

## 論 文

## 誤差解析에 의한 海洋放射境界條件 比較

Comparison of Radiating Ocean Boundary Conditions by Error Analysis

徐 承 源\* · 尹 泰 勳\*\*  
Suh, Seung Won\* Yoon, Tae Hoon\*\*

## Abstract

The effects of open boundary conditions including the radiating condition are compared by utilizing the  $L^2$ -norm and RMS error in the numerical modeling of ocean problem. In numerical tests of  $M_2$  tide, grid size and bed roughness are considered and analyzed. For the  $M_2$  tide test in a simplified bay where the analytical solutions are available, it is found that improved radiating boundary condition(IMPSON) may increase the reliability of computed results by 40% of  $L^2$ -norm and 96% of RMS error than the open boundary condition without radiating effect.

In case of using the half-size grids, better results are obtained. It is also found that the IMPSON is applicable with satisfaction when the bottom friction is included.

## 要 旨

海洋數值模型에 適用되는 相異한 放射條件을 포함한 開放境界條件의 影響이  $L^2$ -norm과 RMS誤差 解析에 의하여 比較되었다. 數值實驗에서는  $M_2$ 潮汐, 格子網의 影響, 海底摩擦의 影響 등이 각각 고려되었다. 研究結果 改善放射條件이 고려될 때 단순한 矩形灣에서 解析解와 比較된  $M_2$ 潮汐의 경우는 放射條件이 고려되지 않을때보다  $L^2$ -norm에 의하면 40%, RMS誤差에 의하면 96%나 信賴性이 향상되었다. 이는 半格子를 利用할 때 보다도 더욱 만족스러운 結果인 것으로 나타났다. 海底摩擦이 고려된 경우도 改善放射條件의 도입이 필요한 것으로 판단되었다.

## 1. 序 論

河口나 灣에서 潮汐運動에 관한 數值的인 模擬 技法은, 컴퓨터시대의 시작과 함께 활발히 研究 되는 분야로서 潮汐運動에 관한 편미분방정식에 대한 近似解를 구하는 방법이다. 模擬技法이 數學的인 관점에서 원래의 기본식을 충분히 만족시킨다 하더라도 해석하고자 하는 대상영역은 有限

한 海域으로 국한된다. 그렇지만 유한한 영역에 관한 조석운동의 해석을 위하여 數學的 및 物理的 의미가 충분히 반영된 기법을 이용하기 위한 시도는 꾸준히 계속되고 있으며, 河口나 灣에서의 조석운동을 어떻게 外海와 연결하여 해석할 것인가라는 문제는 많은 연구자들이 관심을 기울이는 부분이다. 이를 접근방법에 따라 분류하면 다음과 같다.

\* 國立群山大學 海洋工學科

\*\* 漢陽大學校 土木工學科

첫째는, 1970년대 초부터 數値境界條件 (Numerical Boundary Condition)의 중요성이 대두되어 數値物理學 분야에서 이루어진 일련의 연구이다.<sup>(8,14,16,19)</sup> 이러한 연구들은 基本方程式을 풀이하는데 있어 内部領域의 解에 의하여 開放境界에서 반사되는 영향을 최소화시키고자 수치적인 개방경계를 부여한 것으로, 공학적인 접근보다는 數値物理的인 관점에서 행하여졌다.

둘째는, 海洋과 灣에서의 潮汐운동이 電氣의 인 교류회로이론과 유사하다고 간주하고 이에 따른 水動力學的 유추해석을 행한 연구로서 Garrett<sup>(11)</sup>, Garrett와 Greenberg<sup>(12)</sup> 그리고 Prandle<sup>(18)</sup> 등이 있으며, 이들은 潮位와 電壓, 해저마찰과 전기저항, 수면적과 전기용량 등이 상호 유사하다고 보았다.

셋째로는 有限한 영역내의 조석운동이 外海와의 경계인 開放境界地點에 부여되는 조건들에 따라 교란을 받지 않고 충분히 영역밖의 外海로 전파될 수 있어야 한다는 放射境界條件(Radiating Boundary Condition)에 입각한 연구이다. 이는 Sommerfeld가<sup>(20)</sup> 光學분야의 연구에서 광원의 무한원방에서는 광선이 교란하지 않고 밖으로 뻗어야 된다는 이론을 제창한 이래, 光波와 海洋에서의 波動특성이 유사한 점에 착안하여 數値模型 적용시, 이 방사경계조건의 수정된 형태를 이용하여 제한된 영역내에서 방사조건의 의미를 부여하는 연구가 수행되고 있다.

