一般論文

비제약 변수를 포함한 선형계획법의 해법

A Study on Rivised Simplex Method for Linear Programming with Unrestricted Variables

소영섭* · 박순달*

1. 서 론

일반적인 선형계획법의 제약식에는 변수의 비음조건이 포함된다. 그러나 식(1)과 같이 변수중의 일부가 비음의 조건이 없는 문제가 있다면 어떻게 해를 구할 것인가? 이렇게 비음조건이 없는 변수를 비제약 변수라 하며, 이와같은 문제를 비제약 변수를 포함한 선형계획법 문제라 한다.

$$\text{Max } C_1X_1+C_2X_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{s.t. } A_1X_1+A_2X_2=b$$

X_1 : 비제약, $X_2\geq 0$

(단, A_1 : $m\times f$ 행렬, A_2 : $m\times(m\text{-}f)$ 행렬, f : 비제약 변수의 수)

비제약 변수를 포함한 선형계획 문제는 치환법이나 소거법을 사용하여 비음조건을 가진 선형계획법 문제로 변환한 후, 선형계획법의 해를 구한 다음 해를 역산하여 원문제의 해를 구할수 있다. 그러나 소거법의 경우 소거 연산을 실시하고, 소거식을 보관해야 하는 단점이 있고, 치환법의 경우 변수를 치환하는 번거로움이 있으며, 두 방법 모두 해를 역산하는 단점이 있다.

따라서 본 논문에서는 선형계획법에 비제약 변수가 포함될 경우 발생되는 제반 이론을 정리하고 이를 이용하여 원문제를 소거법이나 치환법을 사용하지 않고 해를 구하는 변형된 수정단체법을 제시하려고 한다.

2. 이론적 고찰

비제약 변수를 포함한 선형계획 문제를 식(1)과 같이 놓을때 이의 쌍대문제는 아래와 같이 된다.

$$\text{Min } \Pi b$$

$$\text{s.t. } \Pi A_1^T=C_1 \quad (2.1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\Pi A_2^T=C_2 \quad (2.2)$$

Π : 비제약

비제약 변수를 포함한 선형계획법의 원, 쌍대문제에서 다음의 정리가 성립한다.

〈정리 1〉 원문제 (1)이 가능이고, rank$(A_1^T)\neq$

* 서울대학교 공과대학 산업공학과

rank(A_1^T | C)이면 (1)은 무한해(unbounded)이다.

증명) 식(2.1)에서 rank(A_1^T) ≠ rank(A_1^T | C)이면, $\Pi A_1^T = C_1$을 만족하는 Π의 값이 존재하지 않는다. 고로 쌍대문제는 비가능이다. 원문제가 가능이고 쌍대문제가 비가능이면 원문제는 무한해를 갖는다.

고로 (1)은 무한해(unbounded)를 갖는다.

식(1)의 문제를 수정단체법으로 풀기 위해서는 먼저 비제약 변수를 기저변수로 만드는 일이 필요하다. 왜냐하면 비제약 변수는 양의 값도 음의 값도 갖을수 있기 때문에 할인가 C_j가 0이 아니면 항상 목적함수 값을 개선할 수 있다. 따라서 비제약 변수는 할인가가 항상 0으로 유지되는 기저변수가 되어야 한다. 비제약 변수를 기저변수로 만드는 과정에서 다음의 정리가 성립한다.

〈정리 2〉 비제약 변수 X_j가 기저에 진입하지 못하면(비기저로 남아있으면) 비제약 변수 X_j는 기저에 들어있는 변수와 서로 종속이다.

증명) X_j가 기저에 진입하지 못한다 함은 $B^{-1}A_{.j} = [\bar{a}_{1j}, \cdots\cdots, \bar{a}_{mj}]$라 할때, 단계 3에 의해 $\bar{a}_{ij} = 0, \forall i \in B_2$가 된다. 고로 $X_j = \sum_{i \in B_1} \bar{a}_{ij} X_j$가 되어 X_j는 기저에 들어있는 비제약 변수에 종속이 된다.

