

쌍선형변환에 의한 연속시간계의 설계

金相奉 · 安輝雄

부산수산대학

(1989년 7월 20일 접수)

Design of Continuous-Time System Using Bilinear Transformation

KIM, Sang Bong and AN, Hui Ung

National Fisheries University of Pusan

(Received July 20, 1989)

A pole assignment problem in a specified region is solved using a bilinear transformation method. It is well known that the problem designing discrete-time system or vice versa is called redesign problem. But there is not so much study that is a cyclic type of design, i.e. from continuous system to discrete system and from the latter to the former system. In this paper, the cyclic type of design for the continuous-time system is proposed using the bilinear transformation. In the view of a pole assignment method with poles in a specified region, it will be possible to design a regulator or a servo system considering damping ratio, stability degree and bandwidth which are resulted to the characteristics of the closed-loop system.

서 론

다변수제어계의 설계문제에 있어, 문제의 해결은 시스템의 특성을 나타내는 파라미터의 선택에 따라 크게 의존한다. 예를들면, 최적제어계의 설계를 생각하면, 설계자가 바라고 있는 페루우프계의 특성인 과도특성이나 안정도 등을 고려할 경우, 반복적인 설계에 의해 그 목적이 달성될 수 있다고 하는 것은 잘 알려진 사실이다. 이와 같은 설계법은 계산기를 이용해서 충분히 형식화되어 있는 어떤 적절한 방식에 의해 해석적으로 설계를 행하는 것에 지나지 않는다.

위에서 서술한 것과 같은 설계상의 문제점을 피하는 하나의 방법으로서, Kim¹⁾은 D -극배치 방법을 제안했다. 즉, 연속계의 설계문제를 연속계의 설계방법에만 구속시키지 않고 이산계의 설계방법으로서 잘 알려져 있는 방법을 이용해서

문제를 해결할 수 있는 하나의 방법을 제안했다.

연속계로 부터 이산계로의 설계문제는 재설계 문제로서 알려져 있다²⁾. 그러나 연속계로 부터 이산계로 다시 연속계로 되돌리는 설계방법은 많이 연구되어 있지 않다.

본 논문에서는 이와 같은 사이클적인 설계방법을 쌍선형변환설계법이라 이름 붙이고, 연속계의 설계문제에 있어, 연속계의 설계방법 그대로는 설계 불가능한 하나의 문제, 즉 複素左半平面上의 어떤 지정한 폐영역내의 극배치 문제를 쌍선형변환방법을 이용해서 해결하는 방법을 제안했다.

쌍선형변환에 의한 s-평면과 z-평면과의 관계

이 절에서는 쌍선형변환에 의해 주어진 시스템의 행렬이 변환 되었을 경우, 그 고유치들 사이

에는 어떤 관계로 주어지게 되는가를 보이도록 한다. 즉, 주어진 시스템의 행렬과 변환된 시스템의 행렬사이의 고유치 관계를 분명히 한다.

행렬 $A \in R^{n \times n}$ 의 고유치를 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 이라고 한다. 그때 A 에 대해 그 극을 나타내는 다항식을

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= |\lambda I - A| \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned} \quad (2-1)$$

이라 한다. 어떤 스칼라 다항식 $\phi(\mu)$ 는

$$\phi(\mu) = \alpha_0(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \cdots (\mu - \mu_n) \quad (2-2)$$

와 같이 주어진다고 한다. 행렬 A 에 대해, (2-2)식 중의 λ 대신에 A 를 대입하면

$$\phi(A) = \alpha_0(A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I) \cdots (A - \mu_n I) \quad (2-3)$$

와 같이 나타내어진다. (2-3)식의 양변에 대해 그 행렬식을 얻는다면, 스칼라함수 $\phi(\mu)$ 에 대해

$$\begin{aligned} |\phi(A)| &= \alpha_0^n |A - \mu_1 I| \\ &\quad |A - \mu_2 I| \cdots |A - \mu_n I| \\ &= (-1)^n \alpha_0^n \prod_{i=1}^n \Delta(\mu_i) \\ &= (-1)^n \alpha_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\mu_i - \lambda_j) \\ &= \prod_{i=1}^n \phi(\lambda_i) \end{aligned} \quad (2-4)$$

와 같은 관계를 얻을 수 있다.