Orlanski는<sup>(17)</sup> 일차원 線形淺水波方程式의 전파에 관하여 반사영향을 받지 않는 Sommerfeld의 방사경계조건을 제안하였으며 수치적인 傳播速度의 개념을 도입하여 개방경계에서 放射條件을 만족시키도록 하였다.

Camerlengo와 O'Brien은<sup>(6)</sup> 地球科學的인 측면에서의 數値模擬 경우, 개방경계조건의 역할을 살펴보기 위한 해석을 하였다. 이들은 Orlanski의 수정된 형태를 이용하여 개방경계조건을 설정하였고, 지배방정식이 선형천수파인 경우는 Sommerfeld 放射條件이 최적이라고 결론지었다.

Hebenstreit 등<sup>(13)</sup>도 개방경계근처에서 분산된 波의 放射傳播를 고려하는 일종의 개선된 경계조

건을 제안하였다. 이들은 경계에서 분산된 파의 방사상 유속성분을 만내의 점으로부터 경계까지가 고려된 함수관계로 표현하였다.

Blumberg와 Kantha<sup>(5)</sup>, 역시 개방경계에서 放射條件을 만족시키기 위하여 Dirichlet 조건의 일종인 구속된 경계조건(Clamped Boundary Condition)을 이용하였으며 특히 감쇠영향을 고려하기 위하여 마찰시간이라는 변수를 도입하여 해석하였다.

Chapman<sup>(7)</sup>은 海域의 해안선에 수직한 경계(Cross-shelf)에 대한 최적의 개방경계조건을 모색하기 위하여 여러 조건을 상호 비교하였다. 해안선에 수직한 경계에 관한 조건으로는 구속된 경계조건이 가장 좋지않은 결과를 유발하며, Orlanski 경계조건이 최적이라고 결론지었다.

徐<sup>(3)</sup>는 기존 Sommerfeld 放射條件式에 2단계 기법과 中央差分法을 이용한 改善放射條件式이 기존의 Sommerfeld 방사조건보다 더욱 만족스러운 결과를 제공함을 밝혔다.

이상과 같이 海洋에서 數値模型 적용시 開放境界에 의하여 내부영역의 解가 구속되는 것을 방지하고자 放射條件과 이의 수정된 형태 등이 제안되고 있다. 本研究은 이들 각각의 특성을 파악하고 개방경계조건을 평가할 목적으로 수행되었다. 기존 연구에서 제안된 조건식을 解析解를 구할 수 있는 단순정형화된 灣에 적용하여  $L^2$ -norm 및 RMS오차를 통한 定量的 평가를 실시하였다. 수치실험에서는 해저마찰을 고려한 長週期波에 대한 실험이 이루어졌으며 格子간격의 영향이 검토되었다.

## 2. 數値模型과 放射境界條件

### 2.1 數値模型

해양에서의 波動解析에 관한 기본방정식으로 水深平均의 2次元 淺水方程式이 일반적으로 이용되고 있다. 이는 非定常 흐름현상을 모의할 수 있고, 수치모형의 運用이 3次元方程式을 택하였을 때 보다 월등히 경제적으로 수행될 수 있으며, 또한 淺水領域에서 만족스럽게 적용될 수 있으며

로 널리 채택된다.

바람의 영향과 지구자전의 영향을 무시한 水深平均의 2차원 연속방정식과 운동방정식은 Index notation을 이용하면 다음과 같이 표현된다.<sup>(2,3,4)</sup>

$$\zeta_{,t} + \{(h + \zeta)U_i\}_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$U_{i,t} + U_i U_{i,j} + g \zeta_{,i} \tau_{bi} - \epsilon U_{i,jj} = 0 \quad (2)$$

여기서  $\zeta$ 는 基準水面(MSL)에 관한 수면의 변위를 나타내고,  $h$ 는 수심,  $U_i$ 는 직각좌표계  $i$ 방향의 수심평균유속이며,  $g$ 는 중력가속도,  $\tau_{bi}$ 는  $i$ 방향의 해저마찰영향을 나타내는 항이고,  $\epsilon$ 은 와점성계수이다.