단, B_1은 비제약 변수가 기저가 되어 있는 행들의 집합을 뜻한다.

비제약 변수를 기저에 넣는 단계가 끝나면 현재의 비제약 기저변수를 계속 기저로 유지하면서 문제(1)의 가능상태를 점검하고 가능인 경우 최적해를 구하는 단계를 거치게 된다. 가능상태를 점검하고 최적해를 구하는 과정은 수정단체법의 초기 기저 가능해를 구하는 국면 I (Phase I)과 최적해를 구하는 국면 II(Phase II)의 단계와 같으나 역행렬 B^{-1}와 평가벡터 Π를 수정하는 부분과 비율검정 부분이 다르게 되는데, 이 부분은 뒤에서 다루기로 한다. 국면 I이 끝난 뒤 문제(1)이 가능이면 다음의 정리가 성립한다.

〈정리 3〉 문제(1)이 가능이고 비제약 변수 X_j가 비기저이며, X_j의 할인가 C_j가 0이 아니면 문제(1)은 무한해가 된다.

증명) 비제약 변수가 기저에 들어가지 못하면, 이 변수는 기저에 있는 비제약 변수들에 종속변수가 된다(정리 2). 따라서 A_1^T를 가우스 소거법으로 행간소 사다리꼴을 만들면 아래 왼쪽이 되고, (A_1^T | C)를 같은 방법으로 만들면 아래 오른쪽이 된다.

$$\begin{array}{c} \\ \text{j-th} \end{array} \left[\begin{array}{c|c} I & x \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} I & x & 0 \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 & 0 & \bar{C}_j \end{array}\right]$$

따라서 rank(A_1^T) ≠ rank(A_1^T | C)
고로 정리 1에 의해 무한해가 된다.

〈정리 4〉 문제(1)이 최적해를 갖고 (2)에서 rank(A_1) = r < f 이면 대안해가 존재한다.

증명) rank(A_1) = r 이면 비제약 변수중 기저변수는 r개가 된다. 따라서 정리 2에 의해 (f-r)개의 종속변수가 존재한다. 또한 문제(1)이 최적해를 갖으므로 최적상태에서 비기저 비제약 변수를 X_j라 하면, 이의 할인가 $\bar{C}_j = 0$이 된다. 왜냐하면 $\bar{C}_j = 0$이면 정리 3에 의해 무한해가 된다. 고로 대안해가 존재한다.

그리고 비제약 변수를 포함한 선형계획법 문제를 수정단체법을 사용하여 해를 구할 때, 일단

기저에 진입된 비제약 변수는 기저를 떠나지 않는다. 왜냐하면 단체법에서 비율검정을 하는 이유는 진입변수 X_j의 값의 변화에 따라 어느 기저변수가 먼저 $X \geq 0$의 경계값에 도달하는가를 조사하여 먼저 $X_r=0$에 도달하는 X_r을 기저 탈락변수로 하기 위해서이다. 따라서 비제약 변수는 경계값이 없으므로 기저 탈락변수로 선택되지 않아 기저에 진입한 비제약 변수는 기저를 떠나지 않는다. 그러므로 단체법을 수행하는 동안 기저 행렬은 제약변수로 이루어진 부분만 바뀌게 된다. 이 특성을 고려하여 수정단체법을 변형하는 방법을 Best 와 Caron[2]이 제시하였다.

비제약 변수가 기저로 되어 있는 행은 비율검정을 할 필요가 없으므로 비율검정은 $\bar{b}_i/\bar{a}_{ij}$, $i \in B_2$(단, B_2는 기저변수가 제약변수인 행의 집합)이 된다. 여기서 $\bar{\mathbf{b}}=B^{-1}\mathbf{b}$이므로 $\bar{b}_i=(B^{-1})_{i.}\mathbf{b}$이고, $\bar{a}_{.j}=B^{-1}A_{.j}$이므로 $\bar{a}_{ij}=(B^{-1})_{i.}A_{.j}$가 된다. 그러므로 비율검정에 필요한 기저 역행렬은 제약변수에 대응하는 부분만 있으면 된다. 따라서 단체법을 수행하는 과정에서 기저 역행렬중 제약변수에 해당하는 부분만 수정을 하고, 비제약 변수가 기저인 부분은 초기 상태를 유지한다. 즉, 기저행렬 B를 $[B_1 \mid B_2]$로 구분하고 이에 따른 역행렬을 $[\frac{(B^{-1})_1}{(B^{-1})_2}]$로 구분하면 $(B^{-1})_2$에 해당하는 부분만 수정하게 된다.
(단, B_1은 비제약 변수, B_2는 제약변수로 된 기저행렬)

