

## 원심펌프축계의 최적설계\*

양보석\*\* · 오세규\*\* · T. Iwatsubo\*\*\*

### The Optimum Design for Rotating Shaft of Centrifugal Pump

B. S. Yang, S. K. Oh, and T. Iwatsubo

#### Abstract

This paper presents a method of the optimum design for rotating shaft of centrifugal pump. That is, the object is to optimize the system in stability at the operating speed, unbalance response in the vicinity of the rotor critical speed, leakage flow of the seals. The objective function is composed of these three elements and is minimized by changing seal clearance, diameters, and lengths. A typical double suction centrifugal pump is analyzed and its objective function is presented. Then the optimum dimensions of seals are obtained, and vibration characteristics at both initial and optimum conditions are investigated.

#### 1. 머리말

최근 회전축계의 진동에 관한 기술의 발전은 눈부시어, 많은 현상이 해명되어 왔다. 이는 컴퓨터의 응용과 최신의 전자계측기술의 발전에 기인한다. 상당히 복잡한 축계에서도 그 진동특성을 정도 좋게 해석하고 이를 어떻게 설계에 적용하여 진동특성이 좋은 회전기계를 실현할까가 중요한 과제로 되고 있다. 규격면에서도 진동 허용치는 **blancing**만이 아니고 불평형에 대한 진동특성, 불평형 감도나 고유치 특성에 대한 감도를 정하려는 경향이다.<sup>1)</sup>

일반적으로 동적인 외력을 받는 회전기계를 설

계할 경우, 먼저 계의 고유진동수, 감쇠율, 모드형상등의 modal parameter를 해석적으로 검토하여 공진의 가능성이나 안정성을 검토해야 한다. 이 검토에 따라 시험 설계된 치수, 재원이 동적으로 불충분한 경우에는 시행착오를 통하여 설계 변경과 계산을 반복하게 된다. 회전축계의 설계에는 운전속도에서 안정성이 좋을 것과 또한 운전범위가 위험속도 이상인 경우에는 위험속도 통과시 공진배율을 최소로 할 것등의 설계항목을 동시에 만족해야 한다. 이 경우 베어링의 형식 및 형상을 적절히 선정하면 어느 정도 진동 허용치 이하로 억제할 수 있다.<sup>2)</sup> 최근 고압, 고속화에 따라 유체력에 의한 진동(hydraulic whirl)이 다발하여 전세계적으로

\* 이 논문은 1987年度 文敎部 學術研究助成費에 의한 自由公募課題로 선정되어 研究되었음

\*\* 正會員, 부산수산대학 박용기계공학과

\*\*\* 日本神戸大學 工學部 機械工學科

이 유체력의 특성을 규명하는 노력이 이루어지고 있다. 이 경우 진동을 일으키는 불안정한 힘은 계를 안정화 시키는 베어링의 감쇠력 보다 크게 되어 계를 불안정하게 하는 경우가 많으므로 베어링의 형상변경만으로는 안정한 회전축계를 설계하기 어렵다.<sup>3)</sup> 이러한 관점에서 본 논문에서는 종래 축계의 밀봉(sealing)을 위해 사용되는 비접촉 시일부의 유체력 특성을 고려하여 시일을 단지 누설 방지용 뿐만 아니라 적극적으로 진동을 억제하는 일종의 베어링 역할을 담당할 수 있도록 하기 위해 새로운 관점에서 펌프축계의 최적설계를 하고자 한다. 즉, 사용 운전속도에서의 안정성, 위험속도 이상에서 운전되는 회전체의 경우의 위험속도 통과 문제, 강제진동응답, 시일의 누설량을 고려하여 최적인 시일치수를 결정하는 것을 목적으로 하는 최적설계를 수행한다.

## 2. 회전축계의 해석

### 2.1 운동방정식

해석을 단순화하기 위해 Fig.1과 같이 단단 양흡입 원심펌프의 단순 계산모델을 사용한다.<sup>3)</sup> 이 축계의 모델로서 중앙에 1개의 원판을 갖는 질량이 무시된 탄성축이 양단에서 동일한 특성을 갖는 질량이 무시된 탄성축이 양

