬레이션
그리고 극점배치 제어기 설계에 대한 수치적 절차가 Fig.3에 표시되어 있다.

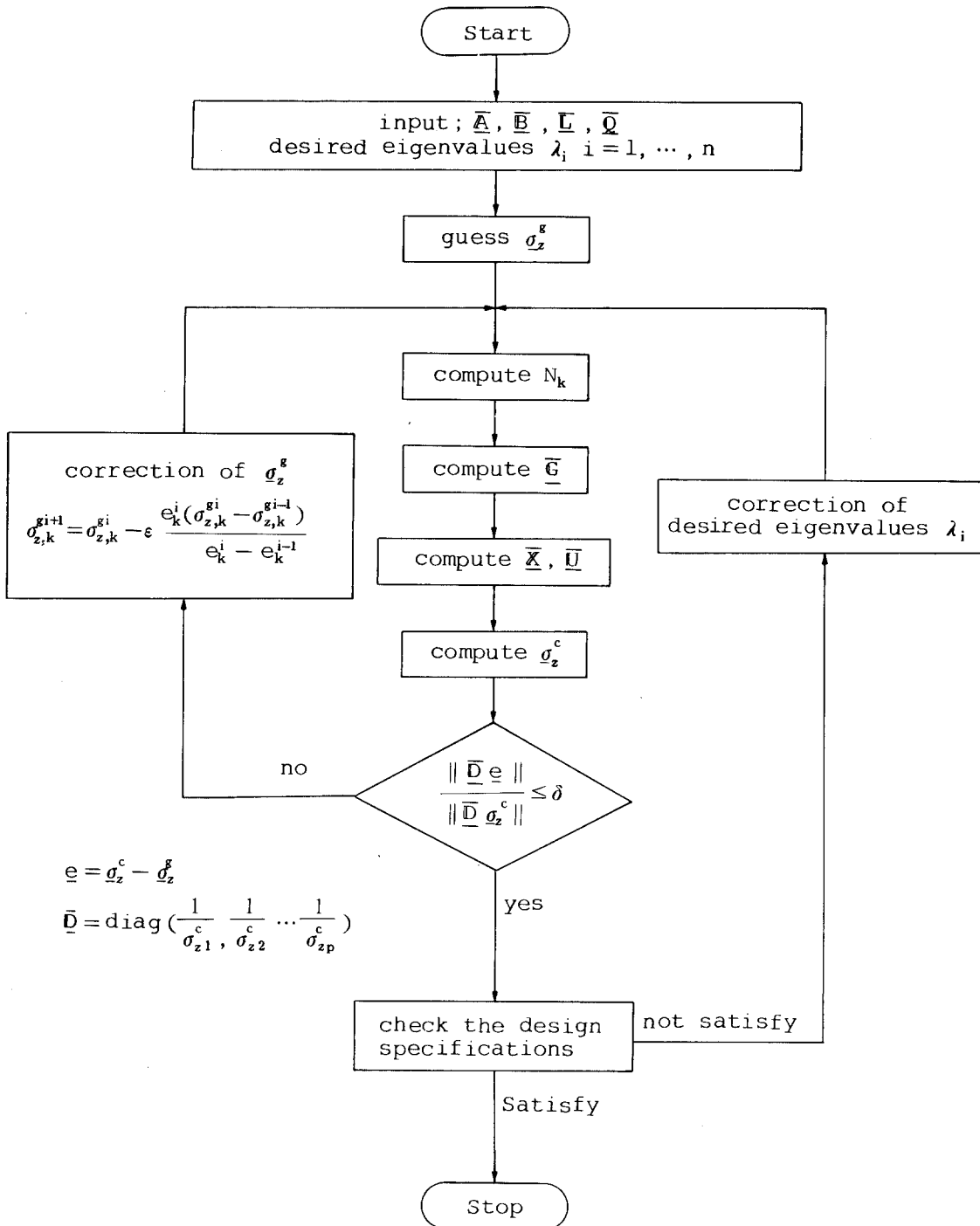


Fig. 3 Flowchart of Numerical Procedure for Controller Design

이제 Fig.3의 수치적 절차를 간단히 설명하기로 한다. 이것은 근본적으로 다변수 비선형 확률 시스템에 대한 제어기 설계를 위하여 페루프 시스템의 특성방정식과 Lyapunov 식을 연립해서 반복적으로 해를 구하는 컴퓨터 프로그램이다. 우선 프로그램의 입력으로서 시스템 행렬(A, B, L), 외란의 강도(Q) 그리고 바람직한 페루프 고유값 λ_i 가 주어져야 한다. 그리고 기술함수계인이 미지의 비선형 요소에 대한 입력의 표준편차 σ_z 의 함수이므로 σ_z 를 추정해야 한다.

σ_z 의 추정값은 비선형 요소를 무시한 제어 시스템의 응답으로부터 계산한 값으로 선정한다. 추정된 표준편차 σ_z 값을 가지고 비선형 요소에 대한 기술함수계인을 계산한다. 이제 소프트웨어 POLESYS II [8]를 이용하여 통계학적으로 선형화된 다변수 시스템에 대하여 가능한 한 제어력을 작게 사용하면서 바람직한 위치에 페루프 극점을 배치시킬 수 있는 제어 계인행렬 G를 선정한다. 다음 고유벡터 분리 방법(eigenvector decomposition method) [9, 10]에 의하여 Lyapunov 식의 해를 구하여 상태 상호분산행렬 X, 제어 상호분산행렬 U 그리고 비선형 요소에 대한 입력의 표준편차 σ_z^c 를 계산할 수 있다. 이 때 비선형 요소에 대한 입력의 추정된 표준편차 σ_z^g 와 계산된 표준편차 σ_z^c 의 차의 수렴 정도를 다음 식을 이용하여 조사한다.

