

〈論 文〉

대수층의 不定流에 관한 연구

Unsteady Groundwater Flow in Aquifer

李 正 圭*

Lee, Jong-Kyu

Abstract

The partial differential equation of the unsteady groundwater flow was reduced to an ordinary differential equation by the Boltzmann transformation. Its numerical solutions were obtained by the finite difference method and the new method to get the initial missing slope using the Richardson method and the finite difference equation was proposed. The solutions computed by the newly proposed method were compared with other investigator's computations and they showed a satisfactory agreement and that the proposed method is easy and simple to get solutions.

要 旨

不定流지하수 흐름에 대한 편미분방정식이 Boltzmann 변환을 통하여 상미분방정식으로 變換되었으며 유한차분법을 利用하여 數直解를 구하였다.

Richardson법과 차분식을 이용하여 未知初期水面구배(missing initial slope)를 구하는 새로운 方法이 提案되었다.

본 연구에서 제안된 方法으로 初期수면구배를 구하였으며 이 값들을 다른 研究결과와 비교한 바 아주 좋은 일치를 보여 주었으며 또한 이 方法이 解를 구하는 데 간편하고 쉬운 方法임을 보여 주었다.

1. 서 론

지하수의 흐름이동에 관한 問題는 媒體의 性質 뿐 아니라 흐름 自體가 대단히 복잡하여 관련 파라메타가 너무 많기 때문에 一般的인 경우에 적용할 수 있는 一般解를 구하는 것은 어렵다.

이동하는 自由水面을 가진 非被壓帶水戸(unconfined aquifer)의 不定流지하수흐름에 관한 문

제는 大部分이 2点경계치 문제인 미분방정식을 푸는 것이고 또한 非線型이기 때문에 解를 얻는데 어려움이 따른다. 解析的으로 方程式의 解의 존재나 유일성(uniqueness)에 대한 일반적 증명은 없다. (1)

方程式의 解法으로 方程式을 선형화하거나 非線型편미분방정식을 Boltzmann변환을 利用하여 非線型상미분방정식으로 變換한 후에 解를 구하

*한양대학교 토목공학과 교수

였다. (3)

지하수의 不定流에 대한 解를 구하기 위하여 Bruch(3)는 유한요소법을 利用하였으며 李(8)는 유한차분법으로 解를 구하였다. Yeh(4)는 Lunge-Kutta法으로 초기수면구배와 地下水位를 구하였으며 後에 Chang과 Yeh(1)는 Invariant Bedding 方法을 이용하여 미지의 초기수면구배 (missing initial slope)를 구하였다. 그러나 위의 두 方法은 많은 시간과 努力이 들기 때문에 간편해 보이지 않는다.

Koussis(2)는 時間차분법을 이용하여 해석적 方法으로 초기 수면구배를 구하고 다음에 수치적 분에 의하여 지하수위를 구하였으나 계산결과 저수지 水面이 급강하할 때는 만족할 만한 解를 얻을 수 있었으나 수면이 급상승할 때는 좋은 결과를 보여주지 못했다.

本 研究의 目的은 Boltzmann 변환을 통하여 얻은 상미분방정식의 解를 구하기 위한 方法으로 有限差分法으로 근사해를 구하는 數直模型을 提示하고, 또한 본 모형에서 얻어진 解를 利用하여 初期水面구배를 구하는 데 처음으로 Richardson 法과 差分式을 도입하여 未知의 초기수면경사를 쉽고 간편하게 구하는 法을 提示하고자 한다.

2. 지배방정식

흐름의 狀態는 그림 1에 圖示되어 있으며 다음과 같은 가정아래 地下水흐름을 解析한다. (4, 8)

- 1) 대수층은 균질-등방성이고 반무한대이다.
- 2) 대수층은 水平한 不透水戶위에 놓여있다.
- 3) Dupuit-Forchheimer의 가정이 적용된다.
- 4) 모든 地下水흐름은 水面下에서 발생한다.
- 5) 대수층의 貯留(aquifer storage)로부터 나온 물은 水頭의 감소에 따라 순간적으로 流出된다.

