

〈論 文〉

빈관의 급속한 채움에 의한 관단면의 급축소 부분에서의 수격작용

Mathematical Analysis of Water Hammer Generated in an Initially Empty Piping
with a Sudden Contraction Subject to Rapid Filling

우 효 섭 이 삼 희

Woo, Hyo Seop* Lee, Sam Hee**

Abstract

An analytical equation was formulated using the continuity, momentum, and energy equations for the transients generated in an initially empty piping with a sudden contraction subject to rapid filling with liquid. Also, two mathematical models, **MOC** and **RCT** were applied to this particular piping to reveal that the rigid column method is less applicable than the method of characteristics to the piping.

요 약

단면이 급축소 되는 관에서 액체의 급속한 채움에 의한 수격현상을 연속, 운동량, 그리고 에너지 방정식들을 이용하여 해석적으로 표시하였다. 이러한 관에 기존 수학모형인 **MOC**와 **RCT**를 적용한 결과에 의하면, 이러한 관단면의 급변화에 의하여 수격작용이 예상되는 경우의 부정류해석에는 Rigid Column Method의 사용은 제한 되어야 하며 Method of Characteristics를 사용하여야 한다.

1. 서 론

일반적으로 수격현상이란 관내에서 액체 운동의 급작스런 변화에 따른 액체의 압축현상과 그에 따른 압력파가 음파의 속도로서 상·하류로 전파 되는 현상을 말한다. 이러한 수격 현상은 관내의 정상적인 액체의 흐름이 부정류로 되는 경우 발생하며 특히 처음에 비어 있던 관을 액체나 액체/기체의 혼합물로 급속도로 채우는 경우 관단면이 변하는 곳에서 이동 유체의 압축 및 팽창

에 의한 압력파가 발생할 수 있다. 이러한 빈관에 급속히 채우는 경우의 부정류 문제의 좋은 예는 발전소 등에서 Demineralizer Vessel을 강한 압력으로 비울 때 하류부의 빈관망이 급속히 채워지게 되며 이때 관의 만곡부(elbow 등)나 Tee자형 접속부(Tee-Junction)에서 강한 Hydrodynamic Force를 받게 되는 경우를 들 수 있다. 또 다른 예는 화력이나 원자력 발전소나 화학공장 등에서 압축용기에 설치된 Blowdown Piping을

*수석연구원, 한국건설기술연구원, 수자원연구소

**연구원, 한국건설기술연구원, 수자원연구소

들 수 있으며 압축 용기의 과압시 Pressure Relief Valve가 자동적으로 급히 열림으로써 액체나 액체/기체의 혼합물이 빈관을 급격히 채우는 경우이다.

Papadakis-Hollingshead(1985)는 빈관에서의 액체의 급속한 채움에 의한 부정류 해석을 위한 수학모형을 발표한 바 있다. 그들의 수학모형의 액체만의 1차원 흐름 및 Rigid Column Theory에 기본을 둔 비교적 간단한 모형으로써 액체 전단에서의 Air Entrainment, Valve Choking, 관의 만곡부나 접속부에서의 Minor Losses, 관의 위치수두 등은 무시되었다. 1987년에 Woo-Papadakis에 의해 발표된 수학모형에는 상기 수학모형의 결점을 보완하기 위해 압력과의 유한전파속도를 고려한 Method of Characteristics이 이용되었으며 그밖에 Valve Choking, Minor Losses, 위치수두등이 고려되었다. 그러나 그들의 수학모형에서 Two-Phase Flow와 Air Entrainment 등은 여전히 고려되지 않았다.

본고에서는 단면이 급축소되는 관에서의 액체의 급격한 채움에 의한 수격현상을 해석적으로 표시하고자 한다. 이러한 단면의 급축소 부분에서의 수격작용 해석은 실용적인 면에서도 중요성이 있다. 예로써 관망을 처음으로 채우거나 시험을 할 때 관망 상단부에 Entrapped Air가 생길 수 있으며 이러한 Entrapped Air는 때로는 빈관이 완전히 채워진 후에 급작스럽게 소멸되어 강한 압력파를 발생하게 한다. 또한 이러한 Entrapped Air를 관 바깥으로 방출할 목적으로 관망의 상단부에 설치된 공기배출밸브(Air Release Valve)를 급히 여는 경우 공기 다음으로 밀려오는 액체가 단면이 급축소된 밸브에 부딪침으로써 강한 압력파가 발생할 수 있다. 이러한 공기 배출 밸브에서의 수격 현상은 1968년 이래 미국 Colorado 주립대에서 광범위한 실험 연구가 수행 되었으며 그 연구의 종합적인 결과가 J-M Pipe의 Manual로써 발표 되었다.