$$\frac{\|De\|}{\|\sigma_z^c\|} \leq \delta \dots\dots\dots (33)$$

여기서

$$e = \sigma_z^c - \sigma_z^g$$

$$D = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{z1}^c & & 0 \\ & 1/\sigma_{z2}^c & \\ 0 & & \dots \\ & & & 1/\sigma_{zp}^c \end{bmatrix}$$

그리고 δ 는 허용오차로서, 일반적으로 컴퓨터 정확도의 제곱근을 허용오차의 크기로 추천한다. 식(33)이 만족되지 않으면 수정된 Newton-Raphson 방법을 이용하여 σ_z 를 수정한다. 여기서 파라미터 ϵ 은 루프(loop)의 반복 횟수(i)의 함수로서 $0 < \epsilon \leq 1$ 에서 값을 갖는다. 예를 들면, $1 \leq i \leq 10$ 일 때 $\epsilon = 1$, $11 \leq i \leq 20$ 일 때 $\epsilon = 0.5$, 등등이다. 그리고 수정하여 새로 추정한 σ_z 를 가지고 다시 기술함수계인 N을 계산한다. 한편 식(33)이 만족되면 rms 출력, rms 제어 입력 그리고 과도응답에 대한 설계사양을 검토한다. 만일 만족스럽지 않으면 바람직한 페루프 고유 값을 가능한 범위 내에서 수정하여 설계 사양이 만족될 때까지 프로그램을 계속한다.

이 프로그램은 하드 비선형 요소를 포함한 다변수 비선형 확률 시스템에서 비선형 효과를 고려할 수 있는 제어기를 설계할 수 있도록 한다. 또한 역 기술함수기법(inverse describing function techniques) [11, 12]을 이용한다면, 입력의 크기에 따라 적용할 수 있는 비선형 제어기를 설계하는 데 이 프로그램이 이용될 수 있다.

