

## 자기장을 수반한 무한 원반계의 불안정성

최윤정 · 정경숙 · 최규홍  
연세대학교 천문기상학과

최승언  
서울대학교 사범대학 지구과학교육과  
(1989년 5월 10일 받음 ; 1989년 6월 1일 수리)

## THE INSTABILITY OF INFINITE DISK SYSTEM WITH THE MAGNETIC FIELD

Yun-Jeong Choi, Kyung-Sook Jeong, Kyu-Hong Choi

Dept. of Astronomy and Meteorology, Yonsei University, Seoul 120-749  
and

Seung-Urn Choe

Dept. of Earth Science, Educational College, Seoul National University, Seoul 151-742

(Received May 10, 1989 ; Accepted June 1, 1989)

### Abstract

The instability of the infinite disk system with the effect of the surrounding magnetic field has been investigated and the initial mass function has been obtained.

We present the fact that the infinite system becomes unstable by the long wavelength perturbation if the magnetic pressure is greater than the gas pressure, on the other hand, it also becomes unstable by the short wavelength perturbation if the gas pressure is greater than the magnetic pressure.

### 요 약

자기장을 고려한 압축성 무한 가스 원반계를 가정하여 이 계의 중력 불안정성에 대해 알아보았으며, 또한 초기 질량 함수를 구하였다.

가스압에 비해 자기압이 큰 경우, 이 원반계는 긴 파장을 갖는 섭동에 의해 불안정해지는 반면 자기압에 비해 가스압이 큰 경우는 이보다 짧은 파장의 섭동에 의해 불안정하게 될 수 있다.

## I. 서론

1970년대 mm파에 해당하는 전파로 감지할 수 있는 성간 분자들이 많이 발견되었으며(Choe 1986, Zukermann과 Palmer 1974), 이로 인해 별들이 생성되는 성간운에 대한 관측적 이론적 연구가 시작되었고 은하계 내에서의 별의 형성 과정에 대한 이론적 접근이 가능하게 되었다.

정유체 역학 평형 상태에 있는 가스 원반계의 불안정성에 대해 여러 가지 모델을 가정하여 연구되어 왔다(Goldreich와 Lynden-Bell 1965, Elmergreen과 Elmergreen 1978). 이들은 모두 자기장 효과를 고려하지 않은 가스 모델을 가정하였다.

이 연구에서는 압축성 무한 가스 원반계의 수직축에 직각으로 자기장이 걸려 있다고 가정하고 이 원반계가 성간 충격파로 압축되었을 경우 중력적으로 안정한지를 해석학적 방법으로 알아보려고 한다.

## II. 기본 방정식

정유체 역학 평형 상태에 있는 무한 가스 원반이 성간 충격파로 인해 섭동을 받게 되면 자기 유체 역학 방정식 외에도 다음과 같은 섭동 방정식이 필요하다.

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = \nabla(\Psi_1 - C_s^2 \frac{1 + 2\beta\rho_0}{\rho_0} \rho_1) \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \bar{v}_1) = 0 \dots\dots\dots(2.2)$$

$$\nabla^2 \Psi_1 = -4\pi G \rho_1 \dots\dots\dots(2.3)$$

여기서  $\rho_0$ 는 섭동을 받기 이전의 가스 밀도이며  $\rho_1$ ,  $\Psi_1$  그리고  $v_1$ 은 각각 섭동을 받은 후의 가스 밀도, 포텐셜, 그리고 속도이다. 그리고  $G$ 는 만유인력상수,  $C_s$ 는 등온 음속,  $\nabla$ 는 가스 원반에 수직인 축에 대한 미분을 나타낸다.

충격파 지역에서는 자기장과 밀도의 압축이 일정한 비로 증가하기 때문에 자기장의 방향과 가스의 속도가 수직인 경우는 일정한 상수 값이 됨으로(Kaplan 1966) 여기서 밀도에 대한 자기장 세기의 비를  $\alpha$ 로 정의하면 (2.1)식에 있는  $\beta$ 는 다음과 같이 된다.