基本方程式에 관한 數值模型으로 본연구에서는 有限要素法을 이용하며, 비정상 상태에 관한 시간적분으로는 質量集中化技法을 이용한 2단계 Lax-Wendroff 방법인 陽解法을 적용한다. 이 수치모형은 비단 河口나 灣과 같은 해역에서 뿐만 아니라 開水路에서도 적용되어 해석된 바 있고, 기존의 MacCormack, Godunov방법과 같은 有限差分法에 비해 解의 안정성과 신뢰성이 인정된 바 있다.<sup>(2)</sup>

식(1), (2)를 기초로한 최종의 유한요소 수치모형은 다음과 같이 2단계로 표현된다.<sup>(2,3)</sup> 상세한 전개 및 수립과정은 참고문헌 3에 주어져 있다.

$$L_{\alpha\beta} U_{\beta}^{+1/2} = M_{\alpha\beta} U_{\beta} - \frac{\Delta t}{2} X_{\beta} \quad (3)$$

$$L_{\alpha\beta} U_{\beta}^{+1} = M_{\alpha\beta} U_{\beta} - \frac{\Delta t}{2} X_{\beta}^{+1/2} \quad (4)$$

여기에서  $L_{\alpha\beta}$ 는 유한요소모형의 질량집중행렬을 나타내고,  $U_{\beta}$ 는 기본식의 未知值인  $\zeta$ 와  $U_i$ 의  $\beta$ 절점에서의 값이며,  $M_{\alpha\beta}$ 는 질량행렬,  $X_{\beta}$ 는 계산된 열벡터를 의미하고,  $\Delta t$ 는 CFL안정조건에 맞는 적분시간간격을,  $n$ 은 시간적분점을 나타낸다.

## 2.2 放射境界條件

序論에서 기술한 바와 같이 본 연구에서는 방사조건에 입각하여 개방경계조건을 평가함으로

써 대상영역내의 계산된 값이 개방경계조건에 의하여 구속되는 것이 감소되는 것을 살펴본다.

연구자들이 제안한 開放境界條件으로는 Sommerfeld의 放射條件<sup>(20)</sup> [SOM], Blumberg와 Kantha에 의한 部分拘束條件<sup>(5)</sup> [PCL], Orlanski가 제안한 放射條件<sup>(17)</sup> [ORL], Camerlengo와 O'Brien가 제안한 放射條件<sup>(6)</sup> [MOO], 그리고 Sommerfeld 방사조건에 개선점을 마련하여 徐<sup>(3)</sup>가 제안한 放射條件 [IMPSOM] 등이 있다. 본 연구에서는 이들 방사조건과 아울러 방사영향이 고려되지 않은 경계조건 [COMMON]을 함께 고려하였다.

上記 放射條件式과 數值化는 다음과 같다.

$$\text{SOM} : \phi_{,t} + C \phi_{,n} = 0, C = \sqrt{gh} \quad (5)$$

$$\text{수치화} : \phi_B^{t+1} = \phi_B - C_r(\phi_B - \phi_{B-1}) \dots \quad (6)$$

$$\text{PCL} : \phi_{,t} + C \phi_{,n} = -\phi/T_f, C = \sqrt{gh} \quad (7)$$

$$\text{수치화} : \phi_B^{t+1} = \phi_B \left(1 - \frac{\Delta t}{T_f}\right) - C_r(\phi_B - \phi_{B-1}) \quad (8)$$

$$\text{ORL} : \phi_{,t} + C \phi_{,n} = 0 \quad (9)$$

$$C = \Delta x / \Delta t, \phi_{,t} / \phi_{,n} \geq \Delta x / \Delta t \\ = \phi_{,t} / \phi_{,n}, 0 < \phi_{,t} / \phi_{,n} \leq \Delta x / \Delta t \\ = 0, \phi_{,t} / \phi_{,n} \leq 0$$

$$\text{수치화} : \phi_B^{t+1} = \frac{[\phi_B^{t+1}(1 - C_r) + 2C_r \phi_{B-1}]}{(1 + C_r)} \quad (10)$$