4. 설계 예

다변수 비선형 확률 시스템에 대한 극점배치 제어기 설계 소프트웨어를 구체적으로 적용해 보기 위하여, 학술적인 설계예로서 항공기 보잉 707을 선정하기로 한다.

이 플랜트는 2개의 입력, 2개의 출력 그리고 5개의 상태변수를 갖는 다변수 시스템으로 가정한다.[13] 또한 구동기의 포화에 의한 비선형 효과를 고려하고 폭풍우에 의한 확률입력을 고려함으로써 비선형 확률 다변수 시스템의 좋은 예가 된다. Fig.4는 rolling과 yawing 운동을 하는 항공기의 입력과 상태변수들을 표시한

것이다. 그리고 Fig.5는 제어시스템의 개략도이다.

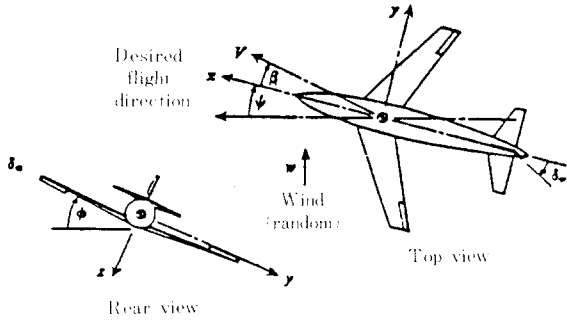


Fig.4 Nomenclature for Lateral Motion Control of an Aircraft

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{rudder} \\ \text{deflection} \\ \text{aileron} \\ \text{deflection} \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0297 & -1 & 0 & 0.0438 & 0 \\ 0.331 & -0.0042 & -0.0461 & 0 & 0 \\ -1.135 & 0.1286 & -0.7949 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.3807 & 0.0671 \\ 0.0404 & 1.587 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -0.0297 \\ 0.331 \\ -1.135 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

식 (34)에서 \tilde{u} 는 통계학적 선형화 기법을 이용하여 다음과 같이 준-선형화될 수 있다.

$$\tilde{u}_i = N_i u_i, \quad i = 1, 2 \dots \dots \dots (35)$$

여기서

$$N_i = \text{erf} \frac{u_{mi}}{\sqrt{2} u_{i\text{rms}}}, \quad i = 1, 2 \dots \dots \dots (36)$$

그리고 제어력의 포화값 $u_m = 6^\circ$ 로 가정한다. 따라서 준-선형화된 시스템의 상태방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + BNu + Lw \dots \dots \dots (37)$$

여기서

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}$$

이제 다음의 페루프 특성방정식과 Lyapunov 식을 연립해서 해를 구하여 제어제인행렬 G 를 선정하기로 한다.

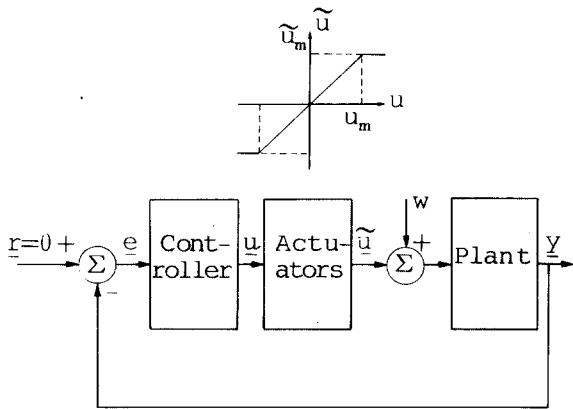


Fig.5 Schematic Diagram of Control System

이 시스템에 대한 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{u} + Lw \dots \dots \dots (34)$$

여기서

$$x = \begin{Bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \rho \\ \phi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{sideslip angle} \\ \text{yaw rate} \\ \text{roll rate} \\ \text{roll angle} \\ \text{yaw angle} \end{Bmatrix},$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BNG}| = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BNG})\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{BNG})^T + \mathbf{LQL}^T = 0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

그리고 세어시스템을 설계하기 위하여 다음과 같은 설계사양들을 고려하기로 한다.