地下水의 흐름에 대한 支配方程式은 Darcy의 法則과 연속방정식으로 부터 일차원흐름의 경우에 다음과 같은 非線型편미분방정식을 얻는다. (1, 2, 4)

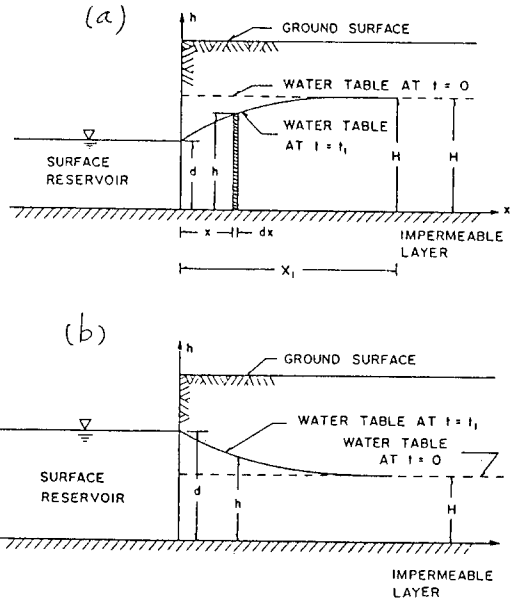


그림 1. Sketch of Ground-Water Flow in Unconfined Aquifer; (a) Drawdown, (b) Buildup

$$K \frac{\partial}{\partial x} (h \frac{\partial h}{\partial x}) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{초기조건} &: t=0; h=H; x>0 \\ \text{경계조건} &: x=0; h=d; t>0 \\ &: x \rightarrow \infty; h=H; t>0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

여기서 h 는 x 와 t 의 함수인 불투수층으로부터 얻은 수면높이, x 는 수평좌표, t 는 시간, H 는 초기수면높이, K 는 대수층의 투수계수, S 는 대수층의 비산출량(specific yield), d 는 저수지의 수면높이이다.

식(1)과 (2)는 다음과 같이 無次元변수를 도입함으로써 無次元式으로 변화된다.

$$\theta = \frac{h}{H}; y = \frac{x}{H}; \tau = \frac{Kt}{SH} \quad (3)$$

식(3)을 식(1)과 (2)에 대입한다.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y} (\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{초기조건} &: \tau=0; \theta=1; y>0 \\ \text{경계조건} &: y=0; \theta = \frac{d}{H}; \tau>0 \\ &: y \rightarrow \infty; \theta=1; \tau>0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

식(4)와 (5)는 Boltzmann 변환식 $\phi = \frac{y}{\sqrt{\tau}}$ 에 의하여 다음과 같은 2계 비선형 상미분방정식을 얻는다(4, 8)

$$-\frac{\phi}{2} \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left(\theta \frac{d\theta}{d\phi} \right) \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{조건식 : } \phi=0; \theta = \frac{d}{H} \\ \phi \rightarrow \infty; \theta = 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. 數直解

식(6)의 一般解를 얻기는 어려우므로 數直解法에 의한 近似解를 얻기 위하여 Explicit scheme을 사용한 유한차분법을 이용하였다. (8)

시간 t_1 이 주어지면 수면의 운동은 有限하다고 할 수 있다. 即, 水面은 일정한 거리 x_1 만큼 변동하였다고 볼 수 있으며, x_1 보다 더 멀리 떨어져 있는 거리에 있는 수면은 저수지수위의 영향을 받지 않는다. 그러므로 t_1 과 x_1 의 有限한 값에 대하여 ϕ 도 다음과 같이 유한하게 정의된다. (4)

$$\phi = \frac{x_1}{\sqrt{\frac{HK}{S} t_1}} = \phi_c \text{ (constant)} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{조건식 : } \phi=0; \theta = \frac{d}{H} \\ \phi \geq \phi_c; \theta = 1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

식(6)을 유한차분법으로 근사해를 구하기 위하여 $\theta^2 = v$ 를 식(6)에 代入하여 정리한다. (6)

$$\frac{d^2 v}{d\phi^2} + \frac{\phi}{2\sqrt{v}} \frac{dv}{d\phi} = 0 \quad (10)$$

식(10)은 비선형식이기 때문에 일반해를 구하는 어렵다.