그러나 위와 같은 방법을 실행할 경우 새로운 기저 역행렬은 제약변수에 대응하는 부분만 변하므로 정상적인 기저 역행렬이 될수 없고, 이에 따라 수정단체법의 과정에서 필요한 평가벡터도 (Pricing Vector) $\Pi=C_B B^{-1}$로 구할수 없게 된다. 그러므로 평가벡터 Π를 구하는 새로운 방법이 필요하게 된다. 여기서 단체표(Simplex Tableau)를 고려해 보자. 문제(1)의 단체표에 단위행렬을 추가하여 그림 1과 같은 표를 만든다.

그림 1의 표에서 시작하여 단체법이 수행되는 중간과정의 표를 그림 2로 표현하면, 첨가했던 단위행렬 I은 기저 역행렬(B^{-1})이 되고, 0으로 첨가했던 첫번째 행의 값은 평가벡터 Π가 되게 된다. 그림 2에서 X_j를 진입 변수로 r번째 행에 대하여 선회연산을 실시하여 기저가 바뀌게 되면, 이에 따르는 평가벡터도 바뀌게 되는데 새로운 평가벡터 $\bar{\Pi}=\Pi-\bar{C}_j \cdot (B^{-1})_{r.}/\bar{a}_{rj}$가 된다. 이때 선회행 r은 앞의 결과에 의해 제약변수가 기저인 행에서만 나타난다. 따라서 기저 제약변수 집합인 B_2에 속한 기저 역행렬$(B^{-1})_2$의 수정만으로 평가벡터를 구할수 있다.

또한 기저 역행렬이 부분적으로 수정될 경우 역행렬이 불완전하므로 최적해 판정이 났을때 최적해를 $X_B=B^{-1}\mathbf{b}$로 구할수 없고, 다른 방법을 사용해야 한다. 먼저, 비제약 변수를 포함한 수정단체법에서 비제약 변수를 기저에 넣는 초기화 작업이 끝난 상태의 기저를 $B=[B_1 \mid B_2]$라 하고, 최적 상태에서의 기저를 $\bar{B}=[B_1 \mid \bar{B}_2]$라 하자. 여기서 $\bar{B}$는 비제약 변수에 해당하는

C	0	0
A	$\mathbf{b}$	I

그림 1.

0	$\bar{C}_j$	$\bar{Z}$	Π
I	$\bar{a}_{ij}$	$\mathbf{b}$	B^{-1}

그림 2.

기저행렬은 변하지 않기 때문에 $[B_1 \mid \bar{B}_2]$로 쓸 수 있다. 그리고 B와 $\bar{B}$에 대응하는 기저 역행렬을 각각 $[\frac{(B^{-1})_1}{(B^{-1})_2}]$와 $[\frac{(\bar{B}^{-1})_1}{(\bar{B}^{-1})_2}]$라 하면 역행렬의 특징상 $(B^{-1})_1 \cdot B_1 = I$, $(\bar{B}^{-1})_2 \cdot B_2 = I$, $(\bar{B}^{-1})_2 \cdot B_1 = 0$이 성립한다.

제약 조건식 (1)에서 비기저 변수에 0값을 대입하면 다음과 같이 된다.