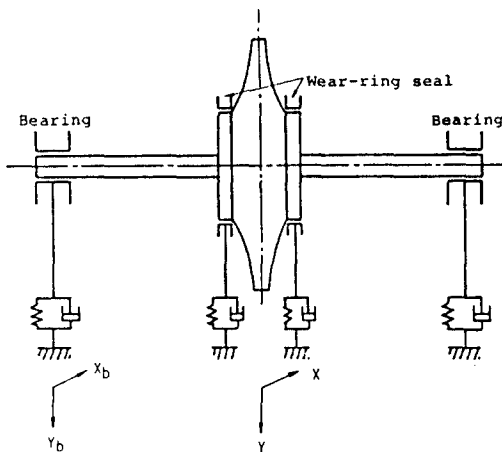


Fig. 1 Rotor model

단에서 동일한 특성을 갖는 베어링으로 지지된 3베어링(중앙의 시일을 베어링으로 생각한다) 1원판 단순축계를 고려한다. 또한 단순화를 위해 원판 중앙부에 한쌍의 wearing seal의 유체력이 집중해서 작용하는 것으로 한다. 시일부의 원판 축 중심점의 좌표를 O-x y, 베어링내의 저어널 중심의 정적 평형점 좌표를 O-x<sub>b</sub> y<sub>b</sub>로 하고, 정적 운전상태에서 각각의 좌표점에 회전체가 위치하고 있다고 한다. 운동방정식은

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_s(x - x_b) &= -2F_x \\ m\ddot{y} + k_s(y - y_b) &= -2F_y \\ k_s(x_b - x) &= -2P_s \\ k_s(y_b - y) &= -2P_y \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 F<sub>x</sub>, F<sub>y</sub>는 시일의 유체력, P<sub>x</sub>, P<sub>y</sub>는 x<sub>b</sub>, y<sub>b</sub> 방향의 선형근사된 베어링 유막력으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F_x &= k_{xx}x + k_{xy}y + C_{xy}y \\ F_y &= k_{yx}x + k_{yy}y + C_{yx}x + C_{yy}y \\ P_x &= k_{xxb}x_b + k_{\zeta} y_b y_b + C_{xxb}x_b + C_{xyb}y_b \\ P_y &= k_{yxb}x_b + k_{yyb}y_b + C_{yxb}x_b + C_{yyb}y_b \end{aligned}$$

식(1)을 행렬로 표시하면 다음 자유진동의 운동방정식이 얻어진다.

$$[M]\ddot{X}_0 + [C]X_0 + [K]X_0 = 0 \quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [C] &= \begin{bmatrix} 2C_{xx} & 2C_{xy} & 0 & 0 \\ 2C_{yx} & 2C_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 2C_{xxb} & 2C_{xyb} & 0 \\ 0 & 2C_{yxb} & 2C_{yyb} & 0 \end{bmatrix} \\ [K] &= \begin{bmatrix} k_s + 2k_{xx} & 2k_{xy} & -k_s & 0 \\ 2k_{yx} & k_s + 2k_{yy} & 0 & -k_s \\ -k_s & 0 & k_s + 2k_{xxb} & 2k_{xyb} \\ 0 & -k_s & 2k_{yxb} & k_s + 2k_{yyb} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$X_0 = \{x, y, x_b, y_b\}^T$$

이를 다음과 같이 변환한다.

$$A\dot{X} + BX = 0 \quad (3)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ M & C \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

$$X = \{\dot{X}_0, X_0\}^T$$

### 2.2 고유치 해석

식(3)의 해를

$$X = X_0 e^{\lambda t} \quad (4)$$

로 가정하면, 특성방정식은

$$|\lambda I - C| = 0, \quad C = A^{-1}B$$

이 되고, 이식은  $\lambda$  에 관한 8차 방정식으로 되므로 다음과 같이 8개의 고유치가 얻어진다.

$$\lambda_j = r_j \pm i\omega_j \quad (5)$$

### 2.3 강제진동응답

불평형 진동응답은 주기적인 불평형력에 의해 정상적으로 발생하므로 강제력으로

$$F = F_c \cos \omega t + F_s \sin \omega t \quad (7)$$

로 고려하면 운동방정식은

$$AX + BX = F \quad (8)$$

가 되고 비동차해는

$$X = X_c \cos \omega t + X_s \sin \omega t \quad (9)$$

로 된다. 식(7), (9)를 (8)에 대입하여  $\cos \omega t$  와  $\sin \omega t$ 로 분리하여 정리하면

$$\begin{pmatrix} B & \omega A \\ -\omega A & B \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_c \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (10)$$

로 된다. 따라서 식(9)의 계수는 다음식에 의해 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} X_c \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B & \omega A \\ -\omega A & B \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_c \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (11)$$