지금 생각하는 스칼라함수를

$$g(s) = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}, \quad f(z) = \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} \quad (2-5)$$

라고 한다. 단, $T > 0$ 이다. 이때

$$z = |z| e^{j\theta} \quad (2-6)$$

라고 하면, $f(z)$ 는

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{T} \frac{|z|^2 - 1 + j2|z| \sin \theta}{(|z| \cos \theta + 1)^2 + |z|^2 \sin^2 \theta} \\ &= \xi + j\beta \end{aligned} \quad (2-7)$$

와 같이 쓰여질 수 있다. 단

$$\xi = \frac{2}{T} \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 2|z| \cos \theta + 1} \quad (2-8)$$

$$\beta = \frac{4}{T} \frac{|z| \sin \theta}{|z|^2 + 2|z| \cos \theta + 1} \quad (2-9)$$

어떤 행렬 Φ 에 대해 그 고유치가 z 평면상의 단위원 내부, 즉, 그림1에 나타낸 것과 같은 중심 $\alpha + j0$, 반경 r 인 영역 D 내부에 있다고 한다. 즉, 그 고유치의 집합은

$$\lambda_\Phi = \{\lambda_i : \lambda_i(\Phi) \in D\} \quad (2-10)$$

이다.

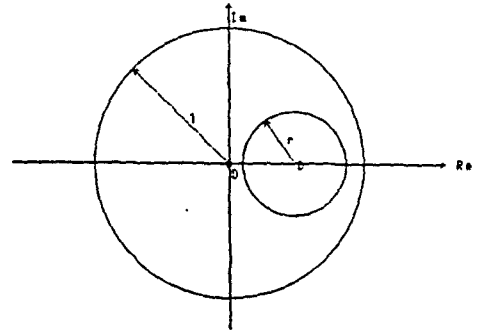


Fig.1. Disk in the unit circle.

그때 (2-5)식과 같은 쌍선형변형에 의해 (2-10)식의 영역 D 는 s -평면 내의 좌반평면 w 로 사상된다(Fig.2). 그림2에서 각 파라미터 값들은 다음과 같이 주어진다.

$$a_1 = \min Re s = \min_{\theta} \xi = \frac{2}{T} \frac{\alpha + r - 1}{(\alpha + r) + 1}$$

$$a_2 = \max Re s = \max_{\theta} \xi = \frac{2}{T} \frac{(\alpha - r) - 1}{(\alpha - r) + 1}$$

$$b_1 (= -b_2) = \max Im s = \max_{\theta} \beta$$

$$\psi \leq \max_{\theta} \{ \tan^{-1} r / ((a_1 + a_2)^2 / 2 - r^2)^{1/2} \},$$

$$\tan^{-1} (b_2 / ((a_1 + a_2)^2 / 2 - b_2^2)^{1/2}), \quad r = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

여기서, $Re s$ 와 $Im s$ 는 각각 복소수 s 의 실수부와 허수부의 값을 의미한다. 따라서 감쇄비(damping ratio) μ 는

$$\mu = \tan^{-1} \psi$$

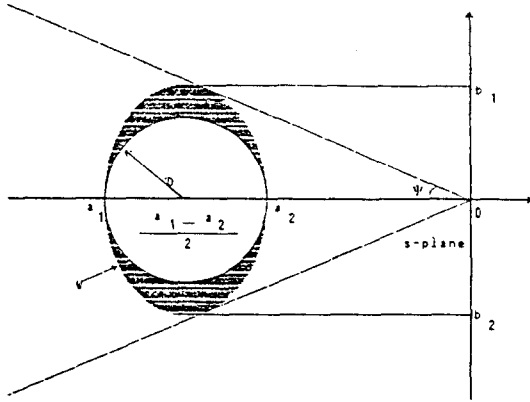


Fig.2. Disk in a specified region.

로 주어진다²⁾¹²⁾. 이와 같은 행렬 Φ 의 고유치와 행렬 $f(\Phi)$ 의 고유치 사이에는

$$f(\mu_i) = \lambda_i [f(\Phi)] \in W$$

의 관계가 있는 것을 알 수 있다. 단 $\mu_i, i=1, 2, \dots, n$ 은 행렬 Φ 의 고유치이다.