식(10)의 解는 유한차분법에 의하여 근사해를 구하였으며 차분화과정 및 解를 구하는 방법은 李(8)의 方法을 따랐다. 초기수면구배를 미리 알 수 있으면 解를 쉽게 구할 수 있으나 이것이 쉽게 얻어지지 않는다는. Yeh等(1, 4)이 초기수면구배를 구하는 方法을 提案하고 있으나 그 과정이 복잡하고 많은 努力이 필요하다.

本 연구에서는 초기수면구배를 비교적 간편하게 구하기 위하여 지하수흐름해석에 처음으로 Richardson法(7)과 차분식을 도입하여 식을 다음과 같이 유도한다.

어떤 함수 $\theta(\phi)$ 의 점 ϕ_i 에서 일차도함수 y_i 를 구하는 근사식은 다음과 같다. (8)

$$y_i = \left. \frac{d\theta}{d\phi} \right|_{\phi = \phi_i} = \frac{\theta_{i-2} - 8\theta_{i-1} + 8\theta_{i+1} - \theta_{i+2}}{12\Delta\phi} \quad (11)$$

여기서 $\Delta\phi$ 는 ϕ 의 간격이고

$$\theta_{i-2} = \theta(\phi_i - 2\Delta\phi)$$

$$\theta_{i-1} = \theta(\phi_i - \Delta\phi)$$

$$\theta_{i+1} = \theta(\phi_i + \Delta\phi)$$

$$\theta_{i+2} = \theta(\phi_i + 2\Delta\phi) \text{를 나타낸다.}$$

식(11)에 의하면 연속해서 $\Delta\phi$ 만큼 떨어져 있는 θ 의 값을 알면 ϕ 의 중앙점에서 일차도함수를 구할 수 있다.

다음에 초기수면구배를 구하는 方法을 유도하면 다음과 같다.

$m = \frac{d\theta}{d\phi}$ 라고 놓으면 식(6)은 다음과 같이 된다.

$$-\frac{\phi}{2} m = \frac{d}{d\phi} (\theta m) \quad (12)$$

식(12)에 대하여 ϕ -방향에 대하여 격자점 i 와 $(i-1)$ 에서 전방차분식을 취하고 좌변의 ϕ 와 m 에 평균값을 취하면 다음과 같다.

$$-\frac{(\phi_i + \phi_{i+1})}{8} (m_i + m_{i+1}) = \frac{(\theta m)_{i+1} - (\theta m)_i}{\Delta\phi} \quad (13)$$

$$-\frac{(\phi_{i+1} + \phi_i)}{8} (m_{i-1} + m_i) = \frac{(\theta m)_i - (\theta m)_{i-1}}{\Delta\phi} \quad (14)$$

식(13)과 (14)를 정리하면 다음식을 얻는다.

$$m_{i-1} =$$

$$\left\{ \left(\frac{8}{\Delta\phi} \theta_i + \phi_{i-1} + \phi_i \right) \left(\frac{8}{\Delta\phi} \theta_{i+1} + \phi_i + \phi_{i+1} \right) \right\}$$

$$\left\{ \left(\frac{8}{\Delta\phi} \theta_{i-1} - \phi_{i-1} - \phi_i \right) \left(\frac{8}{\Delta\phi} \theta_i - \phi_i - \phi_{i+1} \right) \right\} \cdot m_{i+1} \quad (15)$$

식(15)를 이용하여 $\phi=0$ 에서 초기수면구배를 구하는 과정을 설명하면 먼저 식(10)의 근사해로부터 $\phi=0$ 에서 $\Delta\phi$ 만큼씩 떨어진 5개의 연속적인 θ 값을 취한다. 다음에 식(11)로부터 $\phi=2\Delta\phi$ 인 점의 일차도함수 m_3 을 구한다. 식(15)의 오른쪽변의 값이 모두 알려져 있으므로 $\phi=0$ 에서 일차도함수, 即 초기수면구배 m_0 를 구할 수 있다.