- 1) 정착시간 τ_s 가 20 초 보다 작아야 한다.
- 2) roll angle 과 yaw angle 의 표준편차 인 σ_ϕ 와 σ_ψ 가 3° 이내 이어야 한다.
- 3) 제어입력 \tilde{u}_1 과 \tilde{u}_2 의 rms 값이 5° 이내 이어야 한다.

위의 설계사양들을 만족시키기 위하여 바람직한 페루프 극점들을 Fig.6 과 같이 배치시켰다. 대표 복소극점의 시정수는 5 초이고 감쇠비는 0.707 이 되도록 하였으며 나머지 3 개의 극점은 대표극점의 고유진동수의 5 배 되는 위치에 수성된 Butterworth 필터 모형으로 배치함으로써 적절한 제어입력의 크기와 기대한 성능을 얻도록 하였다.

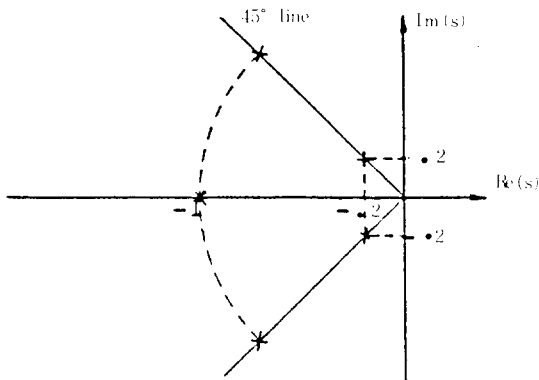


Fig.6 Selected Pole Pattern

외란강도의 크기 q 가 0.01 가 rad^2/sec 일 때 비선형 효과를 무시한 경우와 비선형 효과를 고려한 경우에 대한 기술함수행렬 \mathbf{N} 과 제어게인 행렬 \mathbf{G} 는 각각 다음과 같다.

i) 비선형 효과를 무시한 제어시스템

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.411 & 0.916 & -0.265 & -0.862 & 1.017 \\ 1.006 & -0.068 & 1.041 & 1.288 & 0.317 \end{bmatrix}$$

ii) 비선형 효과를 고려한 제어시스템

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0.663 & 0 \\ 0 & 0.579 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.627 & 1.633 & -0.709 & -1.245 & 1.698 \\ 1.602 & 0.150 & 1.727 & 2.018 & 0.400 \end{bmatrix}$$

그리고 Fig.7 은 외란강도 q 에 따른 구동기에 대한 기술함수계인과 다음과 같이 표준화된 제어게인 K_{11} 과 K_{21} 을 표시한 것이다.

$$K_{11} = G_{11c} / G_{11n}, \quad K_{21} = G_{21c} / G_{21n}$$

여기서 첨자 c 는 비선형 효과를 고려한 경우 그리고 첨자 n 은 비선형 효과를 무시한 경우에 대한 제어계인을 의미한다.

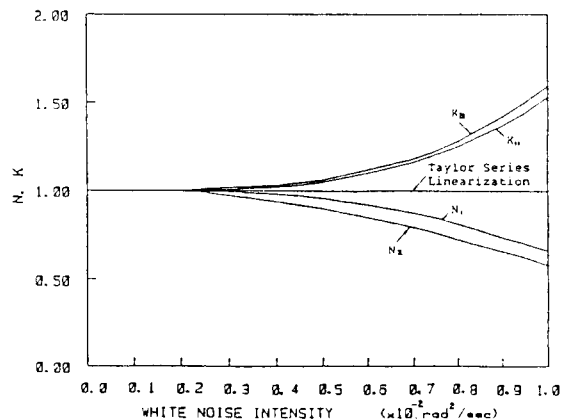


Fig.7 Describing Function Gains and Normalized Control Gains versus White Noise Intensity