따라서 축중심점과 제어널 중심점의 운동 궤적을 구할 수 있다. 복소진폭  $Z$ 는

$$Z = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \cos \omega t + \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \sin \omega t \quad (12)$$

라 놓으면 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} Z(t) &= x(t) + iy(t) \\ &= x_c \cos \omega t + x_s \sin \omega t \\ &\quad + i(y_c \cos \omega t + y_s \sin \omega t) \\ &= Z_+ e^{i\omega t} + Z_- e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

회전축계의 불평형진동은 최대진폭이 문제로 되므로 장축 반경  $A$ 로 진폭을 나타낸다.<sup>4)</sup>

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(x_c + y_s)^2 + (y_c - x_s)^2}$$

$$+ \sqrt{(x_c - y_s)^2 + (y_c + x_s)^2} \quad (13)$$

## 3. 최적설계

### 3.1 목적함수

계의 최적성을 수치로서 나타내기 위해 목적함수(objective function)를 만들고 이 값의 크기에 의해 최적상태를 판단한다. 최적화는 위험속도에서 진폭을 최소로 억제하고 운전속도에서 계의 안정성을 크게 하며, 그리고 시일의 누설량이 적게 되도록 시일을 최적설계하는 것을 목적으로 한다.

#### 1) Q factor

불평형진동에 대한 응답배율  $M(\omega)$ 는

$$\begin{aligned} M(\omega) &= (\omega/\omega_n)^2 \sqrt{1 + (\omega/\omega_n)^2 + 4\xi_n^2(\omega/\omega_n)^2} \quad (14) \end{aligned}$$

여기서  $\omega_n, \xi_n$ 은 각각  $n$ 차 위험속도와 감쇠비이다.  $M$ 의 최대치를  $Q$ 라 하면, 이 적은 구간에서는 식(14)로부터  $Q_n = 1/(2\xi_n)$ 로 해도 좋을 수 있다. 이론적으로  $Q$ 값을 계산하는 경우, 복소 고유치 해석을 하여 고유치  $\lambda_j = r_j \pm i\omega_j$ 를 구하면 감쇠비  $\xi_j$ 는

$$\xi_j = -r_j/r_j^2 + w^2, \quad (15)$$

로 되고  $Q_j$ 의 계산이 가능하다. Fig. 1의 계에서 해는 4차의 진동모드 합으로 되고,  $Q$  factor도 각각의 진동모드에 대해 4개가 구해진다. 이를  $Q_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ )로 하면  $Q_j$ 가 적을수록 진폭은 적고 안정하다 할 수 있다. 또  $Q_j$ 의 변화가 목적함수에 민감히 영향을 미치도록  $Q_j$ 의 제곱의 형태로 취한다

$$Q = \left( \sum_{j=1}^4 Q_j^2 \right) / 4 \quad (16)$$

#### 2) 대수감쇠율

정격운전속도에서 계의 안정성을 평가하기 위해 계의 대수 감쇠율을 이용한다. 계의 안정성은 대수감쇠율이 양(positive)이고 클수록 안정하다고 할 수 있다. 대수감쇠율은 복소 고유치 계산으로 부터

$$\delta_j = -2\pi r_j/\omega_j \quad (17)$$

으로 표시되며, 각 진동모드에 대응하는 고유치로 부터 얻어지고 이 값은 정격운전속도에서 얻어진 고유치이다. 정격회전 속도에서 안정성을 평가하는 값을 계가 최적인 상태로 향할 때 최소로 되도록 표현하기 위해 대수감쇠율의 역수를 취한다. 즉

$$D = 4 / \left( \sum_{j=1}^4 \delta_j^2 \right) \quad (18)$$

3) 누설량

정격회전속도에서 시일의 정특성을 평가하기 위해 누설량을 이용한다. wearing seal의 형상을 틈새가 일정한 plain seal<sup>5)</sup>이라 하면, 누설량은 일반적으로 다음 식으로 표현된다.

$$L_f = mR_s d\theta \\ = \pi D_s C_s \left( \frac{2\rho \Delta\rho}{1 + \xi + 2\lambda L_s/D_s} \right)^{1/2} \quad (19)$$

여기서  $D_s$ ,  $L_s$ ,  $C_s$ 와  $\Delta P$ 는 시일부의 지름, 길이, 틈새 및 입구의 출구의 압력차이고,  $\lambda$ 는 마찰손실계수를 나타낸다. 목적함수  $H$ 는 이들 3개의 항에 각각 적당한 가중계수 (weighting coefficients) a, b를 곱한 1차 결합의 형으로 나타낸다. 즉  $H$ 는

$$H = Q + aD + bL_f \quad (20)$$

3.2 설계변수

본 연구에서 최적으로 하려는 설계변수 (design variables)는 wearing seal의 직경  $D_s$ , 폭경비  $L_s/D_s$  및 틈새비  $C_s/D_s$ 이다.