4. 檢定 및 考察

本 연구에서 사용한 수치모형의 解는 저수지水面의 급강하와 급상승의 두가지 경우에 대하여 $\phi_1=6.5$, $\Delta\phi=0.05, 0.1, 0.25$, θ 의 계산오차한계 $\epsilon=10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ 로 나누어 解를 구하였다. 解의 계산方法은 Gauss-Seidel법에 의한 반복계산을 시행하였다.

1) 수면급강하(drawdown)의 경우

저수지의 水面이 급강하할 때 지하수의 수위변동을 檢定하기 위하여 $d/H=0.2$ 의 경우에 식(10)을 이용하여 계산을 실시하였다. 계산결과는 그림 2에 實線으로 나타내었다. 다른 연구의 결과도 함께 圖示하였다. 본 연구는 그림 2에서 알 수 있는 바와같이 Yeh(4)의 解와 정확하게 일치하였으며, Todd(5)의 실험과는 근사하게 일치하는 것을 알 수 있었으나 線形化法(linearized solution) (4)의 解는 상당히 오차가 큰 것으로 나타났기 때문에 이 方法은 정밀도가 떨어진다고 할 수 있다.

2) 水面급상승(buildup)의 경우

저수지 수면이 급상승할 경우는 $d/H=5$ 에 대하여 식(10)을 이용하여 계산을 실시하여 비교검토하였다. 계산결과는 그림3에 Todd(5)의 실험

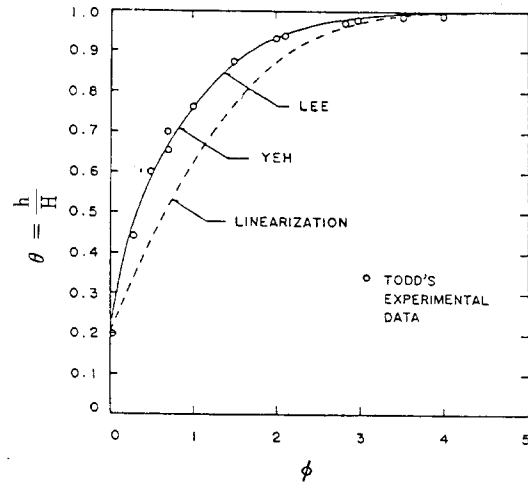


그림 2. Drawdown Water Surface Profile; $\frac{d}{H} = 0.2$

결과와 같이 圖示하였다. 그림 3에서 알 수 있는 바와 같이 Todd의 실험과 아주 一致하는 것을 보여 주었기 때문에 本 연구의 方法이 檢定되었으며 충분한 정밀도를 가졌다고 할 수 있다. 한편 Koussis(2)의 계산치는 Todd의 실험과 차이가 너무 크기 때문에 비교圖示하지 않았으며 Yeh(4)는 수면급상승의 경우는 취급하지 않았다.

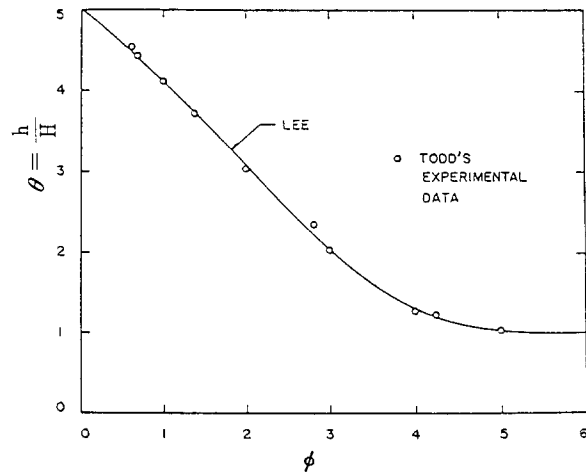


그림 3. Buildup Water Surface Profile; $\frac{d}{H} = 5$

3) 未知初期구배(missing initial slope)

미지초기구배는 식(15)로 부터 계산하여 비교 고찰하였다. $\Delta\phi$ 의 크기가 초기 수면구배 m_0 에 미치는 영향을 보기 위하여 $\Delta\phi=0.05\sim 0.1083$ 에 대한 計算을 행하였으며 Table.1은 $\theta_{\phi=0}=0.2$ 인 경우를 대표로 작성하였다. $\phi_0=6.5$ 이다.