INSTABILITY OF INFINITE DISK SYSTEM

$$\beta = \frac{\alpha^2}{8\pi C_s^2}$$

위 방정식들로부터 섭동을 받은 포텐셜에 대한 방정식을 얻을 수 있다(Choe 1988).

$$\begin{aligned} & (1 + Ae^{-\frac{z}{H}}) \frac{d^4 \Psi_1}{dz^4} - \frac{1}{H} (Ae^{-\frac{z}{H}} - 1) \frac{d^3 \Psi_1}{dz^3} + \frac{\omega^2}{C_s^2} + \frac{\rho_{00} e^{-\frac{z}{H}}}{X} \\ & - 2k^2 (1 + Ae^{-\frac{z}{H}}) \frac{d^2 \Psi_1}{dz^2} + \left[ -\frac{\rho_{00}}{XH} e^{-\frac{z}{H}} + \frac{k^2}{H} (Ae^{-\frac{z}{H}} - 1) \right] \frac{d\Psi_1}{dz} \dots\dots (2, 4) \\ & + \left[ -k^2 \left( \frac{\omega^2}{C_s^2} + \rho_{00} \frac{e^{-\frac{z}{H}}}{X} \right) + k^4 (1 + Ae^{-\frac{z}{H}}) \right] \Psi_1 = 0 \end{aligned}$$

여기서  $k$ 와  $\omega$ 는 각각 파수와 진동수이며  $A$ 와  $X$ 는 다음과 같이 정의되는 상수이다. 그리고  $V_A$ 는 Alfvén 속도이다.

$$A = \left( \frac{V_A}{C_s} \right)^2, \quad X = \frac{C_s^2}{4\pi G}$$

그리고

$$V_A = \frac{B^2}{4\pi G}$$

이다. 특히  $A$  값은 자기장에 의한 압력과 기체압의 비로 나타나게 됨으로  $A$  값의 크기가 충격파 지역에서의 자기장의 역할을 좌우하게 된다.  $\rho_{00}$ 는 가스 원반 중심에서의 밀도이며  $H$ 는 다음과 같이 정의되는 길이의 단위를 갖는 scale height이다(Choe 1988).

$$H = \frac{B}{4\pi\rho_{00}\sqrt{G}}$$

무한 가스 원반의 중심 압력과 자기장이 각각  $\rho_{00} = 10^{-21} \text{ g/cm}^3$ 과  $B = 10^{-6} \text{ Gauss}$ 일 때 밀도의 scale height  $H$ 는 약 0.1pc 정도이다. 따라서 이 연구에서는 충격파 지역의 두께를 0.1pc 정도로 하였다.

### III. 경계조건

그림 1과 그림 2에서 섭동을 받은 무한 가스의 표면이 평균값  $a$ 에서 일정한 진폭  $\eta_1$ 을 갖고 주기적으로 변한다고 가정하고 압력과 속도, 그리고 포텐셜에 대한 경계 조건을 Goldreich와 Lynden-Bell(1965), 그리고 Elmergreen과 Elmergreen(1978)이 구한 방법으로 얻었다.

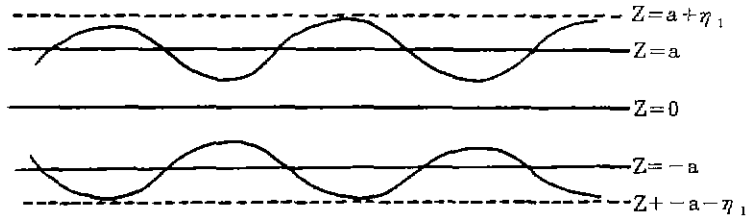


그림 1. 대칭 섭동 모드.  $Z=0$ 인 축을 중심으로 대칭 구조를 이룬다. 여기서  $a$ 와  $-a$ 는 무한가스 원반의 경계면이다. 섭동을 받은 후 이 경계면은 평균값  $a$ 에서 진폭  $\eta_1$ 을 갖고 주기적으로 변한다.