$$C_r = 1, C_L \geq 1 \\ = C_L, 0 < C_L \leq 1 \\ = 0, C_L \leq 0$$

$$C_L = \frac{\phi_{B-1}^{t-2} - \phi_B^t}{\phi_{B-1}^t + \phi_{B-1}^{t-2} - 2\phi_{B-1}^{t-1}}$$

$$\text{MOO} : \phi_{,t} + C \phi_{,n} = 0 \quad (11)$$

$$C = \Delta x / \Delta t, \phi_{,t} / \phi_{,n} > 0 \\ = 0, \phi_{,t} / \phi_{,n} \leq 0$$

$$\text{수치화} : \phi_B^{t+1} = \phi_{B-1}, C_L > 0 \\ = \phi_B^t, C_L \leq 0$$

$$\text{IMPSOM} : \phi_{,t} + C \phi_{,n} = 0, C = \sqrt{gh} \quad (12)$$

$$\text{수치화} : \phi_B^{t+1/2} = \phi_B - \frac{C_r}{4}(\phi_B - 2\phi_{B-1} + \phi_{B-2})$$

$$\phi_B^{t+1} = \phi_B - C_r/2(\phi_B^{t+1/2} - 2\phi_B^{t+1} + \phi_B^{t+1/2})$$

COMMON :  $\phi = Ae^{j\omega t}$  (13)

여기에서  $\phi$ 는 開放境界에서의 水位 혹은 流速,  $t$ 는 시간,  $n$ 은 개방경계의 수직방향,  $C$ 는 波의 傳播速度,  $C_r$ 은 Courant수,  $T_r$ 는 마찰의 영향을 표현하는 시간단위,  $C_L$ 은 數值的인 波의 傳播速度(Numerical Celerity),  $A$ 는 波振幅,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega = 2\pi / T$ 이며, 위첨자  $t$ 는 계산이 행하여지는 시간단계이고 아래첨자  $B, B-1, B-2$ 는 개방경계 및 인접한 내부의 절점을 가리킨다.

2.3 誤差評價

수치모형에 의하여 계산된 解는 기본방정식을 근사화 시킬때 수반되는 수학적 오차를 내포한다. 數學的 誤差를 정량적으로 평가하기 위한 방법으로서 해석해를 구할 수 있는 영역에 수치모형을 적용하고 數值解와 正確解를 비교하는 방법이 이용되고 있으며 본 연구에서는 RMS오차와  $L^2$ -norm을 이용하여 비교하기로 한다.

RMS오차  $e$ 는 有限要素의 개개의 절점에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$e = [(u_i - u_i^0)^2 + (\zeta_i^n - \zeta_i^0)^2]^{1/2} \quad (14)$$

즉 RMS오차해석에 따르면 유한요소 절점에 대한 공간적 분포상황이 고려된다. 위의 식에서 아래첨자  $i$ 와  $a$ 는 유한요소의 절점 $i$ 와 여기에 대한 해석해를 의미하고 위첨자  $n$ 은 임의의 시간대를 나타낸다.

RMS오차와 함께 이용된 또하나의 분석방법은 Hilbert Space에서 다음과 같이 정의되는  $L^2$ -norm이다<sup>(9)</sup>.

$$\|e\|_{L^2} = [\int |e|^2 dx]^{1/2}$$

본 연구에서는 數值模型의 初期條件 영향도 고려될 수 있도록 다음과 같이 변형된 형태를 이용하여 해석하기로 한다<sup>(10)</sup>.

$$\|e\|_{L^2} = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N [(U_i^n - U_i^0)^2 + (\zeta_i^n - \zeta_i^0)^2]}{\sum_{i=1}^N [(U_a^0)^2 + (h_i^0)^2]} \right\}^{1/2} \quad (16)$$

여기에서  $N$ 은 총절점수이며 위첨자  $0$ 는 초기상태를 가리킨다.

즉,  $L^2$ -norm解析에 의하면 초기상태의 영향이 고려되고 해석되는 전체의 유한영역에 대한 오차가 단일값으로 표현되어 開放境界條件의 비교에 유용하게 응용될 수 있으나 RMS처럼 공간적 분포는 고려되지 않는다.

3. 模型實驗 및 結果分析

3.1 M<sub>2</sub> 潮汐實驗

조석의 영향을 받는 灣에 대하여 수치모형을 적용할 때 개방경계에 부여되는 조건에 따른 내부영역의 계산되는 流速 및 水位 의존성을 파악하기 위하여 그림 1과 같은 해석해를 구할수 있는 定形化된 灣을 대상으로 하였다.