쌍선형변환 설계방법에 의한 극배치

연속시스템 $\Sigma(A, B, C)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

를 생각한다. 여기서 x 는 n 차원 상태벡터, u 는 m 차원 입력벡터, y 는 p 차원 출력벡터, A, B, C 는 적당한 차원을 가진 시스템 행렬이며, 쌍 (A, B) 는 可制御이고, (A, C) 는 可觀測이라고 한다. 시스템 $\Sigma(A, B, C)$ 에 대해서 그림2에 나타난 것과 같은 영역에 임의로 극배치하는 문제를 생각하면, (3-1)의 시스템에 대한 설계방법 그대로는 어려움이 있다. 여기서는 그림 2에 보인 것과 같은 영역 W 내에 페루프계의 극배치를 가능하게 하는 문제를 쌍선형변환 설계방법을 이용해서 생각하기로 한다. 즉, 시스템 $\Sigma(A, B, C)$ 의 극배치 문제를 이산시간계 $\Sigma(\Phi, \Gamma, G)$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= Gx_k \end{aligned} \quad (3-2)$$

의 극배치문제로 부더 해결하기로 한다. 단, x_k, u_k, y_k 는 $\Sigma(A, B, C)$ 의 차원과 같으며, 시스템 행렬 Φ, Γ, G 는 $\Sigma(A, B, C)$ 의 쌍선형변환에 의해 얻어진 것으로 한다. 그때 다음과 같은 쌍선형변환 :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\rightarrow \frac{x_{i+1} - x_i}{T} \\ x(t) &\rightarrow \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \\ y(t) &\rightarrow y_i \\ u(t) &\rightarrow u_i \end{aligned} \quad (3-3)$$

를 시스템 $\Sigma(A, B, C)$ 에 적용함으로써, 시스템 $\Sigma(\Phi, \Gamma, G)$ 의 시스템 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi &= (I - (T/2)A)^{-1} (I + (T/2)A) \\ \Gamma &= T(I - (T/2)A)^{-1} B \\ G &= C(I - (T/2)A)^{-1} \end{aligned} \quad (3-4)$$

또 시스템 $\Sigma(\Phi, \Gamma, G)$ 에 다음과 같은 쌍선형변환 :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\rightarrow x(t) + (T/2)x(t) \\ x_k &\rightarrow x(t) - (T/2)x(t) \\ y_k &\rightarrow y(t) \\ u_k &\rightarrow u(t) \end{aligned} \quad (3-5)$$

를 행함으로써 시스템 $\Sigma(A, B, C)$ 의 시스템 행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A &= 2/T(\Phi + I)^{-1}(\Phi - I) \\ B &= 2/T(\Phi + I)^{-1}\Gamma \\ C &= 2G(\Phi + I)^{-1} \end{aligned} \quad (3-6)$$

다음으로 시스템 $\Sigma(A, B, C)$ 와 $\Sigma(\Phi, \Gamma, G)$ 에 각각 다음과 같은 피이드백 :

$$u(t) = Fx(t) \quad (3-7)$$

$$u_k = \hat{F}x_k \quad (3-8)$$

을 행했을 경우의 쌍선형변환 (3.3)과 (3.5)에 의한 페루우프계의 행렬은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi + \Gamma \hat{F} &= (I - (T/2)A - (T/2)BF)^{-1} \\ &\quad (I + (T/2)A + (T/2)BF) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (I - (T/2)A)^{-1} (I + (T/2)A) \\ &+ T(I - (T/2)A)^{-1} \\ &B(I - (T/2)F(I - (T/2)A)^{-1}B)^{-1} \\ &F(I - (T/2)A)^{-1} \times (I + (T/2)A) \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned} A + BF &= 2/T(I + \Phi + \Gamma \hat{F})^{-1}(\Phi - I + \Gamma \hat{F}) \\ &= 2/T(I + \Phi)^{-1}(\Phi - I) \quad (3-10) \\ &+ 4/T(I + \Phi)^{-1}\Gamma(I + \hat{F}) \\ &(I + \Phi)^{-1}\Gamma)^{-1} \hat{F}(I + \Phi)^{-1} \end{aligned}$$

따라서, \hat{F} 와 F 는 다음과 같은 관계로 된다.