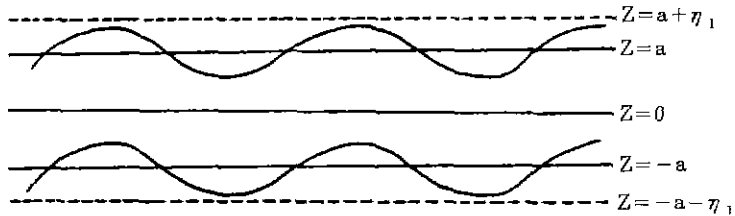


그림 2. 비대칭 섭동 모드.  $Z=0$ 인 축을 중심으로 비대칭 구조를 이룬다.

#### 1) 압력에 대한 경계 조건

$$\begin{aligned}
 & -X \left( 1 + A e^{-\frac{z}{H}} \right) \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\Psi_1}{\eta_1} \right) + X \left( 1 + A e^{-\frac{z}{H}} \right) k^2 \left( \frac{\Psi_1}{\eta_1} \right) \\
 & + \frac{\alpha^2}{4\pi H} \left( \rho_{\infty} e^{-\frac{z}{H}} \right) = 0 \dots\dots\dots (2.5)
 \end{aligned}$$

INSTABILITY OF INFINITE DISK SYSTEM

2) 속도에 대한 경계 조건

$$X (A + e^{\frac{z}{H}}) \frac{d^3}{dz^3} \left( \frac{\psi_1}{\eta_1} \right) + \frac{X}{H} e^{\frac{z}{H}} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\psi_1}{\eta_1} \right) + \left[ \rho_{00} - Xk^2 \right. \\ \left. (e^{\frac{z}{H}} + A) \right] \frac{d}{dz} \left( \frac{\psi_1}{\eta_1} \right) - \frac{Xk^2}{H} e^{\frac{z}{H}} \left( \frac{\psi_1}{\eta_1} \right) + \omega^2 \rho_{00} = 0 \dots\dots\dots (2.6)$$

3) 포텐셜에 대한 경계 조건

$$k \left( \frac{\psi_1}{\eta_1} \right) + \frac{d}{dz} \left( \frac{\psi_1}{\eta_1} \right) - 4\pi G \rho_{00} e^{-\frac{z}{H}} = 0 \dots\dots\dots (2.7)$$

IV. 결 과

IV-1. 분산 관계식

무한 가스 원반계의 분산 관계식을 자기압이 가스압보다 큰 경우와 그렇지 않은 경우에 대하여 각각 다음과 같이 구하였다. 전자의 경우는 앞에서 정의한 A값이 1보다 무척 큰 경우(A≫1)이며 후자는 1보다 무척 작은 조건(A≪1)을 갖는다. 이 두 경우에 대해 a/H=1이라고 가정하고 그림 1과 같은 대칭 모드의 섭동으로 인해 섭동을 받은 포텐셜에 대한 방정식의 해를 해석학적으로 구하였다.

먼저, 자기압이 가스압보다 큰 경우에 대한 분산 관계식은

$$\left( \frac{\omega}{\omega_J} \right)^2 = \left[ (A + 2.7) e^{-\left(\frac{k}{k_J}\right)k_J a} + 0.37 A \right] \left( \frac{k}{k_J} \right) \\ - \frac{2.7}{k_J a} \left( \frac{k}{k_J} \right) e^{-\left(\frac{k}{k_J}\right)k_J a} - \frac{1}{A + 2.7} \dots\dots\dots (3.1)$$

이다. 이 식에서 k<sub>J</sub>와 ω<sub>J</sub>는 다음과 같이 정의된다(Choi 1988).

$$\frac{\rho_{00}}{X} = \frac{4\pi G}{C_s^2} \rho_{00} \equiv k_J^2, \quad \omega_J = k_J C_s^2$$