矩形灣에 대한 數值解와 解析解의 비교는 數值模型의 신뢰성을 밝히기 위한 수단으로서 이용되며, 國外的 경우는 물론<sup>(10)</sup> 國內에서는 徐 등의 일련이 연구<sup>(1,2,3)</sup>에 이용되고 있다. 이러한 경우에는 해석적으로 解를 구하기 위하여 2차원 천수 방정식인 기본식 (1), (2)에서 바닥마찰항 등의

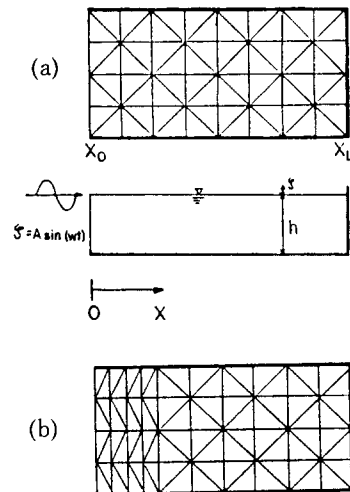


Figure 1. Finite element idealizations of a simplified bay in numerical tests (a) original grid (b) half-size grid near the open boundary.

非線型성이 무시되고 있다.

本  $M_2$  潮汐實驗에서는 그림 1(a)에서 格子間隔이 2km, 灣入口部 幅이 8km, 長이가 16km일때 初期水深은 10m, 灣入口部 開放境界에 입사하는 波振幅은 0.25m로 설정되었다. 初期條件은 Cold Start로 취하고 積分時間間隔  $\Delta t$ 는 CFL安定條件을 만족하는 1분으로하여 潮汐週期 12.5時間의 4週期인 50時間에 대해 2.2에서 검토된 開放境界條件을 부여한 數值實驗이 실시되었다.

그림 2에서 初期狀態로부터 3週期가 경과된 후에 초기영향이 소멸되어 準定常狀態에 도달된 波動 1주기간의  $L^2$ -norm 변화가 도시되고 있다.

開放境界條件중 放射영향이 고려되지 않은 COMMON의 平均 및 最大  $L^2$ -norm이 각각  $0.825 \times 10^{-3}$ 과  $1.25 \times 10^{-3}$ 으로 나타나 방사조건을 고려한 경우보다 좋지않은 결과를 보이며, 특히 방사조건들 중 徐의 연구에서 채택한 2단계 수치 모형에 맞는 IMP SOM의 平均 및 최대  $L^2$ -norm이  $0.425 \times 10^{-3}$  및  $0.700 \times 10^{-3}$ 으로 가장 좋은 결과를 나타낸다.

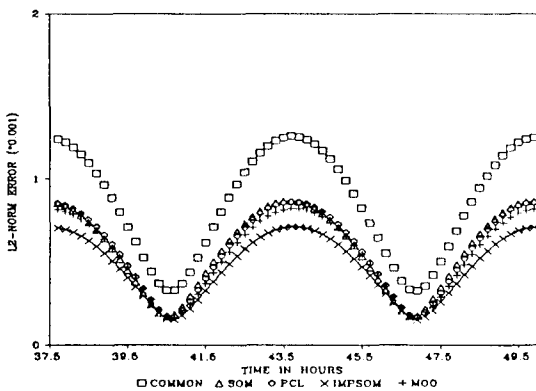


Figure 2. Comparison of  $L^2$ -norm of open boundary conditions in  $M_2$  test.

時間과 空間的인 誤差의 變化를 살피기위해 RMS오차를 이용한 결과를 비교하면 COMMON의 경우는 開放境界地點에서 큰 오차가 발생되어 최대치 0.090을 기록하는 한편, 방사영향이 고려된 경우는 開放境界를 비롯한 灣內 全領域에 고 큰 오차분포상황을 보인다. 이들의 최대치를 비

교하면 SOM일때 0.008, PCL일때 0.009, ORL일때 0.048, MOO일때 0.009인 반면 IMP SOM 경우는 0.004로써 방사조건이 고려된 결과가 COMMON의 0.009보다 월등히 정확해에 가까운 것을 알 수 있고, 특히 개방경계조건으로 IMP SOM을 택할 때는 SOM보다도 오차를 50%나 감소시킬 수 있는 것으로 나타났다<sup>(3)</sup>.