$$X = \{C_s/D_s, D_s, L_s/D_s\} \quad (21)$$

3.3 최적화

목적함수  $H$ 는 (21)식의 설계변수의 함수로 표시되며, 제약조건 (condition of constraints)으로서는

- (1) 운동방정식을 만족할 것
- (2) 설계변수가 극단적으로 계산범위에서 벗어나지 않도록 일정범위 내으로 억제할 것. 즉,
  - a) 직경 ( $D_s$ ) :  $0.30 \leq D_s \leq 0.35$  (m)
  - b) 폭경비 ( $L_s/D_s$ ) :  $0.05 \leq L_s/D_s \leq 0.15$
  - c) 틈새비 ( $C_s/D_s$ ) :  $0.0006 \leq C_s/D_s \leq 0.$

d) 최대 누설량 (Mmax) :

$$M_{max} \leq 2.0 \text{ (mm}^3/\text{s)}$$

따라서 최적설계는 상기의 제작조건하에서 목적함수  $H$ 를 최소로 하는 설계변수를 구하는 문제이다. 최적화 방법은 직접 탐색법 (direct search method)인 좌표방향 축차탐색법과 SUMT법 (sequence of unconstrained minimization technique)을 조합하여 이용한다.

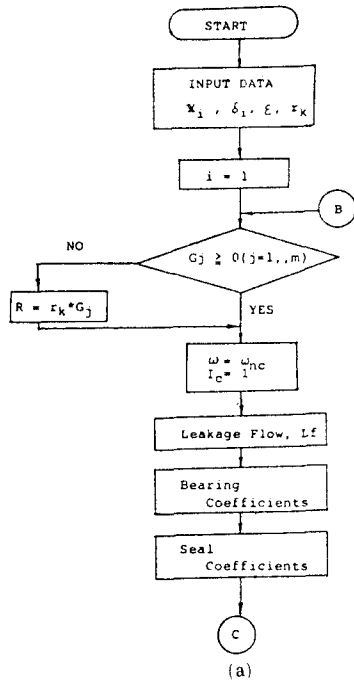
4. 수치계산예

Table 1은 본 계산에 사용된 수치를 나타낸다. 베어링계수는 볼베어링<sup>4)</sup>에 대한 수치를 사용하고, 시일계수는 문헌[4]에 의해 구해진 계산치를 이용한다. Fig. 2는 계산 프로그램의 흐름도 (flow chart)를 나타낸다. 먼저 최적화에 앞서 각각의 상태량의 특성을 구명하기 위해, Q factor, 안정성 및 누설량의 설계변수에 대한 변화를 Fig. 3에서 Fig. 7까지에 나타낸다.

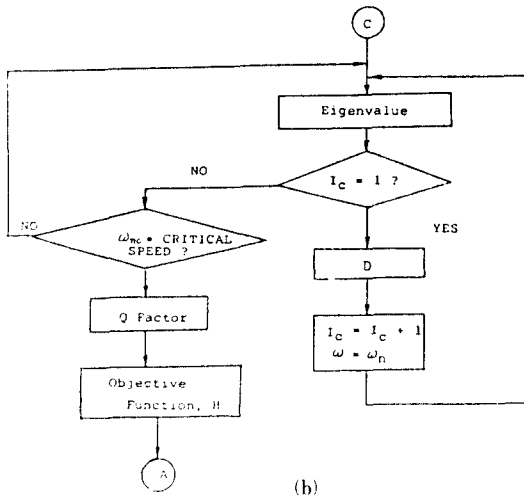
Fig. 3은 시일 직경을 각각 0.2 및 0.4m인 경우, 시일길이의 변화에 대한 Q factor의 변화를 시일틈새를 파라미터로 나타낸다. 시일 길이의 증가에 따라 Q factor는 최소로 된후 다시 증가하는 특성을 보인다. 시일 틈새가 증가할수록 Q factor가 최소로 된후 증가하는 율이 급격히 감소하여 0.4mm이상에서는 시일 길이가 증가하여도 거의 변화를 보이지 않고 포화하고 있다.