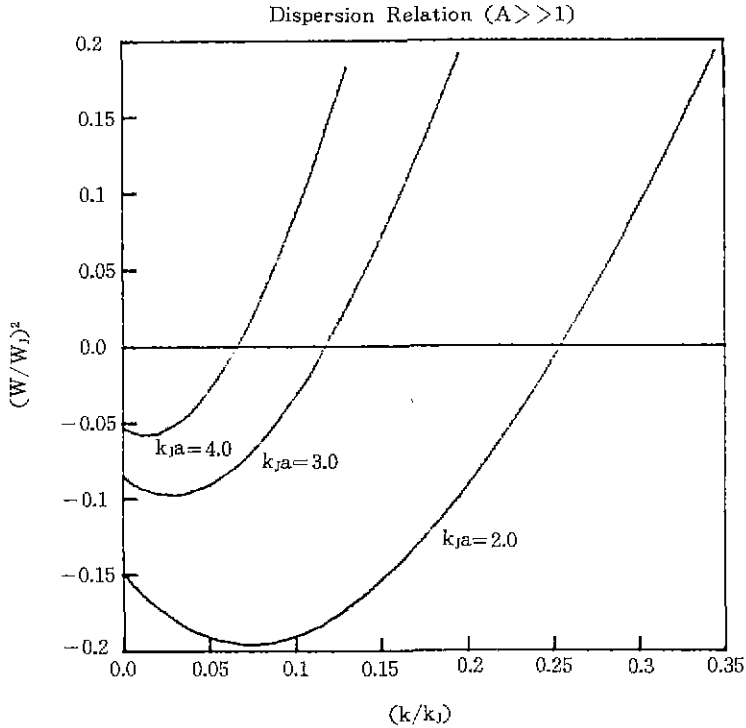


그림 3. 자기압이 가스압보다 큰 경우 압축성 가스에 대한 분산 관계(대칭 모드인 경우). 파수  $k/k_j$ 에 대한 주파수  $(W/W_j)^2$ 에 대한 관계가  $k_{ja}$ 에 대한 함수로 나타나 있다.  $k_{ja}$ 는 음속에 대한 Alfvén 속도에 대한 비를 말한다.

그림 3은 자기압이 가스압보다 큰 경우에 대한 가스 원반계의 분산 관계식을 음속에 대한 Alfvén 속도의 비인  $k_{ja}$ 의 함수로 나타낸 것이다. 그림에서 보면 파수에 대해 주파수 값이 허수값을 가지므로 섭동을 받은 후 이 계는 중력적으로 불안정하게 되고 Alfvén 속도가 커짐에 따라 섭동을 일으키는 파수가 작아짐을 알 수 있다. 다시 말해서, 이는 자기압 효과가 커짐에 따라 더 긴 파장을 갖는 섭동에 의해 가스 원반계가 중력적으로 불안정하게 됨을 의미한다. 표 1은 가스 원반계를 불안정하게 만드는 섭동 파장을 음속에 대한 Alfvén 속도의 비에 대하여 나타낸 것이다.

가스압이 자기압보다 큰 경우에 대한 분산 관계식은

INSTABILITY OF INFINITE DISK SYSTEM

표 1. 자기압이 가스압보다 큰 경우의 섭동 파장. 여기서  $V_A$ 는 Alfvén 속도,  $C_s$ 는 음속,  $a$ 는 무한 가스 원반의 경계면 그리고  $\lambda$ 는 이 원반계를 불안정하게 하는 섭동 파장을 말한다.