또한 여기서 해석된 결과를 Woo-Papadakis (1987)에 의해 개발된 두 수학 모형인 MOC (Method of Characteristics을 이용한 모형)와

RCT(Rigid Column Theory를 이용한 모형)의 결과와 비교함으로써 상기 두 수학모형들에 의한 결과의 차이를 보이고자 한다. 본 비교에서 알 수 있듯이 관단면의 급축소나 확대등에 의한 압력파의 급격한 변화가 예측되는 빈관의 채움을 시뮬레이션하는 경우 Rigid Column Method의 적용은 삼가되어야 하며 Method of Characteristics을 사용하여야 한다.

2. 단면 급축소부에서의 수격작용

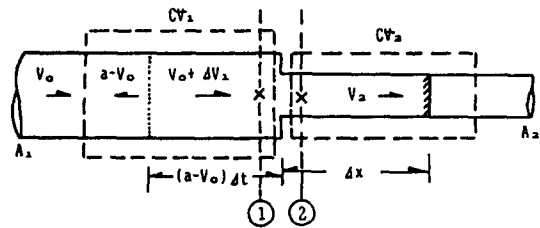


그림 1. 단면의 급축소부에서의 수격작용

그림 1과 같이 속도 V_0 로 빈관을 채우는 액체 전단이 관단면의 급축소부에 부딪칠때 액체는 압축되는 동시에 2번째 작은 단면의 관으로 진행된다. 이 때 단면의 급축소부에서 발생한 압력파는 액체내에서의 음파 a 의 속도를 상류로 전파된다.

이러한 상태의 부정류에서 Control Volume C_{v1} 에 선형 운동량 방정식을 적용하면,

$$\sum F_x = \frac{d}{dt} \int_{C_{v1}} \rho \vec{V} d_v + \int_{C_{s1}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (1)$$

윗 식에서 $\sum F_x$ 는 관의 축방향으로의 외력의 합이며, t 는 시간, ρ 는 액체의 밀도, \vec{V} 는 액체의 속도, \vec{A} 는 관단면적을 표시 한다. Control Volume C_{v1} 의 좌우단면에서의 압력수두의 차이를 ΔH_1 이라 하고 관면에서 마찰을 무시하면 상기 운동량 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$-\gamma A_1 \Delta H_1 = 1/\Delta t [\rho \Delta t (a - V_0) A_1 (V_0 + \Delta V_1) - \rho \Delta t (a - V_0) A_2 V_0]$$

$$-\rho A_1 V_0^2 + \rho A_1 (V_0 + \Delta V_1)^2 \quad (2)$$

$$\therefore \Delta H_1 = -\Delta V_1 / g (a + V_0 + \Delta V_1) \quad (3)$$

윗 식에서 γ 는 액체의 단위중량, g 는 중력가속도, Δt 는 미소시간, V_0 는 관1에서 초기속도, ΔV_1 는 관단면의 급축소에 의한 액체속도의 감소량(-), A_1 은 관1의 단면적을 표시한다. 위의 유도에서 액체의 압축에 의한 밀도의 감소 $\Delta\rho$ 는 매우 작으므로 무시하였다. 식(3)에서 압력과 전과 속도 a 는 유속 V_0 에 비해 통상 매우 크고 더구나 ΔV_1 이 “-”값을 가지므로 $V_0 + \Delta V_1$ 항을 무시할 수 있다. 이경우 식(3)은 다음과 같은 유명한 Joukowski 방정식이 된다.

$$\Delta H_1 = \Delta V_1 a / g \quad (4)$$

다시, 식(3)는 유량의 변화 $\Delta Q (= \Delta V_1 A_1)$ 을 이용하여 다음과 같이 표시 할 수 있다.

$$\Delta H_1 = \Delta Q / g A_1^2 (a A_1 + Q_0 + \Delta Q) \quad (5)$$

빈관망의 압력을 대기압으로 가정하고 같은 방법으로 선형 운동량 방정식(1)을 Control Volume C_{v2} 에 적용하면,

$$\gamma A_2 \Delta H_2 = 1 / \Delta t (\rho \Delta x A_2 V_2 - 0) - \rho A_2 V_2^2 + 0 \quad (6)$$