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \frac{1}{2}(I - \frac{T}{2}F(I - \frac{T}{2}A)^{-1}B)^{-1} \\ &F(I - \frac{T}{2}A)^{-1}(I + \frac{T}{2}A) \quad (3-11) \\ F &= 2[I + \hat{F}(I + \Phi)^{-1}\Gamma]^{-1} \hat{F}(I + \Phi)^{-1} \end{aligned} \quad (3-12)$$

위에서 보인 연속계와 이산계와의 사이에 대한 쌍선형변환(3-3)과 (3-5)는 페루우프계의 고유치 관계에서 s-평면과 z-평면과의 쌍선형변환:

$$g(z) = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}, \quad f(s) = \frac{1+(T/2)s}{1-(T/2)s} \quad (3-13)$$

을 의미하고 있다는 것은 명백하다.

2장에서 서술한 것으로 부터, (3-10)의 행렬 $(A + BF)$ 의 고유치 $\mu_i, i=1, 2, \dots, n$ 은 행렬 $(\Phi + \Gamma \hat{F})$ 의 고유치 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 에 대한 쌍선형변환(3-13)으로 부터 구해질 수 있다는 것은 분명하다. 즉, μ_i 는

$$\mu_i = \frac{2}{T} \frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1} \quad (3-14)$$

으로 주어져 (3-14)의 값은 행렬(3-10)의 고유치와 같게된다. 다음의 정리는 시스템 $\Sigma(A, B, C)$ 와 $\hat{\Sigma}(\Phi, \Gamma, G)$ 에 대한 페루우프계의 극과 영점의 고유치의 관계를 나타내고 있다. 즉, 이상의 결과들을 다음과 같이 정리할 수 있다.

[보조정리 1] 시스템 $\hat{\Sigma}(\Phi, \Gamma, G)$ 의 페루우프계에 대한 극을 $\{z^p_i; i=1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고, 영점을 $\{z^z_i; i=1, \dots, n\}$ 라고 한다. 그때, 시스템 $\Sigma(A, B, C)$ 의 페루우프계의 극과 영점은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \{s^p_i; s^p_i &= \frac{2}{T} \frac{z^p_i - 1}{z^p_i + 1}, \quad i=1, 2, \dots, n\} \\ \{s^z_i; s^z_i &= \frac{2}{T} \frac{z^z_i - 1}{z^z_i + 1}, \quad i=1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

단, 영점은 무한원점도 포함한다.

이산계 $\hat{\Sigma}(\Phi, \Gamma, G)$ 의 페루우프계의 극을 어떤 특정영역에 배치 가능하게 하는 상태 피이드백 則은 쌍선형변환에 의해 $\Sigma(A, B, C)$ 의 페루우프계의 극을 어떤 희망하는 임의의 영역에 배치할 수 있도록 하는 상태 피이드백으로 변환할 수 있다는 것은 분명하다.

위에서 보인 것과 같은 설계를 행하기 위해, 이산계 $\hat{\Sigma}(\Phi, \Gamma, G)$ 의 상태 피이드백행렬 \hat{F} 는 페루우프계의 극을 z-평면내 중심 $\alpha + jo$, 반경 r 인 원판내부에 배치시키는 것으로 한다.

즉, \hat{F} 는

$$\begin{aligned} F_\lambda &= \{\hat{F}; \lambda_i(\Phi + \Gamma \hat{F}) \in D \text{ with center } \alpha + \\ &jo, \text{ radius } r, \\ 0 \leq \alpha < 1, \quad r < 1, \quad i=1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (3-15)$$

와 같이 구해진다.

(3-15)을 만족하는 制御則을 구하는 구체적인 방법은 문헌1)13)17)등에서 주어진 것과 동일한 방법으로 구할 수 있으므로, 여기서는 증명 없이 그 결과만 나타내도록 한다.

[보조정리 2] 시스템 $\hat{\Sigma}(\Phi, \Gamma, G)$ 와 (3-8)의 상태 피이드백에 대해서, 행렬방정식

$$-\alpha(\Phi + \Gamma \hat{F})^*P - \alpha P(\Phi + \Gamma \hat{F}) + (\Phi + \Gamma \hat{F})^*P(\Phi + \Gamma \hat{F}) + (\alpha^2 - r^2)P = -Q \quad (3-16)$$

을 생각한다. 여기서, *는 공액전치(conjugate transpose)를 의미하며, Q 는 正定행렬이다. 그때, 행렬 $(\Phi + \Gamma \hat{F})$ 의 고유치가 (3-15)를 만족하기 위한 필요충분 조건은 (3-16)을 만족하는 正定행렬 P 가 존재하는 것이다.

