

비등온 방사공정에서의 Draw Resonance

현 재 천

고려대학교 공과대학 화학공학과
(1989년 9월 6일 접수)

Draw Resonance in Non-isothermal Spinning

Jae Chun Hyun

Department of Chemical Engineering, Korea University, Anam-Dong, Seoul 136-701, Korea
(Received September 6, 1989)

요 약

임계연신비로 특징지어지는 비등온 방사공정에서의 Draw Resonance 발생을, White의 변형속도에 따라 변하는 물질의 이완시간 모델에 의한, convected Maxwell 유체의 방사모형을 사용해서 연구했다. 임계연신비의 계산에는 다른 연구자들이 이용하는 통상의 복잡한 수치계산인 eigenvalue 방법을 쓰지 않고 선평하는 동적 waves에 근거한 간단한 Hyun의 이론을 사용했다. 그 결과 Stanton Number와 냉각 공기온도로서 나타내지는 방사공정의 냉각이 공정을 안정시킨다는 것이 밝혀졌다. 다시 말해서 연신점도가 변형후화인 유체가거나, 변형박화인 유체가거나에 상관없이, 항상 Stanton Number가 커지거나 또는 냉각 공기온도가 낮아질수록(즉 냉각효과가 커질 때), 임계연신비가 커지는 것이다(단 변형박화 유체의 일부 구간을 제외하고). 한편 Draw Resonance에 미치는 냉각의 효과는 무차원 이완시간(a Weissenberg Number 혹은 a Deborah Number)이 커질수록 작아진다는 것도 발견됐다. 이것은 Process Time이 작아지면 열전달이 작아지기 때문이다. 이러한 내용들은 다른 연구자들의 결과와도 잘 부합된다.

Abstract—We have studied the onset of draw resonance in non-isothermal spinning processes which is characterized by the critical draw-down ratio, by employing a convected Maxwell fluids model with the White's strain-rate dependent relaxation time. For the computation of this critical draw-down ratio, we have used the simple Hyun's theory based on the traveling kinematic waves, instead of the conventional yet more involved numerical eigenvalue calculation method adopted by other researchers. The results show that the cooling in spinning represented by a Stanton number and the cooling air temperature, stabilizes the spinning process of both strain-thinning and strain-thickening extensional viscosity fluids, i.e., the critical draw-down ratio increases with the increasing Stanton number and the decreasing cooling air temperature. It also has been found that the cooling effect on the draw resonance decreases with the increasing dimensionless relaxation time (a Weissenberg number or a Deborah number). This is due to the fact that as the process time decreases, heat transfer also decreases. These findings agree well with other's results.

Key words: Nonisothermal Spinning/Draw Resonance/Cooling Conditions/Stanton Number/Convected Maxwell Fluids/Relaxation Time Model/Weissenberg Number/Deborah Number/Stability

서 론

방사공정에서 생기는 불안정성인 Draw Resonance 현상에 대해서 1962년 이래 (Christensen[1], Miller[2]) 많은 실험적/이론적 연구가 진행돼 오고 있다(e.g., Bergonzoni & Dicresce[3], Kase & Matsuo[4], Pearson & Matovich[5], Han, *et al.*[6], Fisher & Denn[7], Ishihara & Kase[8], Matsumoto & Bogue[9], Minoshima & White[10]). 이러한 많은 논문들이 발표됐음에도 불구하고, Draw Resonance의 근본적인 문제, 즉 "왜" 이러한 현상이 생기는가에 대해서는 의문이 계속되던 중, Hyun[11]이 Draw Resonance는 Throughput waves의 전파시간(spinneret에서 권취점까지)과 유체의 흐르는 시간과의 상관관계에 기인한다는 이론을 발표했다. 그 후 Denn[12]이 몇 가지의 문점들을 제기했고, 최근 Hyun *et al.*[13]의 수치계산을 통한 의문점의 설명으로 Hyun의 이론이 정립됐다. 또한 White의 변형속도에 따라 변하는 물질의 이완시간(relaxation time) (Ide & White[14])을 convected Maxwell 유체모형에 넣은 모델을 가지고 등온 방사공정에서의 Draw Resonance 발생에 관한 연구가 최근 발표됐다(Hyun[15]). 따라서 본 논문에서는 위의 모델을 가지고 공업적으로 중요한 비등온 방사공정에서의 Draw Resonance 발생에 대하여 설명하고자 한다. 즉 에너지식을 등온공정의 지배방정식에 추가함으로써, 방사공정에서의 냉각 효과가 Draw Resonance 발생에 미치는 영향을 밝히는 것이 본 논문의 목적인 것이다.