$B_1 \cdot X_{B1} + \bar{B}_2 \cdot X_{B2} = \mathbf{b}$. 여기에 역행렬의 수정된 부분인 $(\bar{B}^{-1})_2$를 곱하면 $(\bar{B}^{-1})_2 \cdot B_1 \cdot X_{B1} + (\bar{B}^{-1})_2 \cdot B_2 \cdot X_{B2} = (\bar{B}^{-1})_2 \cdot \mathbf{b}$가 되어 $O \cdot X_{B1} + I \cdot X_{B2} = (B^{-1})_2 \cdot \mathbf{b}$ 즉, $X_{B2} = (\bar{B}^{-1})_2 \cdot \mathbf{b}$가 된다. 또한 위식에서 $B_1 \cdot X_{B1} = \mathbf{b} - \bar{B}_2 \cdot X_{B2}$가 되고, 이에 $(\bar{B}^{-1})_1$을 곱하면 $X_{B1} = (B^{-1})_1 \cdot (\mathbf{b} - \bar{B}_2 \cdot X_{B2})$가 된다. 따라서 비제약 변수가 포함된 수정단체법에서 보관하는 기저 역행렬은 제약변수에 해당하는 부분만 수정하므로 초기 $[\frac{(B^{-1})_1}{(B^{-1})_2}]$ 상태에서 $[\frac{(B^{-1})_1}{(\bar{B}^{-1})_2}]$를 기억하게 되는데 최적해는 $X_{B2} = (\bar{B}^{-1})_2 \cdot \mathbf{b}$, $X_{B1} = (B^{-1})_1 \cdot (\mathbf{b} - \bar{B}_2 \cdot X_{B2})$로 단계적으로 구하면 최적상태에서 보관되는 역행렬로 해를 구할수 있게 된다.

이상의 이론을 적용하여 수정단체법을 재 구성하면 다음과 같다.

3. 비제약 변수를 포함한 수정단체법

비제약 변수를 포함한 수정단체법은 종래의 수정단체법을 근간으로 하나 앞에서 보았듯이 비제약 변수를 기저에 넣는 초기화 단계가 첨가되는 것과 평가벡터를 구하고 비율검정과 기저 역행렬을 보관하는 방법이 달라진 형태이다. 따라서 전 계산과정을 1) 초기화 단계, 2) 국면 I 단계, 3) 국면 II 단계로 구분하여 볼수 있다.

3.1. 초기화 단계

이 단계는 비제약 변수를 기저에 진입시키는 과정으로 모든 비제약 변수에 대하여 기저 진입을 시도하므로 할인의 과정이 필요하지 않고, 이때 기저에 진입하지 못하는 비제약 변수가 있으면 앞의 〈정리 3〉, 〈정리 4〉를 이용하기 위하여 이를 따로 보관한다. 여기서 B_1은 비제약 변수가 기저인 행의 집합을, B_2는 제약변수가 기저인 행의 집합을, f는 비제약 변수의 갯수를, JY는 기저에 진입하지 못한 비제약 변수의 집합을 의미한다.

단계 0 : 여유변수와 인공변수를 사용하여 초기 기저해를 만든다.

$B = B^{-1} = I$, $B_2 = \{1, \cdots\cdots, m\}$, $JY = 0$, $k = 0$,

단계 1 : $k = k+1$; If $k > f$이면 단계 5로 간다.

X_k를 기저 진입변수로 선택한다. 비제약 변수는 기저에 들어 있어야 하므로 할인의 과정은 무시한다.

단계 2 : 제약변수의 비음조건을 만족시키기 위하여 비율검정 실시

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \underset{i \in B_2}{\text{Min}} \quad [\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0] \text{ or } [\frac{-\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} < 0]$$

인 r이 존재하면 단계 3으로 가고 그렇지 않으면 $JY = JY + \{k\}$ 한 후, 단계 1로 간다. 여기서 단체법의 비율검정과 달리 음수인 경우도 고려하는 것은 X_k가 비제약 변수이므로 음수를 가져도 무방하기 때문이다.

단계 3 : 기저 역행렬의 수정

여기서는 기저 역행렬을 명시형(Explicit Form)으로 수정한다.