[정리1]¹⁾ 시스템 $\hat{\Sigma}(\Phi, \Gamma, G)$ 에 대해 상태 피이드백칙

$$\begin{aligned} u_k &= -(r^2R + \Gamma^T P \Gamma)^{-1} \Gamma^T P(\Phi - \alpha I)x_k \\ &= \hat{F}x_k \end{aligned} \quad (3-17)$$

은 (3-15)를 만족한다. 단, P 는 리카치방정식

$$P = \frac{(\Phi - \alpha I)^T}{r} P \frac{(\Phi - \alpha I)}{r} + G^T G - \frac{(\Phi - \alpha I)^T}{r} P \Gamma (r^2 R + \Gamma^T P \Gamma)^{-1} \Gamma^T P \frac{(\Phi - \alpha I)}{r} \quad (3-18)$$

의 正定대칭해이며, R 은 正定행렬이다.

위에서 보인 정리에 의해 상태 피이드백(3-17)로 주어진 페루우프계는 그 극을 중심 α , 반경 r 인 원판내부에 존재하도록 하여, 쌍선형변환(3-5)를 이용하면, 구하는 시스템 $\Sigma(A, B, C)$ 의 상태 피이드백 칩은

$$u(t) = Fx(t) = 2[I + \hat{F}(I + \Phi)^{-1}\Gamma]^{-1}\hat{F}(I + \Phi)^{-1}x(t) \quad (3-19)$$

으로 주어진다. 단, \hat{F} 는 (3-17)과 같다. 그때, 페루우프계 행렬 $(A + BF)$ 의 극은 그림2와 같은 영역 W 내에 존재하게 된다.

「系 1」시스템 $\Sigma(\Phi, \Gamma, G)$ 에 대해 상태 피이드백 칩

$$u_k = -(r^2 R + \Gamma^T P \Gamma)^{-1} \Gamma^T P \Phi x_k = F x_k$$

을 생각한다. 그때, 시스템 $\Sigma(A, B)$ 에 대한 상태 피이드백

$$u(t) = Fx(t) = 2[I + \hat{F}(I + \Phi)^{-1}\Gamma]^{-1}\hat{F}(I + \Phi)^{-1}x(t)$$

는 그 페루우프계의 극을 그림3에 나타낸 것과 같은 영역 L 내에 배치되도록 한다.

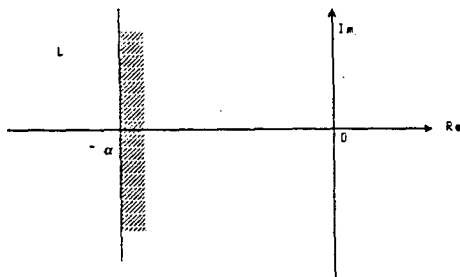


Fig.3. Region L with stability degree α .

예 제

쌍선형변환에 의한 극배치법을 실제로 증명하기 위해, 다음과 같은 선형시 불변 시스템을 생각한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

샘플링시간 $T=0.1[\text{sec}]$ 에서 쌍선형변환에 의한 이산시간 시스템은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k \quad (4.2)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0.105 & 0.1 \\ 0 & 1.105 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0.105 & 0.005 \\ 0.105 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

시스템 (4.2)에 대해 중심 $\alpha=0.5$, 반경 $r=0.3$ 인 원판영역내 D 에 극배치하는 것으로 한다. 이때, 정리에 의해 피이드백 행렬 \hat{F} 는 다음과 같이 구해진다.

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} -1.76 & -3.8 & -0.27 \\ -15.13 & 15.12 & -7.15 \end{pmatrix}$$

$\Phi + \Gamma \hat{F}$ 의 극은

$$\lambda_i(\Phi + \Gamma \hat{F}) = \{0.68, 0.534, 0.521\} \in D$$

이다.