등온 방사공정의 결과의 유도

비등온 방사공정의 지배방정식은 등온 방사공정의 식들에 에너지식들을 추가한 것이므로, 여기서 먼저 등온공정에 대한 설명부터 시작하기로 한다. 즉 Hyun[15, 16]의 식과 가정을 그대로 사용한다. (1) 유체의 운동식에서 유체의 관성, 표면장력, 공기저항 및 중력을 무시하고, 유변학적 힘만을 생각한다. (2) Die Swell이 일어나는 점을 길이 좌표의 기점(x=0)으로 삼는다. (3) 공간좌표로는 x-좌표만을 생각한다(즉 one-dimensional model). (4) 따라서 Threadline의 속도, 온도 등은 단면적 내에서 변하지 않는다. 그러므로 White의 이완시간 모델과 convected Maxwell 유체의 식을 사용한 등온공정의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\text{유체 연속식: } \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial(Av)}{\partial x}\right)_t = 0 \quad (1)$$

$$\text{유체 운동식: } \left(\frac{\partial(A\sigma)}{\partial x}\right)_t = 0 \quad (2)$$

유변학식(convected Maxwell 유체)

$$\sigma + \lambda \left(v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_t - 2\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t\right) = 2G\lambda \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t \quad (3)$$

White의 이완시간 model(Ide & White[14]) :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 + a\sqrt{3}\lambda_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t} \quad (4)$$

여기서, "a"는 이완시간, λ,의 변형속도, (∂v/∂x),에 대한 의존도를 나타내는 계수다(즉 a=0이면, 의존도=0이고 따라서 λ=λ₀=constant) 식 (1)-(4)로 표시되는 위의 등온방사공정의 Draw Resonance 발생 때의 임계연신비, r_c는 다음과 같이 계산된다(Hyun[11, 15]).

식 (1)에서 Throughput(=AV) waves의 식이 아래와 같이 유도된다.

$$\left(\frac{\partial(Av)}{\partial t}\right)_x + U \left(\frac{\partial(Av)}{\partial x}\right)_t = 0 \quad (5)$$

여기서

$$U \equiv \left(\frac{\partial(Av)}{\partial A}\right)_x \equiv \text{Throughput wave의 전파속도}$$

$$= - \frac{A \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t}{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{Av}} \quad (6)$$

Draw Resonance의 Onset에서는 Throughput wave의 전파시간(x=0에서 x=L까지), t_L,과 유체가 같은 거리를 흐르는 시간, τ_L,의 다음 관계식이 성립된다(Hyun, *et al.*[13]).

$$2t_L + \Delta t = \tau_L \quad (7)$$

여기서

$$t_L \equiv \int_0^L \frac{dx}{U} \equiv \text{Throughput wave의 전파시간}$$

$$\tau_L \equiv \int_0^L \frac{dx}{V} \equiv \text{유체 element의 전파시간}$$

$$\Delta t \equiv \text{Throughput wave와 Threadline 힘(F)과의 시간차}$$

따라서 Draw Resonance가 생길 때의 임계연신비, r_c

는 식 (7)을 만족시키는 r 의 값이 된다.

천변 Hyun[19, 15]에서 밝힌대로 선회한 식 (7) 대신

$$2t_L \approx \tau_L \tag{9a}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{s_1} \approx \frac{V_L - V_o}{L} = \frac{V_o(r-1)}{L} \tag{9b}$$

을 사용하면 수치계산의 필요가 없이 analytic 하게 r_c 의 값을 아래 대수식에서 큰 오차없이 구할 수 있다.

$$\tilde{\lambda}_o \equiv \frac{\lambda_o V_o}{L} = \frac{2r_c (\ln r_c)^2 - (r_c - 1)^2}{(1 - a\sqrt{3})(r_c - 1) [r_c (\ln r_c)^2 - (r_c - 1)^2]} \tag{10}$$

윗 식 (10)의 유도과정이 비등온공정의 계산에 기초가 되므로 간략히 기술하기로 한다.

정상상태 (Steady State)에서 식 (1)과 (2)로부터

$AV = Q =$ 정상상태의 Throughput = constant

$A\sigma = F =$ 정상상태의 Threadline tension = constant

$$\text{혹은 } A = \frac{Q}{V}, \quad \sigma = \frac{F}{A} = \left(\frac{F}{Q}\right) V \tag{11}$$

을 얻을 수 있다. 이 식 (11)을 식 (4)와 함께, 식 (3)에 대입해서 간단히 하면 다음식이 얻어진다.

$$\frac{dv}{dx} \equiv \dot{\epsilon} = \frac{v}{\lambda_o [K + v(1 - a\sqrt{3})]} \tag{12}$$

여기서 $K \equiv \frac{2GQ}{F} =$ a reciprocal tension force.

윗 식 (12)는 등온이나 비등온공정에 다같이 적용되는 식이다. 윗 식을 Threadline 을 따라 $x=0$ 에서 $x=L$ 까지 적분하면, K 는 Threadline 을 따라 변하지 않고(식 (2)에 나타난대로 운동식에 유변학적 힘만을 가정하면 Threadline 힘, F ,가 x 에 대해서 상수가 되기 때문), λ_o 는 등온공정에서 상수이므로,

$$X = \lambda_o K \ln \left(\frac{V}{V_o}\right) + \lambda_o (1 - a\sqrt{3})(V - V_o) \tag{13}$$

로 되고, 경계조건 $x=L$ 에서 $v = v_L = rv_o$ 을 적용하면

$$K = \frac{L - \lambda_o V_o (1 - a\sqrt{3})(r - 1)}{\lambda_o \ln r} \tag{14}$$

가 되고, 식 (14)를 식 (13)에 대입하면

$$\frac{X}{L} = \frac{1 - \left(\frac{\lambda_o V_o}{L}\right) (1 - a\sqrt{3})(r - 1) \ln(V/V_o)}{\ln r} + \frac{\lambda_o V_o}{L} (1 - a\sqrt{3}) \left(\frac{V}{V_o} - 1\right) \tag{15}$$

을 얻는다. 윗 식 (15)는 Threadline 속도, v ,의 x 에 대한 값이 음함수로 표시된 식이다.