Table 1. Principal data of the rotor system

rator mass (kg s <sup>2</sup> /m)	110.16
shaft stiffness (kg/m)	$4.2109 \times 10^6$
ball bearing stiffness(kg/m)	$K_{xx} = K_{yy} = 7.45 \times 10^6$ $K_{xy} = K_{yx} = 0$
damping(kg s/m)	$C_{xx} = C_{yy} = 7.45 \times 10^5 / \omega$ $C_{xy} = C_{yx} = 0$
rotating frequency (rpm)	1720



(a)



(b)

Fig. 2 Flow chart

Fig. 4는 시일 길이가 각각 0.1m와 0.5m인 경우, 시일 틈새가 증가할수록 안정성 D가 증가하고 이는 식(18)에 따라 대수감쇠율이 감소하여 안정성이 나빠지고 있음을 나타낸다. 이러한 경향은 시일 직경이 증가 할수록 완만하여 지고 있다. Ls=0.5m의 비교적 시일 길이가 긴 long seal의 경우에는 시일 직경이 증가할수록 시일 틈새가 적은 구간에서 안정성이 크게되고 있다.

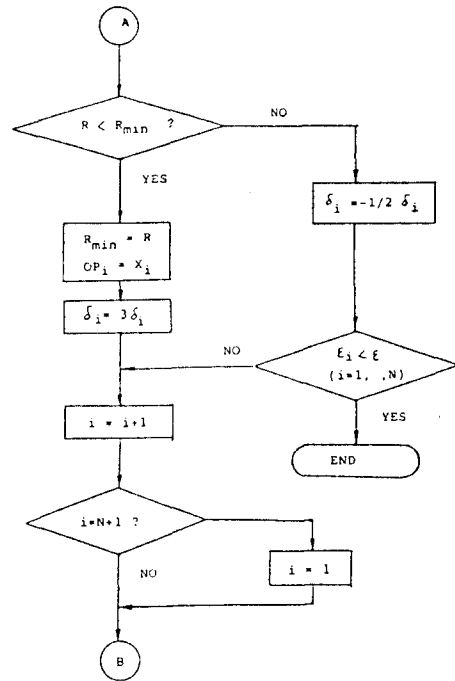


Fig. 5는 시일 누설량의 특성을 나타낸 것으로서, (a)는 시일 직경을 0.2m로 한 경우 시일 틈새를 파라미터로 시일 길이의 변화에 대한 누설량 Lf의 변화를 나타낸 것이다. 시일 길이가 증가할수록 누설량은 감소하고 있고, 시일 틈새의 변화에 따라 동일한 특성을 보인다. (b)는 시일 길이가 0.5m인 경우 시일 직경을 파라미터로 하여 시일 틈새에 대한 누설량의 변화를 나타낸다. 전체적으로 누설량이 최소가 되는 구간이 있으며, 이는 시일 직경이 클수록 시일 틈새가 큰 영역에서 발생하고 있다.

Fig. 6은 목적함수로 누설량 Lf와 안정성 D만을 고려한 경우로써 시일 직경이 0.2m로 시일 틈새를 0.7mm부터 1.4mm까지 변화시켰을 때 시일 길이 변화에 대한 목적함수의 변화를 나타낸다. 시일 틈새가 증가할수록 목적함수가 최소로 되는 시일 길이는 긴 쪽으로 이동한다.

Fig. 7은 목적함수로 Q factor, 안정성 및 누설량을 고려한 경우로 시일 길이를 0.5m로 시일 직경을 0.1m에서 0.5m까지 변화시켰을 때 시일 틈새 변화에 대한 영향을 나타낸다.