$V_A/C_s$	2.0	3.0	4.0
$\lambda$	1.9a	2.9a	3.9a

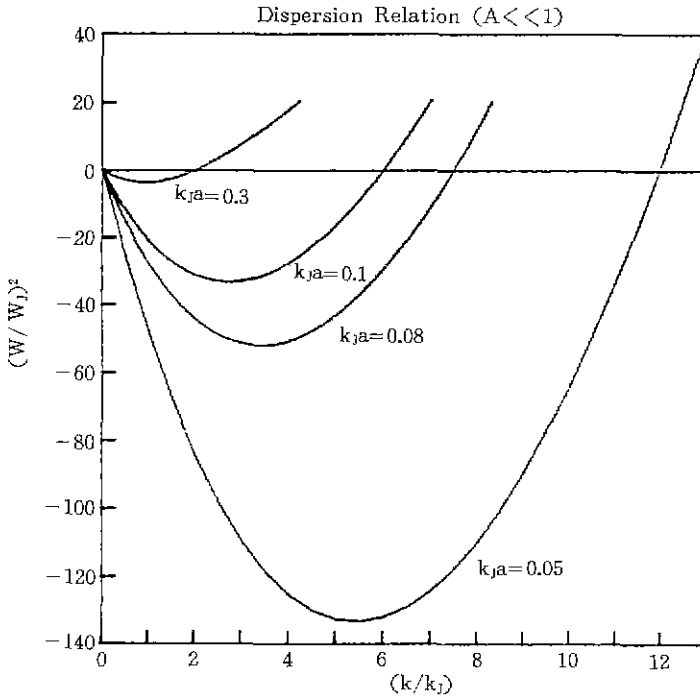


그림 4. 자기압이 자기압보다 큰 경우 압축성 가스에 대한 분산 관계(대칭 모드인 경우).

$$\left(\frac{\omega}{\omega_J}\right)^2 = \left[ 1 + 2.7 e^{-\left(\frac{k}{k_J}\right)k_J a} \right] \left(\frac{k}{k_J}\right)^2 - \frac{2.7}{k_J a} \left(\frac{k}{k_J}\right) e^{-\left(\frac{k}{k_J}\right)k_J a} \dots\dots\dots (3.2)$$

이다. 그림 4는 자기압이 자기압보다 큰 경우에 대한 분산 관계식을  $k_J a$ 의 함수로 나타낸 것이다. 이 경우도 파수에 대해 주파수 값이 허수가 되므로 대칭 모드의 섭동에 의해 이 가스 원반계는 중력적으로 불안정하게 된다. 그리고 가스 원반계를 불안정하게 만드는 섭동 파장을  $k_J a$ 의 함수로서 표 2에 제시하였다. 그러나 이 경우는 자기압이 자기압보다 큰 경우와는 달리 Alfvén 속도가 커져도 계를 불안정하게 하는 섭동 파장이 일정하다. 다시 말해, 자기압 효과가 자기압

효과에 비해 무척 작을 경우, 가스 원반계가 대칭 모드의 섭동을 받은 후 불안정하게 된다면 자기압 효과는 이 계를 불안정하게 하는 데 큰 영향을 미치지 않는다고 할 수 있다.

표 2. 가스압이 자기압보다 큰 경우의 섭동 파장

$V_A/C_s$	0.02	0.05	0.08	0.5
$\lambda$	1.67a	1.67a	1.67a	1.67a

IV-2. 중력 불안정으로 인한 초기 질량 함수

충격파로 인해 압축된 성간 가스는 대칭 모드의 섭동을 받게 될 경우 중력적으로 불안정하게 되며 압축된 영역에서는 결국 별이 형성될 것으로 생각된다. 자기압이 가스압보다 큰 경우와 그렇지 않은 경우 각각에 대해 중력적으로 불안정하게 된 가스 원반계의 초기 질량 함수를 해석학적 방법(Fazio 1986)으로 구하였다.

먼저 자기압이 가스압보다 큰 경우의 초기 질량 함수는

$$\Phi(M, 0) = \frac{k_m^2 \omega_m}{M_m} \left( \frac{M_m}{M} \right)^{5/2} \dots\dots\dots (3.3)$$

이다. 여기서  $\lambda_m$ 은 그림 3에서  $\omega^2$ 이 최대가 되는 파장이며  $k_m$ 은 이 때의 파수이다. 그리고  $M_m$ 은 이러한 파장을 갖는 섭동으로 인해 형성될 수 있는 성간 가스운의 질량으로

$$M_m = \pi \left( \frac{\lambda_m}{4} \right)^2 \rho$$

으로 정의된다.  $M$ 은 균열체의 질량으로 다음과 같다.