식 (6)에 나타난 $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{s_1}$ 항은 정상상태에서의 미분이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{s_1} \equiv \frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{V}\right) = Q \left(-\frac{1}{V^2}\right) \frac{dv}{dx} = -\frac{A}{v} \frac{dv}{dx} \tag{16}$$

식 (16)을 식 (6)에 대입하면, 다음식이 얻어진다.

$$U = -\frac{A \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{s_1}}{-\frac{A}{v} \left(\frac{dv}{dx}\right)} = V \left(\frac{dx}{dv}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{s_1} \tag{17}$$

식 (9b)의 근사식을 쓰면, 윗 식이 다시 아래와 같이 된다.

$$U \approx \left(\frac{V_o(r-1)}{L}\right) V \left(\frac{dx}{dv}\right) \tag{18}$$

다음 식 (8)에 의한 Throughput wave 의 $x=0$ 에서 $x=L$ 까지의 전파시간, t_L 은 다음과 같이 구해진다.

$$t_L \equiv \int_0^L \frac{dx}{U} \approx \frac{L}{V_o(r-1)} \int_0^L \frac{1}{V} \frac{dv}{dx} dx = \frac{L}{V_o(r-1)} \int_{v_o}^{v_L=rv_o} \frac{dv}{V} = \frac{L}{V_o(r-1)} \ln r \tag{19}$$

즉 t_L 은 근사식 (9b)를 사용하면, 유체의 종류나 등온/비등온 여부에 관계없이, 식 (19)로 표현된다. Draw Resonance 발생의 근사조건식 (9a)를 풀어서 r_c 를 구하려면, 이제 유체의 전파시간, τ_L 의 식이 필요하다. 식 (8)에 식 (12)를 대입하면 다음식 (20)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \tau_L &\equiv \int_0^L \frac{dx}{V} = \int_{v_o}^{rv_o} \frac{\lambda_o [K + V(1 - a\sqrt{3})]}{V^2} dv \\ &= \frac{\lambda_o K}{V_o} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \lambda_o (1 - a\sqrt{3}) \ln r \end{aligned} \tag{20}$$

(여기서 식 (13)에서와 마찬가지로, K 는 Threadline

따라 변하지 않고 λ_0 는 등온공정에서 상수다.) 식 (1)을 식 (20)에 대입하면, τ_L 의 식은 다음과 같이 된다.

$$\tau_L = \frac{[L - \lambda_0 V_0 (1 - a\sqrt{3}) (r - 1)]}{V_0 \ln r} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \lambda_0 (1 - a\sqrt{3}) \ln r \quad (21)$$

이제 식 (19)와 식 (21)을 Draw Resonance 발생의 근사식 (9a)에 넣어서 풀면 식 (10)이 얻어진다. 식 (10)에 의한 r_c 의 계산은 근사식 (9a), (9b)를 안 쓰고, 정확한 식 (7)과 수치계산에 의한 U의 식 (식 (6))을 쓴 경우와 비교해 그 오차가 작아서 (Newtonian 유체, 즉 $\lambda=0$ 의 경우 2.3%의 오차임, Hyun[11, 13]) 매우 유용한 방법이다. Fig.2는 식 (10)에 의한 r_c 의 값을 여러가지 "a"의 값에 따라 $\tilde{\lambda}_0 \equiv \frac{\lambda_0 V_0}{L}$ 에 대해서 그린 것이다(a=0의 경우는, $\lambda = \lambda_0 = \text{constant}$ 로서 Fig.1에 나타내져 있고, r_{max} 이 직선으로 표시돼 있다. 이것은 식 (14)에서 보듯이 $a < 1/n3$ 이면, $K=0$ (즉 $F \rightarrow \infty$)의 경우가 존재하고, 이때 Threadline이 끊어지는 r_c 가 계산된다.), 그림에서 보듯이, "a" 값이 $1/n3=0.577\cdots$ 보다 크냐 작으냐에 따라서 $\tilde{\lambda}_0$ 가 r_c 에 미치는 영향이 서로 반대가 된다(다른 여러 유체흐름공정에서의 "a"의 값의 영향은 Hyun [16]이 자세한 Table로 기술하고 있다.).

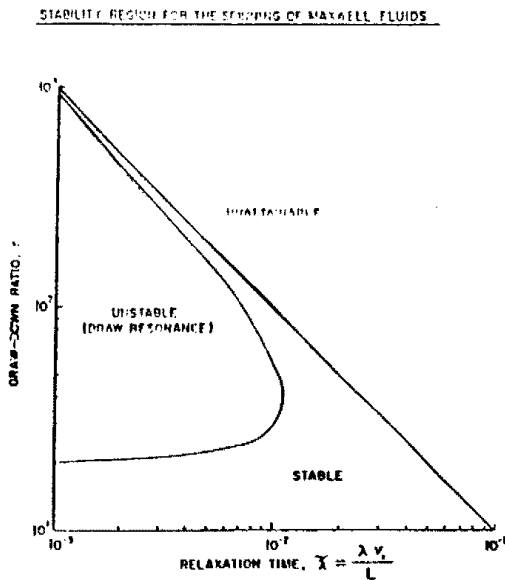


Fig. 1. Stability region for the isothermal spinning of Maxwell fluids ("a" = 0)