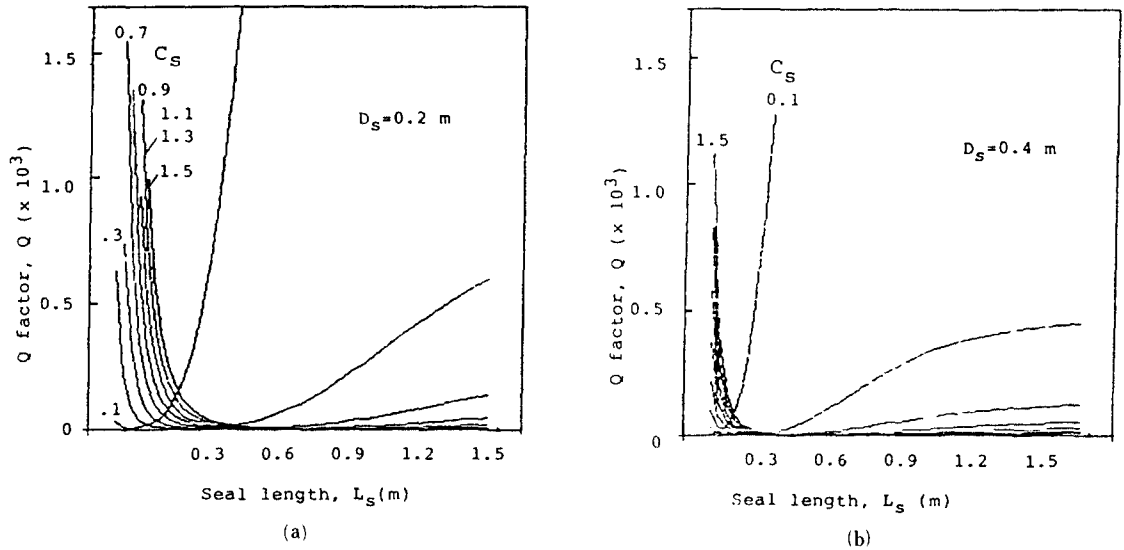


Fig. 3 Relationships between Q factor and seal length

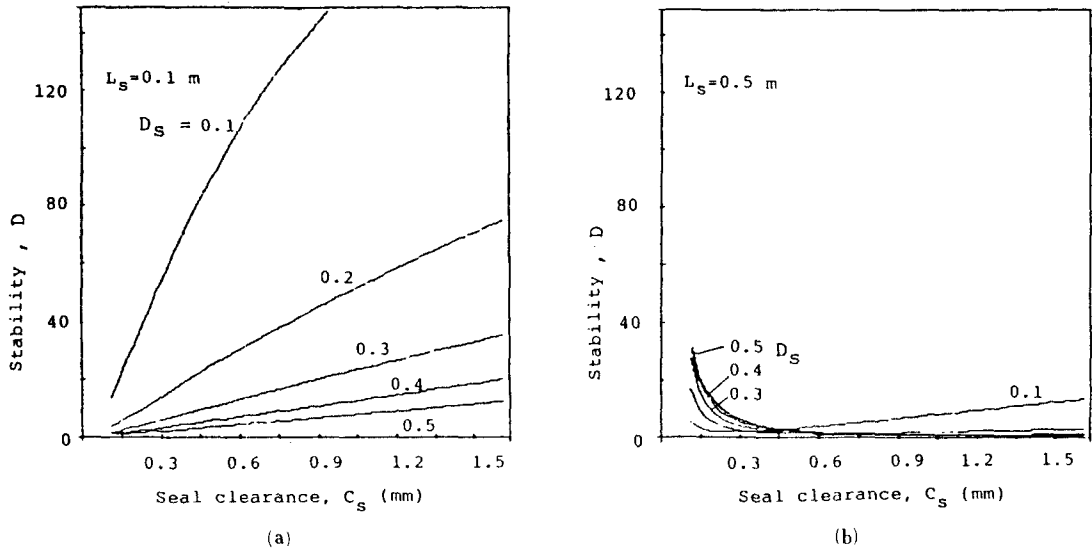


Fig. 4 Relationships between stability factor and seal clearance

시일직경이 증가할수록 목적함수가 최소로 되는 시일 틈새가 큰 쪽으로 이동하고 있다. Table 2는 최종적으로 가중계수(weighting coefficient)  $a, b$ 를 두 종류로 바꾼 경우 최적화를 수행한 후의 설계치와 임의로 준 초기치 값으로 최적화한 결과를 나타낸다. 여기서 가중계수란 상태량인 Q factor, 안정성 및 누설량의 상대적인 척도로서  $a$ 와  $b$ 가 각각 1인 경

우는 세 상태량이 동일한 중요도를 갖는 것을 의미하며,  $b=0$ 인 경우는 시일 누설량을 무시한 것에 상당한다. 계산 결과로부터 최적인 경우가 평가함수가 크게 감소하고 있다. 각각의 요소도 크게 감소하여 최적화를 수행함으로써 공진배율, 정격속도에서 안정성과 누설량이 크게 개선되어 충분히 목적을 달성할 수 있음을 알 수 있다.