$$M = \frac{\pi^3}{4} \frac{\rho}{k}$$

그림 5와 그림 6은 음속에 대한 Alfvén 속도의 비에 따라 초기 질량 함수를 구하여  $M_m/M$ 에 대한  $I(M,0)/\omega$ 의 함수로 나타내었는데,  $\omega$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = k_m^2 \omega_m / M_m$$



INSTABILITY OF INFINITE DISK SYSTEM

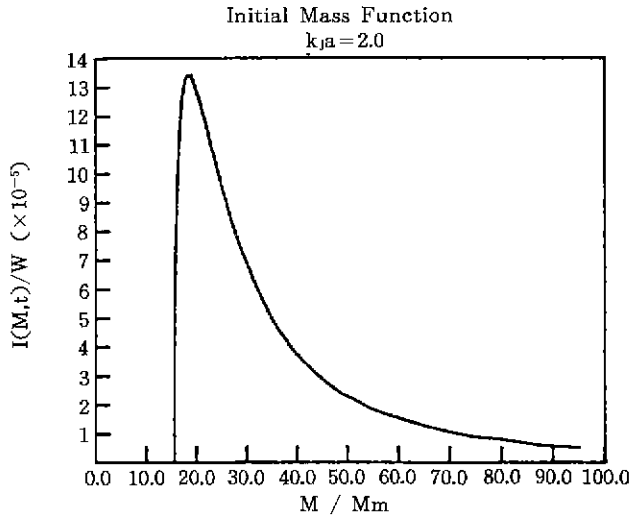


그림 5. 자기압이 가스압보다 큰 경우에 대한 초기 질량 함수( $k_{ja}=2.0$ ).

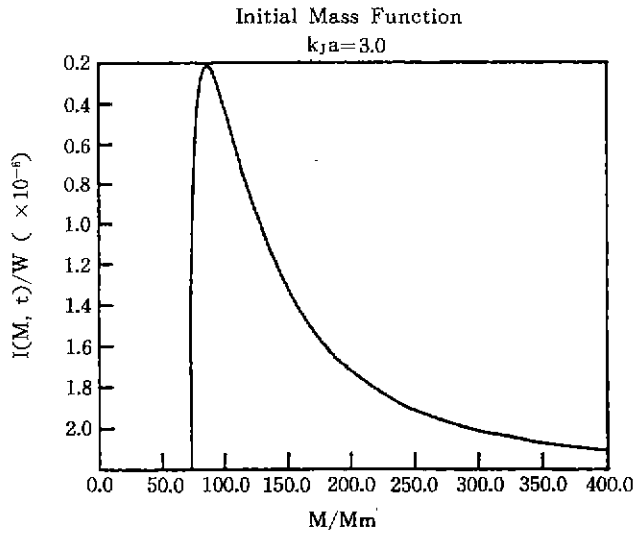


그림 6. 자기압이 가스압보다 큰 경우에 대한 초기 질량 함수( $k_{ja}=3.0$ ).

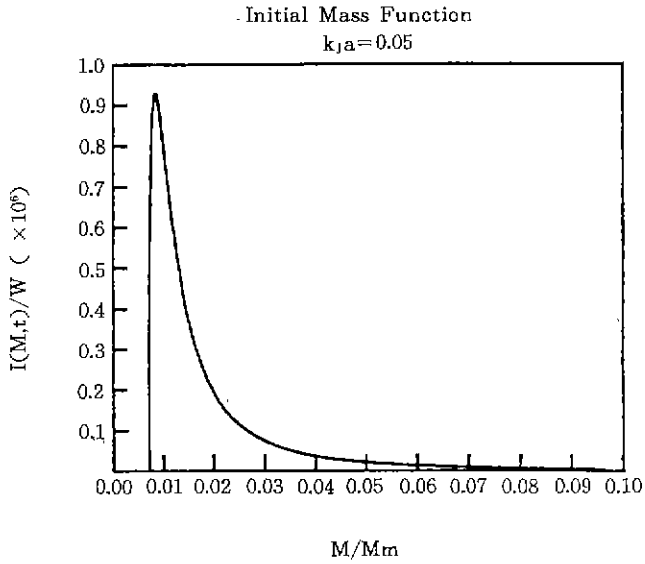


그림 7. 가스압이 자기압보다 큰 경우에 대한 초기 질량 함수( $k_{ja}=0.05$ ).