STABILITY REGION FOR THE SPINNING OF MAXWELL FLUIDS HAVING VARYING RELAXATION TIMES

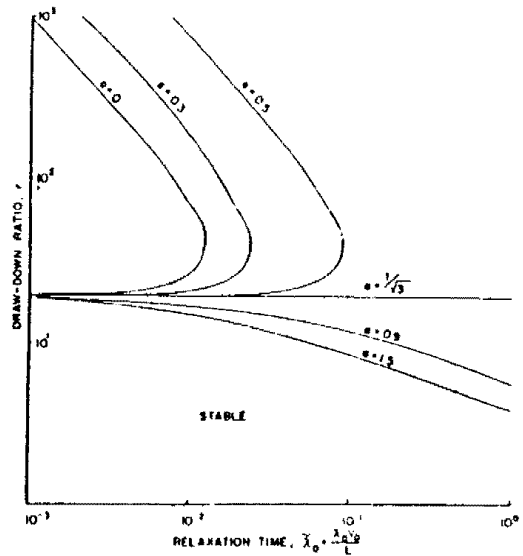


Fig. 2. Stability region for the isothermal spinning of Maxwell fluids with White's relaxation time model

비등온 방사공정 결과의 유도

비등온 방사공정의 지배식은 위의 등온공정의 지배식 (1)-(4)에 두 개의 에너지 식을 추가하여 얻을 수 있다 (Kase & Matsuo[4] or Kase[17]). 첫번째 식은 아래와 같은 Threadline의 열수지식이다.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x + V \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t = \frac{2\sqrt{\pi}h(T^* - T)}{\rho C_p \sqrt{A}} + \frac{(-\Delta H) dX}{\rho C_p dt} \quad (22)$$

여기서 h=열전달 계수 (Threadline 표면과 공기 사이) (= (물질계수) $A^{-1/3} v^{1/3} [1 + (8v_y/V)^2]^{1/8}$ = Kase & Matsuo[4]의 실험식)

T^* = 냉각공기의 온도

v_y = 냉각공기의 y 방향(x 방향에 수직)의 속도

ρ, C_p = 유체의 밀도, 열용량

X = 유체의 결정 (crystalline part)의 양

$(-\Delta H)$ = 결정화 과정의 발생열

두번째 식은 이완시간(혹은 점도)의 온도에 대한 의존 식으로 일반적으로 사용하는 지수식으로 표시하면 아래와 같다.

$$\lambda_o = \frac{\mu_o}{G} = \frac{\mu_{oo}}{G} \exp\left\{\frac{E}{RT_o} (T_o/T - 1)\right\} \quad (22)$$

여기서 μ_o = 온도 T에서의 유체의 점도.

μ_{oo} = 온도 T_o (기준 온도)에서의 유체의 점도.

$$\lambda_{oo} = \mu_{oo}/G; \lambda_o = \mu_o/G$$

실제 비등온공정의 지배식은 등온공정의 지배식 (1)-(11)에 식 (22)와 (23)을 추가한 것이 된다. 그런데 식 (22)가 다른 미분방정식 식 (1)-(3)과 연계(coupled)돼 있어서 수치해석상 상당히 복잡한 계산이 필요하게 된다. 따라서 본 연구에서는 오차가 작은 근사식을 식 (22)에 도입하기로 한다. 즉 Fisher & Denn[18]이 지적한대로 비등온 방사공정에서는 에너지 식 (22)의 운동식 (2), (3)에 미치는 영향이 운동식의 에너지식에 대한 영향보다 훨씬 크기 때문에 에너지 식 (22)을 단독으로 풀고, 그 결과(즉 온도 (T)의 x 함수식)를 다른 식들에 대입해서, 지배식들을 풀고, 근사식(9a, 9b)을 사용해서 Draw Resonance가 생길 때의 임계연신비, r_c 를 구하고자 한다.

정상상태에서 Threadline에서 결정화과정이 없다고 가정하면, 에너지 식 (22)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dT}{dx} \approx \frac{St}{L} (T^* - T) \quad (24)$$

여기서

St = Stanton Number (무차원)

= Nusselt Number / Peclet Number

= Interphase heat transfer effect / Fluid heat convection effect

= Function ($\rho, C_p, A, v, h, v_y, \text{etc.}$)

그러면 Threadline의 온도 T는 아래와 같이 된다.

$$T = T^* + (T_o - T^*) \exp[-St(x/L)] \quad (25)$$

여기서 기준온도 T_o 는 $x=0$ 에서의 Threadline의 온도를 사용한다. 이제 앞 section에서와 같이 비등온공정에서의 r_c 의 계산을 위해 t_L 과 τ_L 을 구하기로 한다. 식 (12), (16)-(18) & (19)들이 비등온에서도 똑같이 적용되므로, 근사식 (9b)을 사용하는 본 연구에서는 t_L 의 식은 등온공정의 식 (19)와 똑같게 된다. 그러나 λ_o 는 비등온공정에서는 상수가 아니고, 온도 (T)의 함수, 또는 x의 함수(\because 온도 = x의 함수 : 식 (25))가 되므로, τ_L 의 계산이 식 (20)이나 (21)처럼 간단한 대수식으로 되지 못하고 수치계산이 필요한 적분식이 된다(K는 Threadline을 따라 적분하는 경우는 항상 상수가 된다. 이것은 앞에서 설명한대로 식 (2)에 나타난

대로 운동식에 유변학적인 항만을 가정할 때 Threadline을, K가 x에 대해서 항상 일정하게 되기 때문이다. 그러나 비등온공정에서는 τ_L 의 계산을 위해($\because \tau_L = \int_0^L \frac{dx}{V(x)}$) 우리는 식 (15)와 같은 속도 V의 x에 대한 함수(음함수)를 필요로 한다.