### 3.2 格子間隔의 影響 實驗

潮汐灣에 관한 數值模型으로 有限要素法이 적용될 때 대상영역은 격자망으로 분할된다. 이 과정에서 분할되는 격자크기에 따른 數值解의 영향을 분석하기 위하여 그림 1(a)에 도시된 矩形灣을 (b)와 같이 入口部에서 원래 격자크기의 반으로 취한 경우를 고려하고 (a)와 구별하기 위해 半格子라 이름 붙인다.

半格子인 경우에 두가지의 수치실험이 수행되었다. 첫째는 3.1과 동일한 조건인  $M_2$  潮汐이 응용된 경우이다. 둘째는 長週期波에 관한 실험으로써, 灣入口部 幅이 100m, 長이가 200m인 경우 初期水深이 10m일때 週期 200秒의 長波가 振幅 0.25m로 입사되는 경우, CFL安定條件에 맞는  $\Delta t=1$ 秒로 하여 1000초까지 수치적분되었다. 위의 두 경우에 COMMON, SOM, PCL, MOO 그리고 IMP SOM의 開放境界條件이 부여되어  $L^2$ -norm에 의해 數值實驗結果가 分析되었다. 표 1에서는 準定常狀態에 도달되었을 때 1週期間 나타나는 最大  $L^2$ -norm이 開放境界條件별로 원래 格子網과 半格子網에 대해 수록되었다.

위 結果를 分析하면 개방경계에서 放射條件이 부여되지 않고 통상적으로 水位에 관한 週期函數로 주어지는 COMMON 보다는 放射條件이 가미된 SOM, PCL, MOO 등이  $M_2$  潮汐에 관한 실험에서 약 33% 정도 개선되는 효과를 나타낸다. 그러나 계산의 신뢰도를 향상시키고자 半格子網을 이용한 경우는 7.2~19.5% 정도의 개선되는 결과를 보이고 있다.

이와는 대조적으로 長週期波에 관한 실험에서는 기존 방사조건을 고려할 때 COMMON에 비하여 14% 정도 밖에 개선되지 않으나 半格子를

Table 1. Maximum  $^2$ -norm( $\times 10^{-4}$ ) and Improvement Efficiency(%)

PERIOD	GRID SPACING	OPEN BOUNDARY CONDITIONS					IMP.	IMP.
		COMMON	SOM	PCL	MOO	IMPSOM	EFFCY2*	EFFCY3*
M <sub>2</sub> Tide	Original						30.4	
	$\Delta x=2$ Km	12.5	8.7	8.7	8.3	7.2	-33.6	42.4
	Half-size						30.0	
T=12.5 (hr)	$\Delta x=1$ Km	11.0	7.0	7.0	7.7	NT*	-36.4	-
	Improved efficiency1*	12.0	19.5	19.5	7.2	-	-	-
Long Period	Original							
	$\Delta x=25$ m	52.0	45.0	45.0	45.0	29.0	13.5	44.2
	Half-size							
T=200 (sec)	$\Delta x=12.5$ m	34.0	29.0	29.0	29.0	NT*	14.7	-
	Improved efficiency1*	34.6	35.6	35.6	35.6	-	-	-

\*: Improved Efficiency 1 means efficiency of half-size grid(Fig. 1(b)) to the original grid (Fig. 1(a)).

Improved Efficiency 2 means efficiency of three radiating boundary conditions(SOM, PCL, MOO) to COMMON condition.

Improved Efficiency 3 means efficiency of IMPSOM conditions to the COMMON.

NT means Not Tested.

이용하면 35% 정도의 개선되는 효과를 나타낸다.

여기서 특기할 점은 개선방사조건인 IMPSOM을 적용하면 M<sub>2</sub>潮汐이나 長週期波의 두 경우 모두 40% 이상의 높은 개선율을 기록하고 있는 점이다.