윗 식에서 기본 부호들은 전에 정의된 것들과 같으며 첨자 “2”는 2번째 관을 의미한다. 다시 C_{v2} 에 연속방정식을 적용하면,

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{C_{v2}} \rho dv + \int_{CS2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (7)$$

$$0 = 1 / \Delta t [\rho A_2 \Delta x] - \rho V_2 A_2 \quad (8)$$

$$\therefore V_2 = \Delta x / \Delta t \quad (9)$$

윗식 (9)를 식(6)에 대입하면

$$\gamma A_2 \Delta H_2 = \rho A_2 V_2^2 - \rho A_2 V_2^2 = 0 \quad (10)$$

따라서 액체의 전단이 단면의 급축소부를 통과한 직후에 작은 관내에서의 압력은 여전히 대기

압을 유지한다.

마지막으로 Bernoulli의 에너지 방정식을 단면 1, 2에 적용하면,

$$\frac{(Q_0 + \Delta Q)^2}{2g A_1^2} + \Delta H_1 = \frac{(Q_0 + \Delta Q)^2}{2g A_2^2} + \Delta H_2 + K_L \frac{(Q_0 + \Delta Q)^2}{2g A_2^2} \quad (11)$$

윗 식에서 K_L 은 단면의 급축소에 의한 에너지 손실계수이다. 따라서 식(5), 식(10)을 식(11)에 대입하여 정리하면,

$$Q_0^2 \{ \alpha^2 + (1 + K_L) \} + 2Q_0 \{ \alpha^2 \beta + (1 + K_L) \} + \{ (1 + K_L) - \alpha^2 \} = 0 \quad (12)$$

윗식에서, $Q_0 = \Delta Q / Q$

$$\alpha = A_2 / A_1, \quad 0 < \alpha \leq 1.0$$

$$\beta = a / V_0$$

식(12)는 Q_0 에 대한 2차 방정식으로 그 해는 다음과 같다.

$$Q_0 = \frac{-(\alpha^2 \beta + 1 + K_L) + \sqrt{\alpha^4 \beta^2 + 2\alpha^2 \beta (1 + K_L) + \alpha^4}}{\alpha^2 + (1 + K_L)} \quad (13)$$

식(13)의 물리적 의미는 다음과 같이 해석될 수 있다.

i) $\alpha = A_2 / A_1 = 1.0$ (등단면), $K_L = 0$

$$Q_0 = \frac{-(\beta + 1) + \sqrt{\beta^2 + 2\beta + 1}}{2} = 0 \rightarrow \Delta Q = 0$$

따라서 수격현상은 발생하지 않는다.

ii) $\alpha = A_2 / A_1 = 0$, $K_L = 0$

$$Q_0 = -1 \rightarrow \Delta Q = -Q$$

따라서 이론적으로 유속 V 는 순간적으로 0이 되어 매우 큰 압력파가 발생할 것이다.

iii) $\beta = a / V_0 \rightarrow \infty$

$$Q_0 = \frac{-\alpha^2 \beta + \sqrt{\alpha^4 \beta^2}}{\alpha^2 + (1 + K_L)} = 0 \rightarrow \Delta Q = 0$$

이 경우와 같이 유파의 전파 속도 a 가 무한대가 되는 경우 액체는 비압축성으로 간주된다.

iv) $\beta = a/V_0 \rightarrow 0$

이 경우는 액체의 압축성이 매우 커서 a 가 매우 작거나 V_0 가 매우 큰 경우이나 본 해석에서는 액체 밀도의 변화를 무시하였기 때문에 이 경우는 고려될 수 없다.

식(13)에서 단면 손실계수 K_1 를 무시하면

$$Q = \frac{-(\alpha^2\beta + 1) + \alpha \sqrt{\alpha^2\beta^2 + 2\beta + \alpha^2}}{\alpha^2 + 1} \quad (14)$$

상기 식에 의한 단면의 축소에 의한 유량감소율 Q 과 α , β 와의 관계가 그림 2에 도시되었다. 기대하였던 대로 한 축소단면에서는 β 값이 작을 수록 수직작용에 의한 유량의 변화는 커지며 β 값이 일정한 경우 단면의 축소율이 커질수록 (α 값이 작을 수록) 유량변화는 커짐을 알 수 있다.