식 (22)을 Threadline을 따라 적분하면 다음의 식이 된다.

$$\int_{V_o}^{K+v(1-a\sqrt{3})} \frac{K+v(1-a\sqrt{3})}{v} dv = \int_0^x \frac{dx}{\lambda_o}$$

$$K \ln \frac{V}{V_o} + (1-a\sqrt{3})(V - V_o) = \int_0^x \frac{dx}{\lambda_o} \quad (26)$$

윗 식 (26)의 적분식 계산을 위해서 식 (23)과 (25)가 필요하게 된다.

$$\lambda_o = \frac{\mu_{oo}}{G} \exp\left\{\frac{E}{RT_o} \left(\frac{T_o}{T} - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{\mu_{oo}}{G} \exp\left\{\frac{E}{RT_o} \left(\frac{T_o}{T^* + (T_o - T^*) \exp[-St(x/L)]} - 1\right)\right\} \quad (27)$$

식 (27)에서 냉각효과가 커질수록(즉 St가 커지거나 T^* 가 작아질 때) λ_o 의 값이 커지고, 또 x가 커질수록 λ_o 가 커지게 됨을 쉽게 알 수 있다. 여기서 지배방정식들의 표현을 간단히 하기 위해서 무차원 변수들을 아래와 같이 정의 한다.

$$\zeta \equiv \frac{x}{L}, \quad \xi \equiv \frac{V}{V_o}, \quad \theta \equiv \frac{T}{T_o}, \quad \theta^* \equiv \frac{T^*}{T_o}$$

$$\alpha \equiv \frac{E}{RT_o}, \quad \tilde{\lambda}_o \equiv \frac{\lambda_o V_o}{L} \equiv \frac{\mu_o V_o}{GL} \equiv \tilde{\mu}_o \tilde{\lambda}_{oo},$$

$$\tilde{\lambda}_{oo} \equiv \frac{\lambda_{oo} V_o}{L} \equiv \frac{\mu_{oo} V_o}{GL} \equiv \frac{\tilde{\lambda}_o}{\tilde{\mu}_o}, \quad \tilde{\mu}_o \equiv \frac{\mu_o}{\mu_{oo}} \quad (28)$$

식 (28)을 식 (27)에 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\lambda_o = \tilde{\lambda}_{oo} \frac{L}{V_o} \exp\left\{\alpha \left(\frac{1}{\theta^* + (1-\theta^*) \exp[-(St)\zeta]} - 1\right)\right\} \quad (29)$$

식 (29)와 (28)을 식 (26)에 대입하면, 식 (30)이 얻어진다.

$$K \ln \xi + (1-a\sqrt{3})V_o(\xi - 1) = \int_0^\zeta (Ld\zeta)$$

$$\frac{V_o}{\lambda_{oo}L} \exp\left[-\alpha \left(\frac{1}{\theta^* + (1-\theta^*)\exp(-(St)\xi)} - 1\right)\right]$$

혹은

$$\frac{K\tilde{\lambda}_{oo}}{V_o} \ln \xi + \tilde{\lambda}_{oo}(1-a\sqrt{3})(\xi-1) = \int_0^\xi \exp\left[-\alpha \left(\frac{1}{\theta^* + (1-\theta^*)\exp(-(St)\xi)} - 1\right)\right] d\xi$$

혹은

$$\tilde{K} \ln \xi + \tilde{\lambda}_{oo}(1-a\sqrt{3})(\xi-1) = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\tilde{\mu}_o(\xi)} \quad (30)$$

여기서

$$\tilde{K} \equiv \frac{K\tilde{\lambda}_{oo}}{V_o} \equiv \frac{2Q\mu_{oo}}{FL} \equiv \frac{2Q\mu_o}{FL\tilde{\mu}_o} \equiv \frac{K\tilde{\lambda}_o}{V_o\tilde{\mu}_o}$$

$$\tilde{\mu}_o \equiv \frac{\mu_o}{\mu_{oo}} \equiv \exp\left\{\alpha \left(\frac{1}{\theta^* + (1-\theta^*)\exp(-(St)\xi)} - 1\right)\right\} \quad (31)$$

\tilde{K} 의 값은 경계조건, $\xi=1$ 일 때 $\xi=r$ 을 식 (30)에 대입해서 얻을 수 있다.

$$\tilde{K} = \frac{1}{\ln r} \left[\int_0^1 \frac{d\xi}{\tilde{\mu}_o(\xi)} - \tilde{\lambda}_{oo}(1-a\sqrt{3})(r-1) \right] \quad (32)$$