Table.1을 보면 $\Delta\phi=0.15$ 부근에서 m_0 는 최소값을 나타내고 $\Delta\phi$ 가 0.15보다 작아지면 m_0 가 조금 커지고 $\Delta\phi$ 가 0.15보다 커지면 m_0 가 처음에는 약간 증가하다가 $\Delta\phi$ 의 값이 커질수록 m_0 의 값이 더욱 커지는 것을 알 수 있다. m_0 의 근사값으로 $\Delta\phi$ 가 작아질수록 어떤 값에 접근하는 것을 기대하였으나 0.15부근에서 최소값을 가지려는 정확한 理由는 아직 밝히지 못했지만 저수지 수면과 지하수와 접촉면부근에서 地下水位에 변곡점이 발생하기 때문이 아닌가 추측된다.

既存의 연구와 비교해 보면 $\Delta\phi=0.15$ 부근에서 m_0 는 Yeh(4)나 Chang등(1)의 것과 1%미만의 誤差가 발생하는 것으로 볼때 본 연구는 만족한

것으로 보여진다.

오차한계 ϵ 이 초기구배에 미치는 영향을 알아 본다.

Table 2는 ϵ 의 여러 값에 따라 m_0 의 변화를 대표로 작성하였다.

Table 2에서 보면 ϵ 의 값이 작을수록 m_0 의 값이 증가하는 경향이 있으나 ϵ 가 10^{-6} 이하가 되면 解에는 큰 영향은 없는 것으로 생각된다. $\Delta\phi$ 의 변화에 따라서는 0.1의 경우보다 0.25의 경우에 Yeh(4)와 Chang등(1)의 解에 더 접근하고 있으나 $\Delta\phi$ 가 작을 수록 正確解에 접근해야 한다는 면에서 볼때 그 정확한 理由는 分明하지 못하나, 기존의 解도 근사해인 만큼 어느 것이 더욱 정확해에 가깝다고 말하기는 어려울 것이다.

以上の 고찰에서 近似解로써 $\Delta\phi=0.1, \epsilon=10^{-6}$ 을 택하는 것이 타당할 것으로 생각된다. 경계조건 θ 의 변화에 따른 m_0 의 값을 수면급강하와 수면급상승의 경우에 계산하여 대표로 작성한 것이 Table 3과 4이다.

수면이 급강하할 때 Table 3을 보면 본 연구와

Table 1. Missing initial slopes for various $\Delta\phi$ for $\theta_{\phi=0}=0.2$ and $\epsilon=10^{-6}$

$\Delta\phi$	$\theta_{\phi=0}$	m_0	yeh(4)	Chang등(1)
0.05	0.2	1.5625	1.569	1.567
0.1	0.2	1.5579		
0.155	0.2	1.5556		
0.21	0.2	1.5581		
0.25	0.2	1.5633		
0.5	0.2	1.6703		
0.722	0.2	1.9389		

Table 2. Missing initial slopes for various error limit for $\theta_{\phi=0}=0.2, \Delta\phi=0.1$ and 0.25

$\Delta\phi$	$\theta_{\phi=0}$	ϵ	m_0	yeh(4)	Chang등(1)
0.1	0.2	10^{-7}	1.5582	1.569	1.567
0.1	0.2	10^{-6}	1.5579		
0.1	0.2	10^{-5}	1.5555		
0.1	0.2	10^{-4}	1.5312		
0.25	0.2	10^{-6}	1.5633		
0.25	0.2	10^{-5}	1.5628		
0.25	0.2	10^{-4}	1.5580		
0.25	0.2	10^{-3}	1.5093		

Table 3 Initial slopes for drawdown

$\theta \neq 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
yeh(4)	3.318	1.569	0.974	0.663	0.465	0.324	0.217	0.132	0.061
Chang 등(1)	3.271	1.567	0.974	0.663	0.465	0.324	0.217	0.132	0.061
본연구	3.1941	1.5579	0.9742	0.6634	0.4652	0.3245	0.2174	0.1322	0.0608

Table 4. Initial slopes for buildup.