$B_2 = B_2 - \{r\}$(r번째 행은 비제약 변수가 기저

가 되므로)

$(\tilde{B}^{-1})_{r.}=(1/\bar{a}_{rk})\cdot(B^{-1})_{r.}$

$(\tilde{B}^{-1})_{i.}=(B^{-1})_{i.}-\bar{a}_{ik}(\tilde{B}^{-1})_{r.}\ \ i\neq j,\ \ i=1,\cdots,m$

단계 4 : If $B_2=\phi$이면 $JY=JY+\{k+1,\cdots,f\}$하고 단계 5로 간다.

그렇지 않으면 단계 1로 간다.

단계 5 : 비제약 변수의 기저진입 종료

$B_1=\{1,\cdots,m\}-B_2,\ \ \Pi=C_B\cdot B^{-1},\ \ \bar{b}=B^{-1}b$

기저에 인공변수가 있으면 $\sigma=d_B\cdot B^{-1}$ 국면 I로 간다.

그렇지 않으면 국면 II로 간다.

3.2. 국면 I

비제약 변수의 기저 진입이 끝났지만 기저에 인공변수가 남아 있으면 현재의 해는 가능 기저해가 아니다. 따라서 가능 기저해를 찾기 위하여 이 단계를 실시하며, 여기서 기저에 진입한 비제약 변수는 계속 기저에 남아 있어야 하므로 비제약 변수가 기저인 행에 대하여 비율검정과 기저 역행렬의 수정을 하지 않는 것이 수정단체법의 국면 I과 다른 점이다.

단계 1 : 할인 : 선회열의 결정

1) $\bar{d}_s=\mathrm{Min}\{\bar{d}_j \mid \bar{d}_j=\sigma\cdot A_{.j},\ j>f\}$

제약변수에 대하여만 기저 진입을 고려하므로 $j>f$가 된다.

2) If $\bar{d}_s<0$이면 $\bar{C}_s=\Pi\cdot A_{.s}-C_s$하고 단계 2로 간다.

여기서 $\bar{C}_s$를 구하는 것은 2장에서 보듯이 $\Pi=C_B\cdot B^{-1}$를 하지 않고 $\tilde{\Pi}=\Pi-\bar{C}_j[(B^{-1})_r/\bar{a}_{rj}]$로 계산하기 때문이다.

3) $\bar{d}_s\geq 0$이고 $W=0$이면 국면 II로 가고, 그렇지 않으면 비가해

단계 2 : 비율검정 : 선회행의 결정

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}=\underset{i\in B_2}{\mathrm{Min}}\left[\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \mid a_{is}>0\right]$$

이때 $\bar{a}_{is}=(B^{-1})_{i.}A_{.s}$

$\bar{b}_i=(B^{-1})_{i.}b$

r이 존재하지 않으면 무한해가 된다. STOP

단계 3 : 기저 역행렬의 수정

$(\tilde{B}^{-1})_{r.}=(B^{-1})_{r.}/\bar{a}_{rs}$

$(\tilde{B}^{-1})_{i.}=(B^{-1})_{i.}-\bar{a}_{is}\cdot(\tilde{B}^{-1})_{r.}\ \ i\in B_2,\ \ i\neq r$

여기서 역행렬의 수정은 제약변수에 해당하는 부분만 하고, 비제약 변수에 해당하는 부분은 초기 상태를 유지한다.

단계 4 : 단체 승수의 수정

$\tilde{\sigma}=\sigma-\bar{d}_s\cdot(B^{-1})_{r.},\ \ \tilde{\Pi}=\Pi-\bar{C}_s\cdot(B^{-1})_{r.}$

단계 1로 간다.

3.3. 국면 II

이 단계는 최적해를 구하는 과정으로 수정단체법의 국면 II와 다른 점은 국면 I과 동일하다.

단계 0 : 해의 상태점검

If $JY=\phi$이면 단계 1로 간다. 그렇지 않으면 $\bar{C}_k=\Pi\cdot A_{.k}-C_k,\ \ k\in JY$

If $\bar{C}_k=0,\ \ \forall\ k\in JY$이면 단계 1로 간다(대안해 발생 : 정리 4).