등온공정 ($\theta \rightarrow 1, \theta^* \rightarrow 1$, 혹은 $St \rightarrow 0$)에서는

$$\tilde{\mu}_o \equiv \mu_o/\mu_{oo} = 1 \text{ 따라서 } \tilde{\lambda}_o \equiv \frac{\lambda_o V_o}{L} = \tilde{\lambda}_{oo} \equiv \frac{\lambda_{oo} V_o}{L}$$

어 식 (32)로부터 등온공정의 식 (14)를 아래와 같이 찾을 수 있다.

$$\tilde{K} = \frac{1}{\ln r} [1 - \tilde{\lambda}_o(1-a\sqrt{3})(r-1)]$$

$$K = \frac{L - \lambda_o V_o(1-a\sqrt{3})(r-1)}{\lambda_o \ln r}$$

결국 식 (32)를 포함한 식 (30)이 비등온공정에서의 Threadline의 속도 ($V/V_o = \xi$)의 위치 ($X/L = \xi$)에 대한 관계를 음함수로 나타낸 것이다 ($\xi = \xi(\zeta)$). 따라서 유체의 전파시간, τ_t 의 계산에는 등온공정의 식 (21)과 같은 간단한 대수식 대신, 식 (30)을 이용한 식 (33)이 필요하게 된다.

$$\tau_t \equiv \int_0^L \frac{dx}{V(x)} \equiv \frac{L}{V_o} \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi(\zeta)} \quad (33)$$

여기서 속도식 $\xi = \xi(\zeta)$ 은 연속양함수로 표시되지 않고 Threadline의 각 점에서의 값으로 얻어지기 때문에 (식 (30)에 의한 계산), 식 (33)의 적분의 정확도는 속도, ξ 의 값을 계산하는 점들의 수와 분포에 달라지게 된다. 이런 경우 Gaussian Quadrature 방법이 이상적이고, 여기서는 20개 점 formula를 사용했다(20개 점과 21개 점 formulas의 차이는 10⁻⁴%보다 작게 됨). 따라서 비등온 방사공정의 Draw Resonance 발생시의 임계연신비, r_c , 계산은 식 (19)와 (33)을 근사식 식 (9a)에 넣어서 계산하게 된다. 각 계수 ($\theta^*, St, \alpha, \lambda_{oo}, a$ 등)들의 값을 주었을 때, r_c 의 값이 본 연구의 결과가 된다.

결과 및 토론

Fig.3는 냉각효과 중 St Number가 Draw Resonance에 미치는 영향을 나타내고 있다. 기존의 결과 (Fisher & Denn[18])와의 비교를 위해 같은 $\alpha=5.8$ 을 쓰고, 냉각공기온도가 $\theta^*=T^*/T_o=0.5$ 에서 두 가지 유체 $a=0$ 과 $a=1.0$ 에 대해서, r_c 에 대한 St 수의 영향을 그렸다. 예상한대로 St 수가 커질수록 Draw Resonance가 발생하는 r_c 의 값이 커짐(즉 공정이 안정됨)을 알 수 있다. 실제 비등온공업공정에서 나타나는 높은 r_c (즉 Newtonian 유체의 등온공정에서의 $r_c=20.21$ 보다 훨씬 큰 r_c)값이 Fig.3에 의해 잘 설명되고 있다(e.g., $r_c > 200$ for $St=2.0$).

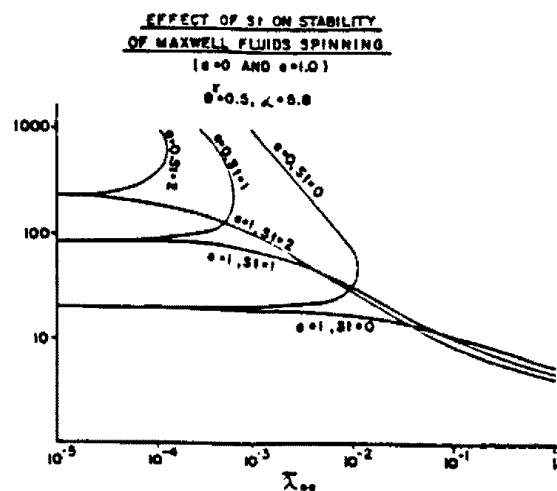


Fig. 3. Stability region for the non-isothermal spinning of Maxwell fluids with White's relaxation time model and different values of the stanton number (St)

$\tilde{\lambda}_{00} \equiv \frac{\mu_{00} V_0}{GL}$ 가 커질수록(즉 μ_{00}, V_0 가 커지거나 G, L 이 작아지는 경우), $a=1.0$ 의 유체의 경우(연신점도가 변형파와의 유체에는 St 의 값에 관계없이 r_c 의 극선이 일치하게 될)을 알 수 있다. 이것은 $\tilde{\lambda}_{00}$ 가 커질수록 Process Time(여기서는 L/V_0)이 작아지고 따라서 열 전달의 전대시간이 짧아져서, 냉각효과가 떨어져서 등온($St=0$)의 경우와 비슷하게 되기 때문이다.