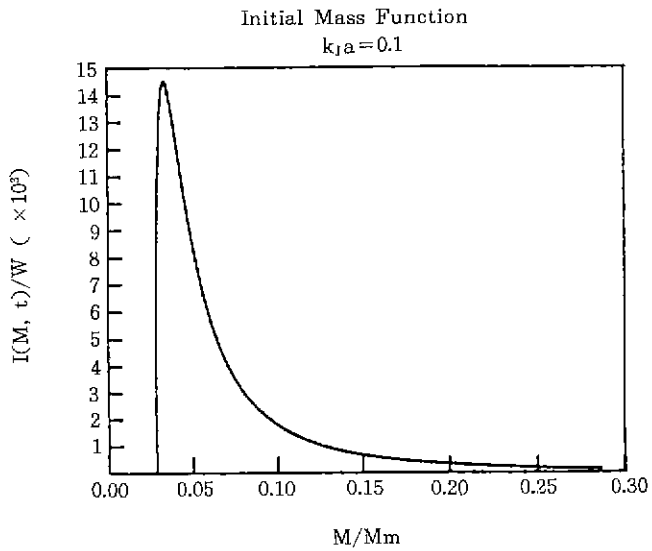


그림 8. 가스압이 자기압보다 큰 경우에 대한 초기 질량 함수( $k_{ja}=0.1$ )

INSTABILITY OF INFINITE DISK SYSTEM

가스압이 자기압보다 큰 경우에 대한 초기 질량 함수는

$$\Phi(M, \sigma) = \frac{k_m^2 \omega_m}{M_m} \left(\frac{M_m}{M}\right)^{5/2} \left[ \left\{ (A + 2.7) e^{-\left(\frac{M}{M_m}\right)^{1/2} k_{ja}} + 0.37 A \right\} \left(\frac{M_m}{M}\right) - \frac{2.7}{k_{ja}} \left(\frac{M_m}{M}\right)^{1/2} e^{-\left(\frac{M}{M_m}\right)^{1/2} k_{ja}} - \frac{1}{A + 2.7} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3.4)$$

이며(Choi 1988) 이에 대한 그림이 그림 7과 그림 8에 나타나 있다.

V. 결 론

자기장이 걸려 있는 성간 가스가 충격파로 인해 압축될 때 충격파 후면에 있는 가스층이 중력적으로 불안정하게 되는지를 살펴보았다. 무한 가스 원반계는 대칭 모드의 섭동으로 인해 중력적으로 불안정하게 된다.

가스압에 비해 자기압이 무척 큰 경우는 긴 파장을 갖는 섭동으로 인해 중력적으로 불안정하게 되지만 자기압 효과가 무시될 정도로 작은 경우에는 이보다 짧은 파장을 갖는 섭동으로 인해 불안정하게 된다.

성간 충격파로 인해 압축된 영역은 중력적으로 불안정하므로 결국 별들이 형성될 수 있는데, 자기압 효과가 작은 영역에서보다 자기장의 세기가 큰 영역에서 아마도 질량이 큰 별들이 형성될 것으로 기대된다.

참고문헌

최윤정, 1988. 연세대 석사학위논문.  
 Choe, S. U. 1986, *Jour. Korean Earth Science Society*, 7, No.1, 46.  
 Elmergreen. B. G. and Elmergreen, D. M. 1978, *Astrophys. J.*, 220, 1051.  
 Fazio, A. Di. 1986, *Astron. Astrophys.*, 159, 49.  
 Goldreich, P. and Lynden-Bell, D. 1965, *M. N. Roy. Astr. Soc.*, 130, 7.  
 Kaplan. S. A. 1966, *Interstellar Gas Dynamics*(Pergamon Press : New York).  
 Zuckerman, B. and Palmer, P. 1974, *Ann Rev. Astron. Astrophys.*, 12, 279.