그렇지 않으면 무한해가 된다(정리 3). STOP

단계 1 : 선회열의 결정

$\bar{C}_s=\mathrm{Min}\{\bar{C}_j \mid \bar{C}_j=\Pi\cdot A_{.j}-C_j,\ \ j>f\}$

If $\bar{C}_s<0$이면 단계 2로 간다.

그렇지 않으면 최적해가 된다.

$$X_i=(B^{-1})_{i.}\cdot \mathbf{b} \qquad i\in B_2$$

$$X_i=(B^{-1})_{i.}\cdot (\mathbf{b}-\sum_{i\in B_2} A_{.j}\cdot X_j) \qquad i\in B_1$$

단계 2 : 선회행의 결정

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}=\min_{i\in B_2}\left[\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \mid \bar{a}_{is}>0\right]$$

이때 $\bar{a}_{is}=(B^{-1})_{i.}A_{.s}$
$\bar{b}_i=(B^{-1})_{i.}\mathbf{b}$

r이 존재하지 않으면 무한해(unbounded)가 된다. STOP

단계 3 : 기저 역행렬의 수정

$(\tilde{B}^{-1})_{r.}=(B^{-1})_{r.}/\bar{a}_{rs}$

$(\tilde{B}^{-1})_{i.}=(B^{-1})_{i.}-\bar{a}_{is}\cdot(\tilde{B}^{-1})_{r.} \quad i\in B_2,\ i\neq r$

(Phase I의 경우와 동일)

단계 4 : 단체 승수의 수정

$\tilde{\Pi}=\Pi-\bar{C}_s\cdot(B^{-1})_{r.}$ 단계 1로 간다.

예제 :

이상의 방법을 사용하여 다음과 같은 예제의 해를 구해보자.

$$\begin{aligned}\text{Max}\quad & X_1-8X_2-7X_3-20X_4-10X_5\\ \text{s.t.}\quad & X_1-2X_2+X_3=24\\ & 2X_1+2X_3-X_4=16\\ & -X_1+3X_2+3X_3+X_5=32\\ & X_1:\text{비제약},\ X_2, X_3, X_4, X_5\geq 0\end{aligned}$$

<비제약 변수의 기저해 진입>

인공변수를 사용하여 초기 기저해를 만든다.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y_1	Y_2	Y_3	
Y_1	1	2	1	0	0	1	0	0	24
Y_2	2	0	2	-1	0	0	1	0	16
Y_3	-1	3	3	0	1	0	0	1	32

$B_2=\{1, 2, 3\}$

비제약 변수인 X_1을 기저에 진입시키면

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y_1	Y_2	Y_3	
Y_1	0	2	0	1/2	0	1	-1/2	0	16
X_1	1	0	1	-1/2	0	0	1/2	0	8
Y_3	0	3	4	-1/2	1	0	1/2	1	40

$B_1=\{1\}$, $B_2=\{2, 3\}$

$\sigma=(-1, 0, -1)$, $\Pi=(0, 1/2, 0)$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

<국면 I>

<1회>

$\bar{d}_s=\bar{d}_2=-5$, $\bar{C}_2=(0, 1/2, 0)\cdot(2, 0, 3)^T+8=8$

$\bar{a}_{.2}=(2, 0, 3)^T$, $\bar{b}=(16, 8, 40)^T$

$\bar{b}_r/\bar{a}_{r2}=\text{Min}\{16/2, 40/3\}=8$, $r=1$

새로운 기저 역행렬을 구하면

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -3/2 & 5/4 & 1\end{bmatrix}$$

제 2행 : 불변(비제약 변수가 기저)

$\sigma=(3/2, -5/4, -1)$, $\Pi=(-4, 5/2, 0)$

<2회>

$\bar{d}_s=\bar{d}_3=-4$, $\bar{C}_3=(-4, 5/2, 0)\cdot(1, 2, 3)^T+7=8$

$\bar{a}_{.2}=(0, 1, 4)^T$, $\bar{b}=(8, 8, 16)^T$

$\bar{b}_r/\bar{a}_{r2}=\text{Min}\{16/4\}=4$, $r=3(\because r=2\in B_1)$

새로운 기저 역행렬을 구하면

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -3/8 & 5/16 & 1/4\end{bmatrix}$$

제 2행 : 불변(비제약 변수가 기저)

$\sigma=(0, 0, 0)$, $\Pi=(-1, 0, -2)$

<3회>

$d_s=0$, $W=0$이므로 국면 II로 간다.