$a < 1/\sqrt{3}$ 유체($a=0$)를 포함한 연신점도가 변형파와의 유체)의 경우는 등온공정에서 설명한 바와 같이, $\tilde{\lambda}_{00}$ 가 커지면, r_c 이 계속 커지지 못하고 r_{max} 이 존재하게 되어 Threadline이 끊어지게 된다. 이것은 식 (11)나 (32)에서 보듯이, $a < 1/\sqrt{3}$ 유체에선 $K=0$ (즉 $F \rightarrow \infty$)이 가능하고, 따라서 식 (14)로부터

$$r_{max} = 1 + \frac{1}{\frac{\lambda_0 V_0}{L} (1 - a\sqrt{3})} \quad (34)$$

가 되고(Hyun[16]), Fig.1에서 보듯대로 이 r_{max} 식을 log-log 그림에서 직선으로 된다. 또 냉각효과가 커질수록(즉 St 가 커지거나 θ^* 가 작아질수록), λ_0 가 커지고 따라서 r_{max} 는 작아지게 된다. Fig.4는 θ^* 가 어떤 냉각효과를 Draw Resonance에 미치는가를 $\alpha=5.8$, $St=1.0$ 에서 $a=0$ 과 $a=1.0$ 두 유체의 경우에 대해서 r_c 의 값을 plot 한 것이다. Fig.3에서와 같이 θ^* 의 냉각효과가 r_c 를 크게 하는(공정을 안정시키는) 것을 알 수 있고, $\tilde{\lambda}_{00}$ 가 커질수록, $a=1$ 의 유체의 경우, θ^* 의 효과가 작아져서 등온공정($\theta^*=1.0$)과 같게 되는 것을

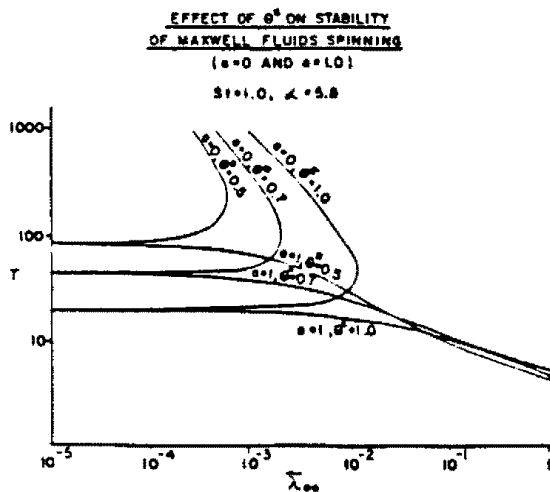


Fig. 4. Stability region for the non-isothermal spinning of Maxwell fluids with White's relaxation time model and different values of the cooling air temperature (θ^*)

발견할 수 있다. 또한 $a < 1/\sqrt{3}$ 의 유체의 경우($a=0$ 경우 포함)는 Fig.3과 같이 r_{max} 이 존재하고 이 r_{max} 에 θ^* 가 작아질수록, r_c 이 작아져서 비등온공정의 경우 Threadline이 등온공정보다 작은 연신비에서 끊어지게 된다.

Fig.3과 4와의 비교에서 r_c 에 미치는 θ^* 의 효과는 St 의 효과보다 작다는 것을 알 수 있는데 이것은 식 (27) 혹은 (29)에서 보는 바와 같이 θ^* 와 달리 St 가 지수에 포함되어 있기 때문이다.

끝으로 두 가지 점을 설명하고자 한다. 첫째 Fig.2-4에서 보듯이 계수 "a" 값이 $1/\sqrt{3}$ 보다 크냐 작으냐에 따라 curves들의 모양에 크게 다른 것은, 식 (10)에서 알 수 있듯이 $a=1/\sqrt{3}=0.577$ 가 분모를 0으로 하는 Singularity이기 때문이다. 둘째 본 논문에서는 r_c 는 항상 Draw Resonance가 생기는 r 의 값을 의미한다. 따라서 모든 그림의 curves들은 다 그 조건(냉각조건을 포함해서)하에서의 r_c 값을 나타내고 있다.

결론

비교적 간단한 지배방정식을 가지고 비등온방사공정의 Draw Resonance 발생을 연구해 본 결과 몇 가지 중요한 사실을 발견했다.

- (1) 냉각은 공정을 안정시킨다. 즉 Draw Resonance가 발생하는 임계연신비 r_c 가 냉각에 의해 커져서 공업적 비등온공정에서 Draw Resonance가 발견되지 않는 이유가 쉽게 설명된다.
 - (2) Process Time이 작아질수록(즉 고속방사에 Ws, De 가 큰 경우), 냉각의 효과가 작아져서 궁극적으로 등온공정과 같이 된다($a > 1/\sqrt{3}$ 즉 연신점도가 변형파와의 유체의 경우)
 - (3) $a < 1/\sqrt{3}$ 유체는 경우는 r_{max} 가 존재하고, 냉각이 커질수록 최대 연신비가 줄어든다(물질의 이완시간이 커지기 때문).
 - (4) 동적 waves의 전파시간과 유체의 흐름은 시간과의 상관관계가 Draw Resonance가 생기는 원인이라고 설명한 Hyun[11, 13]의 이론의 근사식이 비등온공정에서도 잘 이용될 수 있다.
- 위의 Draw Resonance 결론 이외에 비등온공정의 Necking 등의 현상을 중심으로 한 결과는 따로 보고할 예정이다(Hyun[16]의 연구의 연장).