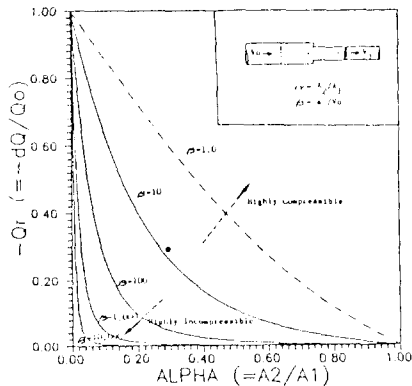


그림 2. 단면의 급축소에 의한 유량 감소

관 단면의 급축소 부분에서 유량 감소에 따른 압력 증가를 구하기 위하여 다음과 같이 수직압력 ΔH_1 과 동압력 ΔH 의 비를 정의 하였다.

$$\begin{aligned} \Delta H_1 &= \Delta H_1 / \Delta H \\ &= -2Q_1(\beta + 1 + Q_1) \\ &\cong -2\beta Q_1 \end{aligned} \quad (15)$$

윗식에서, $\Delta H_1 =$ 식(5)

$$\Delta H_1 = Q_1^2 / 2gA_1^2$$

따라서 식(14)을 이용하면 α 및 β 의 변화에 따른 ΔH_1 의 변화를 구할 수 있다. 그림 3은 α 및 β 의 변화에 따른 ΔH_1 의 변화를 도시한 것이다. 이 그림에서 보이듯이 β 값이 일정한 경우 단면의 축소율이 클수록 수직작용에 의한 압력은 증가하며 한 축소 단면에서는 β 값이 클수록 수직작용에 의한 압력은 급격히 증가 함을 볼 수 있다.

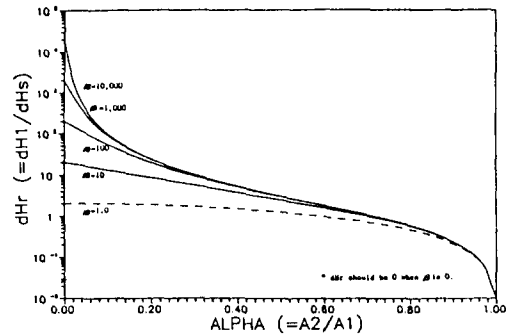


그림 3. 단면의 급축소에 의한 수직압력

3. 수학모형 R C T 모델와 M O C 모델

전술한 바와 같이 RCT 와 MOC는 빈 관에서 의 액체의 급속한 채움에 의한 부정류를 시뮬레이션 하는 수학 모형 들이다. RCT 모델은 유체의 비압축성에 가정을 둔 Rigid Column Method 를 응용하였으며 상류단에서의 경계조건(고압 탱크, 밸브 등)에 의해 빈관을 채우는 액체의 이동 및 그에 따른 elbow나 tee 등에서의 Hydrodynamic Force를 계산한다. 관내에서의 액체의 흐름은 1차원 및 Single Phase로 가정하였으며 따라서 Air Entrainment등은 고려되지 않았다. 그 밖에 Valve Choking, Minor Losses, 위치수두 등은 각 모형에 고려되었다. 두번째 모형인 MOC는 유체의 압축성 및 압력파의 유한 전파속도에 기준한 Method of Characteristics를 응용하

였다. 다만 MOC에서 액체 전단의 진진을 시물레이션 하기 위해서 Rigid Column Method를 응용하였다. 따라서 이러한 Method of characteristics에 기초를 둔 MOC는 다른 구성에서는 RCT와 흡사하다. 그러므로 강한 수격 현상이 예측되지 않는 관망에서의 두 모델들의 결과는 근본적으로 일치하고 있다.

그러나 관단면의 급격한 변화 등에 의한 수격 현상이 여기되는 경우, 두 수학 모형들의 예측 결과는 명백한 차이가 난다. 예로써 그림 4에 보듯이 관단면이 0.6m에서 0.38m로 급속소되는 경우, 초기유속 10m/s로 전진하는 액체전단이 단면의 축소부에 부딪혀 발생하는 압력파의 전파는 MOC에 의해서만 시물레이션 되며 RCT는 단지 압력파의 변화의 평균값을 보여준다. 그림 4에서 압력파의 전파속도는 1,000m/s로 가정하였