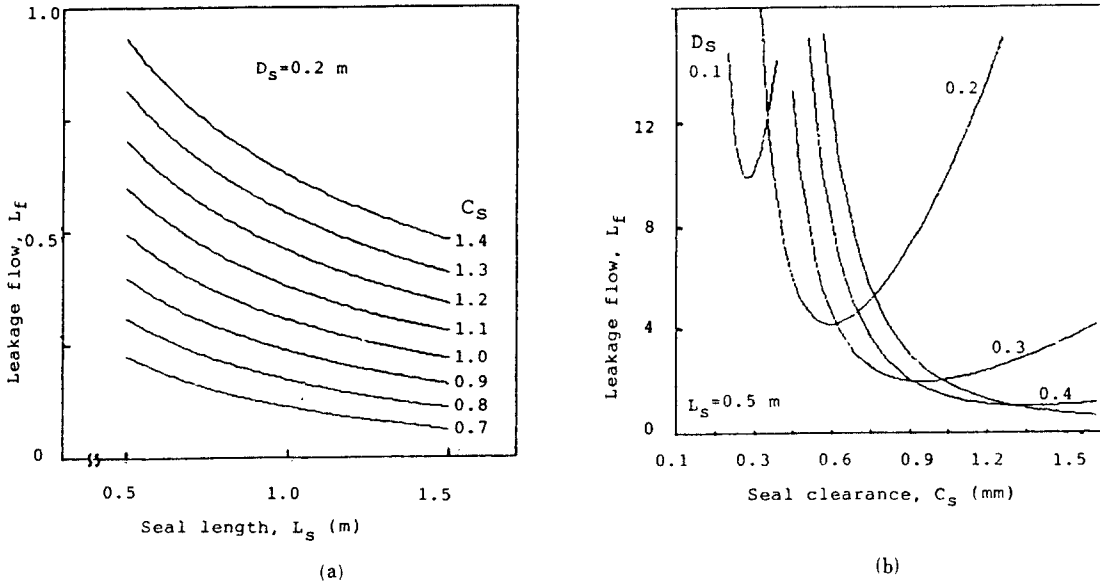


Fig. 5 Relationships between leakage flow and seal geometry

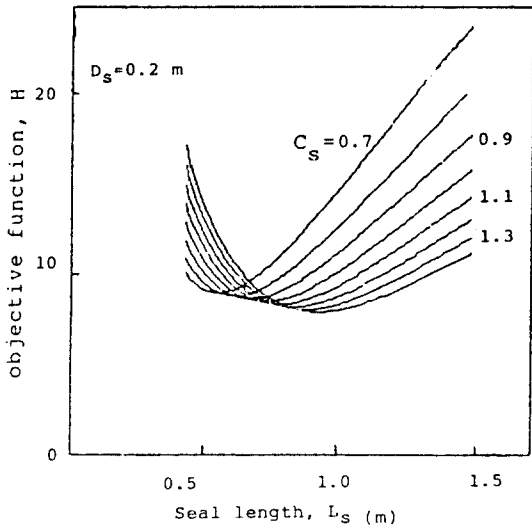


Fig. 6 Relationships between objective function and seal length

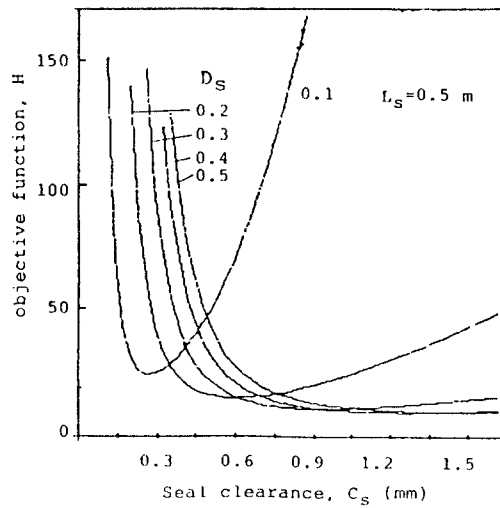


Fig. 7 Relationships between objective function and seal clearance

Fig. 8은 최적화 전과 후의 불평형응답을 나타낸다. 최적화후의 경우와 초기치의 경우보다 불평형응답이 적게 되고 있다.