NOMENCLATURE

A	: Threadline cross-sectional area	x	: Distance from spinneret
A_0	: Threadline cross-sectional area at spinneret ($x=0$)	W_s	: Weissenberg number
A_L	: Threadline cross-sectional area at take-up ($x=L$)	α	: Material parameter, $\alpha \equiv \frac{E}{RT_0}$
a	: Material parameter representing the strain-rate dependence of the material relaxation time	$\dot{\epsilon}$: Extensional Strain rate
C_p	: Material heat capacity	ζ	: Dimensionless distance from spinneret, $\zeta \equiv \frac{x}{L}$
De	: Deborah number	θ	: Dimensionless threadline temperature, $\theta \equiv \frac{T}{T_0}$
E	: Material activation energy	θ^*	: Dimensionless cooling air temperature, $\theta^* \equiv T^*/T_0$
F	: Threadline tension force	λ	: Material relaxation time
G	: Material modulus	λ_0	: λ when $a=0$, $\lambda_0 \equiv \frac{\mu_0}{G}$
(- ΔH)	: Material crystallization heat	$\tilde{\lambda}_0$: Dimensionless λ_0 , $\tilde{\lambda}_0 \equiv \frac{\lambda_0 V_0}{L}$
h	: Heat transfer coefficient between threadline & cooling air	λ_{00}	: λ_0 when $T=T_0$, $\lambda_{00} \equiv \mu_{00}/G$
K	: Threadline reciprocal force, $K \equiv \frac{2GQ}{F}$	$\tilde{\lambda}_{00}$: Dimensionless λ_{00} , $\tilde{\lambda}_{00} \equiv \frac{\lambda_{00} V_0}{L}$
\tilde{K}	: Dimensionless threadline reciprocal force, $\tilde{K} \equiv \frac{K \tilde{\lambda}_{00}}{V_0} \equiv \frac{K \tilde{\lambda}_0}{V_0 \mu_0}$	μ	: Threadline viscosity
L	: Distance from spinneret to take-up	μ_0	: μ at T
Q	: Threadline throughput (flow rate), $Q = Av$	μ_{00}	: μ at $T=T_0$
R	: Gas constant	$\tilde{\mu}_0$: Dimensionless μ_0 , $\tilde{\mu}_0 \equiv \frac{\mu_0}{\mu_{00}}$
r	: Draw-down ratio, $r \equiv \frac{V_L}{V_0} \equiv \frac{A_0}{A_L}$	ξ	: Dimensionless velocity, $\xi \equiv \frac{V}{V_0}$
r_c	: Critical draw-down ratio at the onset of draw resonance	ρ	: Threadline density
r_{max}	: Maximum r when $K \rightarrow 0$ (or $F \rightarrow \infty$) for $a < 1/\sqrt{3}$ fluids	σ	: Threadline axial stress
St	: Stanton number = Nusselt number/Peclet number	τ	: Fluid traveling time from spinneret
T	: Threadline temperature	τ_L	: Fluid traveling time from spinneret to take-up
T_0	: Reference temperature = Threadline temperature at spinneret ($x=0$)		
T^*	: Cooling air temperature		
t	: Time		
t_L	: Fluid element traveling time from spinneret to take-up		
U	: Throughput wave traveling velocity		
V	: Threadline velocity		
V_0	: Threadline velocity at spinneret ($x=0$)		
V_L	: Threadline velocity at take-up ($x=L$)		
V_y	: Cooling air velocity in y-direction		
X	: Crystallinity of threadline		

REFERENCES

1. R.E. Christensen, *SPE J.* **18**, 751 (1962).
2. J.C. Miller, *SPE Tran.*, **3**, 134 (1963).
3. A. Bergonzoni and A.J. Dicesce, *Poly. Eng. Sci.*, **6**, 45 (1966).
4. S. Kase and T. Matsuo, *J. of Poly. Sci., Part A*, **3**, 2541 (1965).

5. J.R.A. Pearson and M.A. Matovich, *Ind. Chem. Eng. Fundamentals*, **8**, 605 (1969).
6. C.D. Han, *et al.*, *J. Appl. Poly. Sci.*, **19**, 3291 (1972).
7. R.J. Fisher and M.M. Denn, *AIChE J.*, **22**, 236 (1976).
8. H. Ishihara and S. Kase, *J. Appl. Poly. Sci.*, **19**, 557 (1975).
9. T. Matsumoto and D.C. Bogue, *Poly. Eng. Sci.*, **18**, 564 (1987).
10. W. Minoshima and J.L. White, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **19**, 275 (1986).
11. J.C. Hyun, *AIChE J.*, **24**, 418 (1978).
12. M.M. Denn, *AIChE J.*, **26**, 292 (1980).
13. J.C. Hyun, J.S. Oh and S.J. Lee, *Hwahak Konghak*, **27**(4), 556 (1989).
14. J. Ide and J.L. White, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **2**, 281 (1977).
15. J.C. Hyun, *Polymer (Korea)*, **12**, 112 (1988).
16. J.C. Hyun, *Korean J. of Chemical Eng.*, **6**, 246 (1989).
17. S. Kase, *J. Appl. Poly. Sci.*, **18**, 3279 (1974).
18. R.J. Fisher and M.M. Denn, *AIChE J.*, **23**, 23 (1977).
19. R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, "Transport Phenomena", John Wiley and Sons, 1960, p.646.