(3.19)식에 의해 (4.1)의 피이드백 행렬은

$$F = \begin{pmatrix} -2.87 & -4.44 & -0.43 \\ -23.54 & 23.54 & -9.95 \end{pmatrix}$$

과 같이 얻어져, 시스템 (4.1)의 페루우프계의 극 $\lambda_i(A + BF)$ 는

$$\lambda_i(A + BF) = \{-3.88, -6.08, -6.31\}$$

과 같이 주어진다. 극 $\lambda_i(A + BF)$ 는 s -평면의 실부 $[-2.23, -13.3]$ 의 범위에 그 값을 가지는 것을 알 수 있다. 여기서, 값 $[-2.23, -13.3]$ 는 z -평면상의 원(중심 $\alpha=0.5$, 반경 $r=0.3$)을 샘플링시간 $T=0.1[\text{sec}]$ 로 쌍선형변환했을 때의 s -평면내 실축상의 최대치와 최소치이다.

결 론

본 논문에서는 연속 시간계의 설계 문제에 있어, 연속계의 설계방법 그대로서는 설계 불가능한 하나의 문제, 즉, 複素左半 平面上의 어떤 지정된 폐영역내의 극배치 문제를 쌍선형변환법을 이용해서 해결하는 하나의 설계방법을 제안했다. 실제적인 시스템 설계의 경우, 페루우프 계의 특성근을 정확히 지정된 위치에 배치하여야만 할 경우는 드물고, 대개의 경우, 어떤 희망하는 영역내에 배치하면 충분하다. 특히 구체적으로 극을 지정하는 지침에 결핍되어 있을 경우나, 페루우프 계의 특성인 속응성, 진동특성, 안정도 등을 고려할 경우, 그 극을 지정 위치에 배치하기 보다는 어떤 지정된 영역내에 배치하는 쪽이 유효하다고 할 수 있으므로, 다변수제어계의 설계 문제에 있어, 그 가치가 크다고 할 수 있다.

參考文獻

- 1) Furuta, K. and Kim, S. B.(1987): Pole Assignment in a Specified Disk. IEEE Trans. Auto. Control, Ac-32(5), 423-427.
- 2) Kuo,B.C.(1980): Digital Control Systems. Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- 3) Kuo,B.C. and D.W. Peterson(1973): Optimal Discretization of Continuous Data Control System, Automatica 9, 125-129.
- 4) Kleinman, D.L. and P.K. Rao(1977): Continuous-Discrete Gain Transformation Methods for Linear Feedback Control. Automatica 13, 425-428.
- 5) Melzer,S.M. and B.C. Kuo(1971): Sampling Period Sensitivity of the Optimal Sampled Data Linear Regulator. Automatica 7, 367-370.
- 6) Hitz,K.L. and B.D.O. Anderson(1972): Iterative Method of Computing the Limiting Solution of the Matrix Riccati Differential Equation. Proc. IEE, 119(9), 1402-1406.
- 7) Bar-Ness,Y. and A. Halbersberg(1980):

Solution of the Singular Discrete Regulator Problem Using Eigenvector Methods. INT. J. Control 31(4), 615-625.

- 8) Kondo, R. and K. Furuta(1986): On the Bilinear Transformation of Riccati Equations. IEEE Trans. Auto. Control, Ac-31(1), 50-54.
- 9) Jonckheere, E. and R. Li(1987): Generalization of Optimal Hankel-Norm and Balanced Model Reduction by Bilinear Mapping, INT. J. Control 45(5), 1751-1769.
- 10) Safonov,M.G., E.A. Jonckheere, M. Verma and D.F.N. Limebeer(1987): Synthesis of Positive Real Multivariable Feedback Systems. INT. J. Control 45(3), 817-842.
- 11) Churchill,R.V., J.W. Brown and R.F. Verhev(1974): Complex Variables and Applications. McGraw-Hill International Book Company.
- 12) Astrom, K.J. and B. Wittenmark(1984): Computer Controlled Systems, Theory and Design. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs
- 13) Kim,S.B.(1988): Design of Multivariable Control Systems by a Linear Fractional Transformation Approach. Doctoral Thesis Tokyo Institute of Technology.
- 14) Gantmacher,F.R.(1960): The Theory of Matrices. Chelsea Publishing Company.
- 15) Kwakernaak,H. and R. Sivan(1972): Linear Optimal Control Systems. Wiley - Interscience.
- 16) Groutage,F.F., L.B. Volfson and A.M. Schneider(1987): s - Plane to z - Plane Mapping Using a Simultaneous Equation Algorithm Based on the Bilinear Transformation. IEEE Trans. Auto. Control Ac-32(7), 635-637.
- 17) Kim, S.B. and K. Furuta(1988): Regulator Design with Poles in a Specified Region INT. J. Control 47(1), 143-160.