따라서 長週期波보다 M<sub>2</sub>潮汐과 같이 실제적으로 潮汐灣의 波動을 數值模型으로 해석할 때 半格子網을 취하므로써 原格子에 비하여 계산상 노력이 수배에 달하는 단점에도 불구하고 기대되는 계산효율보다는 오히려 개방경계에서 적절한 放射條件을 고려하므로써 훨씬 더 정확해에 근접할 수 있을 것으로 사료된다. 특히 기존 방사조건을 적용하는 것보다 IMPSOM을 적용하면 더욱 실제에 가까운 결과가 도출될 수 있을 것으로 판단된다. 본 수치모형실험에서는 IMPSOM이 기존 방사조건에 비하여 M<sub>2</sub>潮汐일때 1.3배정도, 장주기과동일때 약 3배정도 좋은 결과를 제공한다.

### 3.3 海低摩擦이 고려된 長週期波 實驗

淺水領域에서 흐름을 지배하는 주요인자중 하나인 海低摩擦에 의한 영향을 살펴보기 위하여 그림 1(a)의 矩形灣에서 數值實驗이 실시되었다. 海低摩擦應力項이 실제로는  $\tau_{bi} = n^2 g / h^{4/3} (u_i u_i)^{1/2} u_i$ 로 非線型으로 표현되어 해석되나 本研究에서는 해석적으로 해를 구하고 수치해와 比較하기 위하여  $\tau_{bi} = r u_i$ 과 같이 선형으로 변화한다고 간주하였다. 여기서 r은 海低摩擦應力係數로 Chezy係數 C<sub>z</sub>를 이용하여 표현하면 다음과 같다<sup>(15)</sup>.

$$r = \frac{8g}{3\pi} \frac{(U_1)_{\max}}{C_z^2 h} \quad (17)$$

여기에서 (U<sub>1</sub>)<sub>max</sub>는 상수로 가정된다.

矩形灣의 開放端에서 波動이 水位에 대하여 週期函數로  $\zeta = Ae^{i\omega t}$ 와 같이 부여된 경우 비선형항을 무시한 灣內 임의의 위치(x)와 시간(t)에

관한 해석적해는 다음과 같이 유도된다<sup>(3)</sup>.

$$\zeta_a = \frac{A}{1 + e^{2kL}}(e^{2kL}e^{-kx} + e^{kx})e^{j\omega t} \quad (18)$$

$$u_{1a} = \frac{j\omega A}{hk(1 + e^{2kL})}(e^{2kL}e^{-kx} - e^{kx})e^{j\omega t} \quad (19)$$

여기서  $k^2 = (j\omega - \omega^2) / gh$ 이고,  $L$ 은 灣의 길이이다.

본 수치실험에서는 3.2에서 실험된 長週期波 ( $T = 200\text{sec}$ )인 경우에 한하여 線型摩擦係數  $r$ 의 값으로  $0.001/\text{sec}$ 을 취하고, 開放境界에서 COMMON, SOM, IMP SOM을 부여하였을 때 準定常狀態에 다다른 파동 1주기간의 最大  $L^2$ -norm과 RMS오차가 표 2에 수록되었다.

**Table 2.** Maximum  $L^2$ -norm and RMS error when the linear bed roughness( $r = 0.001 / \text{sec}$ ) is considered

ERROR	OPEN BOUNDARY	COMMON	SOM	IM-PSOM
	CONDITIONS			
$L^2\text{-norm} (*10^{-4})$		56	37	29
RMS (* $10^{-3}$ )		287	56	31

수치실험결과에서 알 수 있듯이 해저마찰이 고려되더라도 開放境界에서 放射效果가 가미된 SOM 및 IMP SOM이 COMMON보다 오차가 작게 나타났으며, IMP SOM은 COMMON에 비해 48.2% 개선되는 효과가 나타났다. 특히 RMS오차해석에 따르면 경계조건이 부여되는 개방경계 지점의 큰 오차는 IMP SOM이 적용되므로써 계산의 신뢰성이 약 90% 향상됨을 알 수 있다.

#### 4. 結 論

$L^2$ -norm 및 RMS誤差를 해석수단으로하여 放射效果가 포함된 6가지 海洋開放境界條件이 解析解를 구할수 있는 矩形灣에서 定量的으로 比較

되었다.  $M_2$ 潮汐, 格子間隔, 海低摩擦 등의 數值實驗이 수행되었으며 이로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

$M_2$ 潮汐 실험에서 COMMON 보다는 放射條件이 적용된 경우 정확해에 가까운 결과가 도출되었고, 최대  $L^2$ -norm과 RMS오차를 比較하면 IMP SOM의 放射開放境界條件의 경우는 COMMON에 비하여 40% 및 96%나 개선되는 효과를 보이며 SOM보다도 50%나 개선되었다.