비선형 효과를 무시한 경우에는 외란의 크기에 관계없이 제어계인행렬의 크기가 일정하지만, 비선형 효과를 고려한 경우에는 외란의 크기가 증가함에 따라 기술함수계인이 감소하고 제어계인은 비선형 효과를 무시한 경우에 비해 증가하게 된다. 외란의 크기가 작은 경우에는 비선형 효과를 무시하고 설계해도 좋으나 외란의 크기가 증가함에 따라 비선형 효과를 고려해야 한다는 것을 Fig.7로부터 알 수 있다. 그리고 외란의 크기의 변화가 크다면 제어계인의 변화가 크게 되므로, 이 경우에는 이것에 적응할 수 있는 비선형 제어기 설계가 추천된다.

Fig.8은 외란상도 $q = 0.01 \text{ rad}^2/\text{sec}$ 일 때의 roll angle의 평균을 이론적으로 추정 한 값과 Monte Carlo 시뮬레이션 결과를 비교한 것이고, Fig.9는 roll angle의 표준편차를 Monte Carlo 시뮬레이션한 결과이다. 여기서 system 1은 비선형 효과를 무시한 경우 그리고 system 2는 비선형 효과를 고려한 경우를 의미한다.

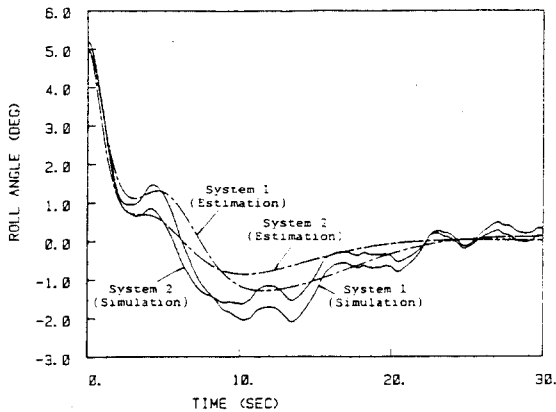


Fig.8 Comparison of Estimated Mean Responses of Roll Angle with 300 Run Monte Carlo Simulation Results ; $q = 0.01 \text{ rad}^2/\text{sec}$

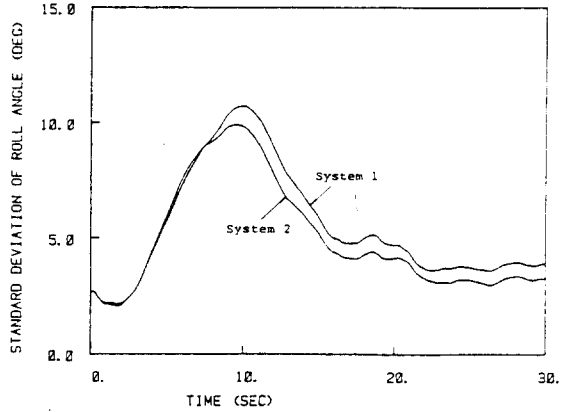


Fig.9 300 Run Monte Carlo Simulation of Standard Deviation of Roll Angle ; $q = 0.01 \text{ rad}^2/\text{sec}$

그리고 Table 1은 system 1과 system 2에 대한 제어시스템 성능을 비교한 것이다.

system	performance	rms values (deg)				2% settling time (s)	% overshoot of roll
		σ_ϕ	σ_ψ	$\tilde{u}_1 \text{ rms}$	$\tilde{u}_2 \text{ rms}$		
system 1	estimation	2.73	2.42	2.47	2.69	22.3	25.9
	simulation	3.80	2.68	3.76	4.19		
system 2	estimation	2.75	2.09	4.14	4.32	19.3	17.1
	simulation	3.13	2.29	4.24	4.47		

Table.1 Comparison of the Performance of Control Systems

위의 Table 1로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다. system 2에 대한 system 1의 성능을 비교하면, rms 제어입력은 9% 감소, rms 상태변수는 18% 증가, 정착시간은 16% 증가, 그리고 오버슈트는 51% 증가된다. 따라서 system 2의 성능이 system 1에 비해 좋다는 것을 알 수 있다. 그리고 시뮬레이션 결과와 추정된 결과의 차를 시뮬레이션 결과로 나눈 상대오차가 system 1의 경우는 27% 그리고 system 2의 경우는 7%로써 system 2의 경우가 system 1의 경우에 비해 이론적으로 예측한 값의 신뢰도가 크다.