Fig. 9는 회전속도 변화에 따른 안정성 D와 누설량  $L_f$ 의 변화를 초기치와 최적치에 대해 나타내고 있다. 정격운전속도인 180rad/s에서 각기 안정성과 누설량이 초기치에 비해 상당히

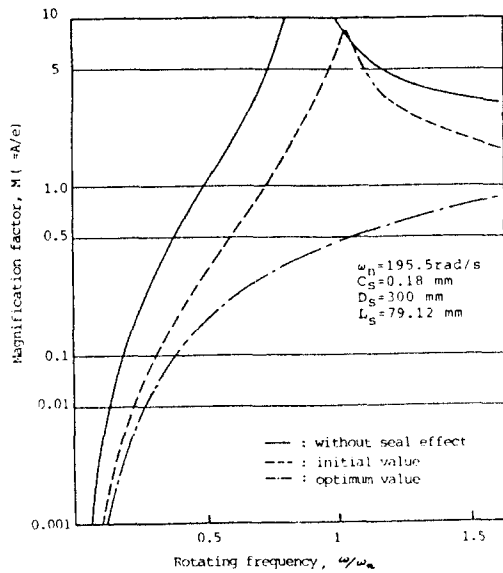
낮아지고 있으나, 고회전속도에서는 상대적으로 누설량이 크게 되어 이를 극소화시키기 위해 안정성이 상대적으로 최적치가 나빠지고 있다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 위험속도 이상에서 운전되는

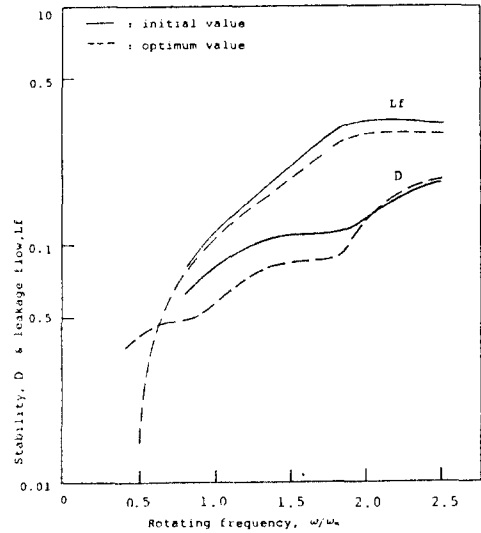
**Table 2. comparisons of initial and optimum data**

	initial value	optimum value	
C <sub>s</sub> (mm)	0.3	0.17999	0.17999
D <sub>s</sub> (mm)	300.0	300.0	300.0
L <sub>s</sub> (mm)	30.0	79.1430	67.564
L <sub>s</sub> /D <sub>s</sub>	0.1	0.2638	0.2252
C <sub>s</sub> /D <sub>s</sub>	1/1000	0.6/1000	0.6/1000
H	87.4299	0.3288	1.6359
Q	83.274 (9.125)	0.25 (0.50)	1.1124 (1.0547)
D	4.0 (1.1284)	0.0225 (0.00846)	0.0491 (0.1250)
L <sub>t</sub>	1.5587 (1.2485)	0.5630 (0.7503)	0.5186 (0.7201)
a		1.0	0.1
b		0.1	1.0



**Fig. 8 Comparison of initial value with optimum value for unbalance response**

원심펌프의 경우 위험속도에서의 응답배율, 정격운전속도에서의 안정성 그리고 누설량을 목적함수로 하여 이를 최소화 하기 위한 시일의 직경, 틈새 및 길이를 설계변수로 하여 최적설계를 수행하였다. 최적화의 수치계산을 통하여 최적화의 효과가 충분히 크며 종래와 같이 정



**Fig. 9 Comparison of initial value with optimum value for stability and leakage flow**

특성만을 고려한 시일 설계로 부터 진동특성을 고려한 동적 최적설계를 수행하므로써 시일의 정특성 뿐만 아니라 진동특성도 양호한 최적형상을 구할 수 있음을 나타내었다.

### 참고문헌

1. ISO Technical Report, Susceptibility and Sensitivity of Machines to Unbalance, 1987.
2. Iwatsubo, T. and Kawai, R., The Optimum Design for Rotating Shaft Supported by Journal Bearing, Trans, JSME, 47-414, p. 146, 1981(in Japanese).
3. Yang, B.S., Iwatsubo, T. and Kawai, R., The Effects of Seal on the Stability of Pump Rotor, Trans. JSME, 51-470, p.2479, 1985(in Japanese).
4. 양보석, 최원호, 원심펌프축계의 불평형응답에 미치는 유체력의 영향, 한국윤활 학회지 2-2, p.20, 1986.
5. Iwatsubo, T. and Yang, B.S., The Effects of Elastic Deformation on Seal Dynamics, Trans. ASME, J. of Vibration, ect. Vol.110, No.1, p.59, 1988.
6. 양보석, 유한요소법에 의한 펌프축계의 안정성해석, 한국박용기관 학회지 10권 4호, p. 253-262, 1986.