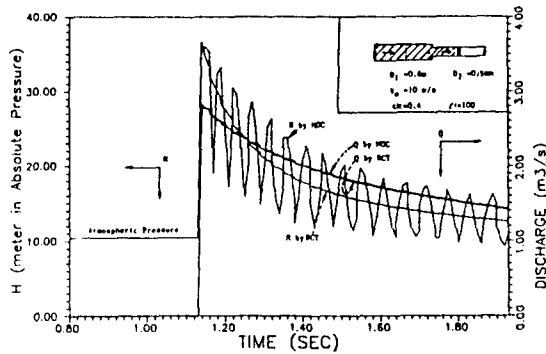


그림 4. MOC와 RCT에 의한 단면의 급속소부에서의 수격작용

으며 압력파의 전파주기는 상류관의 길이 및 상류 경계조건에 따라 달라질 수 있다. 액체전단이 단면의 축소부에 부딪히는 순간 발생하는 수격압력의 크기는 그림 4의 경우 MOC와 RCT 공히 약 36m이며 이 값은 본 연구에서 제시된 해석적인 방법, 식(14)에 의한 값 35.6m ($\alpha = 0.4$, $\beta = 1,000/10 = 100$)와 잘 일치하고 있다.

RCT에 의한 압력의 변화가 그림 4에 보이듯이 수격 압력의 평균값을 보이고 시간에 따른 파압의 진동을 예측하지 못하는 이유는 Rigid Column Method에서는 압력파의 전파 속도가 무한대(비압축성)라는 가정 때문이다. 따라서 관내

의 액체의 압축에 의한 어떤 압력변화 (disturbance)도 순간적으로 전파 되어 관내 모든 액체흐름에 분포되므로 단면의 급속소 부분에서 생기는 수격 압력도 단지 평균적으로 완만하게 나타나게 된다. 유량의 변화는 그림 4의 예제의 경우 $\Delta Q = 0.07 \text{ m}^3/\text{s}$ ($Q_0 = 2.83 \text{ m}^3/\text{s}$)로서 시간에 따른 유량도 그림 4의 압력파의 진동과 같이 미세한 진동은 하나 이러한 유량의 진동은 매우 작아서 두 방법(RCT과 MOC)에 의한 유량 예측 결과는 실질적으로 서로 일치하고 있다.

4. 결론

단면이 급속소되는 관내에서 액체의 급격한 채움에 의한 수격현상을 해석적으로 표시하였다. 본 해석에서는 관내의 흐름은 Single Phase 액체의 1차원 흐름이라 가정하였다. 해석 결과에 의하면 액체의 속도 V와 압력파의 전파속도 a와 비(β)가 일정한 경우 단면의 축소율이 커질수록 액체의 압축에 의한 유량은 감소하며, 따라서 수격압력 역시 급격히 증가한다. 같은 축소 단면에서는 액체의 압축성이 클수록 (a/V_0 가 작을수록) 유량의 감소율은 커지나 수격 압력의 증가율은 감소한다. 빈관을 액체로 급히 채울 때 생기는 부정류를 시물레이션하는 두 수학모형인 MOC와 RCT의 차이는 본 연구에서 보여준 바와 같이 단면이 급히 변화하는 곳에서 현격히 차이를 나타낸다. 이 경우 Rigid Column Method에 기초를 둔 RCT는 단지 수격 작용에 의한 압력 변화의 평균적인 값만을 보여주며 MOC만이 시간에 따른 압력의 진동을 묘사한다. 따라서 관부정류의 해석에서 이러한 단면의 급속소와 급확대 등에 의한 압력파의 급격한 변화가 예측되는 경우, Rigid Column Method의 적용은 삼가하여야 하며 Method of characteristics를 사용하여야 한다.

5. 참고문헌

(1) Papadakis, C.N., and Hollingshead, D., *Tran-*

sients in empty pipes subject to rapid filling, Proceedings of the 1985 ASCE Hydraulics Division Specialty conference on Hydraulics and hydrology in the Small Computer Age, Lake Buena Vista, FL., Aug., 12-17, 1985.

- (2) Woo, H., and Papadakis. C.N., *Forces in initially empty pipes subject to rapid filling*, Fluid Transients in Fluid-Structure

Interaction-1987, The Winter Annual Meeting of the ASME, Boston, Mass., Dec. 13-18, 1987.

- (3) J-M Pipe, *Concepts of water hammer & air entrainment in the filling & testing of pipelines*, J-M Manufacturing Co., Stockton, Calif.