5. 결 론

산업이 발달함에 따라 시스템이 점차로 복잡해지고 정밀한 제어가 요구되어 다변수 제어시스템 설계에 대한 중요성이 인식되는 이 시점에서 본 연구는 '쿨롱 마찰, 백래쉬 혹은 포화'와 같은 비선형 효과를 고려하여 다변수 제어시스템을 설계할 수 있는 방법을 제시하였다. 구체적인 설계 예를 통하여 비선형 효과가 큰 경우에는 비선형성을 고려하여 설계한 제어시스템의 성능이 비선형성을 무시하고 설계한 제어시스템의 성능보다 향상되었다는 것을 알 수 있고, 또한 이론적으로 예측한 값의 신뢰도도 높다는 것을 보였다.

본 연구에서 개발한 프로그램은 확률(stochastic) 시스템뿐만 아니라 가상적인 확률 입력을 고려함으로써 하드(hard) 비선형 요소를 갖고 있는 확정(deterministic) 시스템에도 적용할 수 있으며, 작동범위가 큰 경우에는 입력의 크기에 따라 적용할 수 있는 비선형 제어기 설계의 기초가 될 수 있다.

參 考 文 獻

- 1) Gelb, A. and Vander Velde, W.E., "Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design", McGraw-Hill, 1968.
- 2) Hedrick, J.K. and Youcef-Toumi, K., "Exact Multi-Input Pole Placement by Linear-Quadratic Synthesis", Proc. ACC, PP.905-911, 1983.
- 3) Beaman, J.J. "Statistical Linearization for the Analysis and Control of Nonlinear Stochastic Systems", Sc.D. Thesis, Dept. of Mech. Eng., M.I.T., 1978.
- 4) Phaneuf, R.J., "Aproximate Non-linear Estimation", Ph. D. Thesis, Dept. of Aero. and Astro., M. I.T., 1968.
- 5) 김종식, "선형 제어시스템 공학", 청문각, 1988.
- 6) Brogan, W.L., "Modern Control Theory", Prentice-Hall, Inc., 1982.
- 7) Srinathkumar, S., "Eigenvalue/Eigenvector Assignment Using Output Feedback", IEEE Trans. on AC. Vol. AC-23, No.1, PP.79-81, 1978.
- 8) Hedrick, J.K., Youcef-Toumi, K. and Ha, C. M., "POLESYS II User's Guide", Dept. of Mech. Eng., M.I.M., 1983.
- 9) Potter, J.E., "Matrix Quadratic Solutions", SIAM, J. of Applied Math., Vol. 14, No.3, PP.496-501, 1966.
- 10) Bryson, A.E. and Hall, W.E., "Optimal Control and Filter Synthesis by Eigenvector Decomposition", SUDAAR No.436, Stanford Univ., 1971.
- 11) Suzuki, A. and Hedrick, J. K., "Nonlinear Controller Design by an Inverse Random Input Describing Function Method", Proc. ACC, PP.1234-1241, 1985.
- 12) Kim, J.S., "Nonlinear Multivariable Control Using Statistical Linearization and Loop Transfer Recovery", Ph. D. Thesis, Dept. of Mech. Eng., M.I.T., 1987.
- 13) Bryson, A.E. and Ho, Y.C., "Applied Optimal Control", Hemisphere Publishing Corporation, 1975.