계산의 효율을 증진시키고자 格子의 크기를 낮로 줄인 格子網을 이용한 해석에서 기대되는 효과는  $L^2$ -norm이  $T = 200\text{sec}$ 인 長週期波에서는 35%로 뚜렷한 기대치를 나타내나  $M_2$ 조석일 때는 개방경계조건에 따라 7~19% 정도의 개선효과를 보인다. 이는 방사영향을 고려하므로써 얻을 수 있는 효과 30%에 미치지 못하고, 또 IMP SOM의 42%에 비하면 저조한 결과이다. 따라서  $M_2$ 조석 해석시는 半格子 등을 취하는 것보다 계산노력도 크게 소요되지 않는 개선방사조건을 적용하는 것이 제안된다.

그리고 제한적으로 海低摩擦을 고려하여 수치 실험한 결과 역시 IMP SOM이 기존의 방사조건보다도 계산의 신뢰성을 향상시킬 수 있는 것으로 판단된다.

#### 參考文獻

- 尹泰勳·徐承源, "灣에 적용되는 淺水方程式의 開放境界條件", 韓國水文學會誌, 20卷3號, 219-228, 1987
- 尹泰勳·徐承源, "有限要素法을 利用한 開水路 斷面急廣大部の 循環現象 解析", 韓國水文學會誌 21卷1號, 67-75, 1988
- 徐承源, 2次元 淺水方程式의 開放境界條件, 漢陽大學校 大學院 博士學位論文, 1988
- 徐承源 等, "放射效果를 고려한 開放境界條件", 大韓土木學會論文集, 揭載豫定, 1989
- Blumberg, A. F. and Kantha, L. H., "Open Boundary Condition for Circulation Model," J. of Hydr. Div., ASCE V. III, No. HY2, 237-255, 1985

6. Camerlengo, A. L. and O'Brien, J. J., "Open Boundary Conditions in Rotating Fluids," *J. of Comp. Physics*, V 35, 12-35, 1980
7. Chapman, D. C., "Numerical Treatment of Cross-Shelf Open Boundaries in a Barotropic Coastal Ocean Model," *J. of Phy. Oceanography*, V 15, 1060-1075, 1985
8. Chen, J. H., "Numerical Boundary Conditions and Computational Modes," *J. of Comp. Physics*, V 13, 522-535, 1973
9. Chung, T. J., *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1978
10. Garcia, R. and Kahawita, R. A., "Numerical Solution of the St. Venant Equations with the McCormack Finite Difference Scheme," *Int. J. Num. Methods in Fluids*, V 6, 259-274, 1986
11. Garcia, C., "Tides in Gulf," *Deep Sea Reserach*, V 22, 23-35, 1975
12. Garcia, C. and Greenberg, D., "Predicting Changes in Tidal Regime : The Open Boundary Problem," *J. of Phy. Oceanograph*, V 7, 171-181, 1975
13. Hebenstreit, G. T. et al., "Application of Improved Numerical Techniques to the Tsunami Response of Island Systems," *J. of Phy. Oceanography*, V 10, 1134-1140, 1980
14. Hendstrom, G. W., "Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems," *J. of Comp. Physics*, V 30, 222-237, 1979
15. Ippen, A. A., ed., *Estuary and Coastline Hydrodynamics*, McGraw-Hill, 1966
16. Lindman, E. L., "Free-Space Boundary Condition for the Time Dependent Wave Equation," *J. of Comp. Physics*, V 18, 660-678, 1975
17. Orlanski, I., "A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows," *J. of Comp. Physics*, V 21, 251-269, 1976
18. Prandle, D., "Modeling of Tidal Barrier Scheme : An Analysis of the Open-Boundary Problem by Reference to AC Circuit Theory," *Estuarine and Coastal Marine Science*, V 11, 53-71, 1980
19. Smith, W. D., "A Nonreflecting Plane Boundary for Wave Propagation Problems," *J. of Comp. Physics*, V 15, 492-503, 1974
20. Sommerfeld, A., *Optics*, Academic Press, 1954