$\theta \neq 0$	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
R-K법*	-0.2158	-0.3603	-0.4720	-0.5651	-0.6459	-0.7181	-0.7839	-0.8446
본연구	-0.2159	-0.3605	-0.4722	-0.5653	-0.6461	-0.7184	-0.7842	-0.8449

* R-K法은 필자가 Runge-Kutta법과 Lagrange interpolation에 의하여 초기 수면구배를 계산하였다.

다른 解를 비교해 볼 때 경계조건 θ 가 0.1과 0.2의 경우에 오차가 약간 존재하고 그 외는 완전히 一致하고 있음을 볼 수 있다.

Table 4는 경계조건인 水面이 급상승한 경우의 해를 비교한 것이다. 본 연구의 解와 Runge-Kutta법을 따라서 필자가 계산한 解와 비교하여 보면 거의 완전히 一致하는 것을 알 수 있다. 위에서 볼 때 경계조건인 수면이 급강하하거나 급상승하는 경우에 다 같이 본 연구의 解法이 기존의 연구와 비교해 볼 때 解의 정밀도에서 만족할 만 하고 解를 구하는 과정이 쉽고 간편한 方法이라고 할 수 있다.

시간 t에서 대수층의 단위폭당 流量과 t시간까지 대수층을 통한 총流量 R은 다음식으로 계산할 수 있다. (4)

$$Q = Kh \frac{\partial h}{\partial x} = Kd \sqrt{\frac{HS}{Kt}} m_0 \quad (16)$$

$$R = \int_0^t Kd \sqrt{\frac{HS}{Kt}} m_0 dt = 2Kd \sqrt{\frac{HSt}{K}} m_0 \quad (17)$$

5. 결 론

일차원 不定流지하수 흐름에 대한 편미분방정식을 Boltzmann변환을 통하여 상미분방정식으로

변환시킨후 有根差分法으로 地下水位의 근사해를 구하였다.

특히 지하수흐름의 해석에 Richardson법을 처음으로 도입하여 초기수면구배를 구하는 方法을 提案하였으며 경계조건인 저수지 수면이 급강하하는 경우와 급상승하는 경우에 다 같이 만족한 解를 구할 수 있음을 알 수 있었다. 또한 본 연구의 解法에서 解를 구하는 과정이 기존의 방법보다 쉽고 간편하다고 생각된다.

감사의 말

본 논문은 1988년도 문교부 학술연구조성비에 의한 연구결과로서 연구비 지원에 감사를 드립니다.

References

- 1) Chang, S. and Yeh, W., "Invariant Imbedding and Unsteady Ground-Water Flow," Proc. of ASCE, Vol.100, No. HY10, Oct. 1974
- 2) Koussis, A.D., "Transient Reservoir-Aquifer Interaction," Proc. of ASCE, Vol. 105, No. HY6, June 1979
- 3) Bruch, J.C.Jr., "Nonlinear Equation of Unsteady Ground-Water Flow," Proc. of ASCE, Vol. 99, No. HY3, Mar. 1973
- 4) Yeh, W., "Nonsteady Flow to Surface Reservoir," Proc. of ASCE, Vol.96, No.HY3, Mar. 1970

- 5) Todd, D.K., "Unsteady Flow in Porous Media by Means of a Hele-Shaw Viscous Fluid Model," Trans., AGU, Vol.35, No.6, Dec. 1954
- 6) Polubarinova-Kochina, P.Y., Theory of Ground-Water Movement, translated from the Russian by J.M. Roger. De Wiest, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1962
- 7) Mathews, J.H., Numerical Methods for Computer Science, Engineering, and Mathematics, Prentice-Hall Int., Inc. 1987. pp.264~279
- 8) 李正圭, "非定常地下水흐름의 수치모형," 산업과학논문집 한양대학교 산업과학연구소, Vol.26, 1988