<국면 II>

<1회>

$\bar{C}_s=(0, 0, 20, 8)\geq 0$ 최적

$$\therefore \quad X_2=(1/2, -1/4, 0)\cdot(24, 16, 32)^T=8$$

$$X_3=(-3/8, 5/16, 1/4)\cdot(24, 16, 32)^T=4$$

$$X_1=(0, 1/2, 0)$$

$$\cdot\left[\begin{bmatrix}24\\16\\32\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right]$$

$$=(0, 1/2, 0)\cdot(4, 8, -4)^T=4$$

$$\therefore \quad X=(4, 8, 4, 0, 0)$$

$$Z=-88$$

4. 계산결과 및 결론

다음의 표는 비제약 변수가 포함된 선형계획법 문제를 비제약 변수를 단일변수 치환법을 사용하여 일반적인 선형계획 문제로 만들어 해를 구하는 방법과 앞 3장에서 설명한 비제약 변수가 포함된 수정단체법으로 해를 구한 결과를 나타낸다. 여기서 사용된 프로그램은 3장의 계산과정을 BASIC 언어로 만든 LPNON 이며, 비교 프로그램은 기저 역행렬을 명시형(explicit form)으로 유지하는 LPRESE. BAS 이다. 그리고 시간은 IBM-PC-AT 에서 BASIC Interpreter 상의 수행시간을 의미하며, 입력 자료는 사료배합 형태로 주어진 문제를 가지고 비제약 변수의 수가 0, 5, 10, 15 개일 경우에 대하여

표 1. 제약식 29, 변수 30인 경우의 수행시간 비교(18개 평균)

LPRESE/LPNON

비제약 변수의 수	수행시간	1회당 수행시간
0	257.3/205.2	7.811/6.230
5	441.7/217.3	7.839/5.067
10	415.4/176.7	7.856/4.033
15	376.0/108.0	7.833/3.308

표 2. 제약식 50, 변수 25인 경우의 수행시간 비교(8개 평균)

LPRESE/LPNON

비제약 변수의 수	수행시간	1회당 수행시간
0	178.9/143.0	13.351/10.670
5	587.4/373.4	13.473/8.373
10	696.6/398.7	13.293/7.170
15	929.5/301.4	12.803/6.305

각각 해를 구하는 시간을 측정했다.

표 1과 2에 의하면 수행시간의 경우 치환법은 비제약 변수가 발생하면 큰 증가를 보이나, 본 연구의 방법은 감소하거나 증가비율이 적으며, 단체법 1회 수행시간은 치환법의 경우 비제약 변수의 수에 무관하나 본 연구의 방법은 비제약 변수의 증가함에 따라 수행시간이 점점 줄어듦을 알수 있다. 이상의 결과에 따라 비제약 변수가 포함된 수정단체법은 비제약 변수가 기저로 되어 있는 부분은 단체법의 단계에서 기저 역행렬을 계산하지 않으므로 기존의 치환법이나 소거법 보다 계산속도가 빨라지며, 비제약 변수의 수가 증가함에 따라 더 효율적임을 알수 있다.

참고문헌

[1] 박순달, 선형계획법(전정), 대영사, 서울, 1986.

[2] Best, M.J. and Carson, R.J., "The Simplex and Unconstrained Variables", Jour. of Optimization Theory and Application, Vol. 45, pp. 33-39, 1985.

[3] Bisschop, J. and Meeraus, A., "Matrix Augmentation and Structure Preservation in Linearly Constrained Control Problem", Math. Prog., Vol. 18, pp.7-15, 1980.

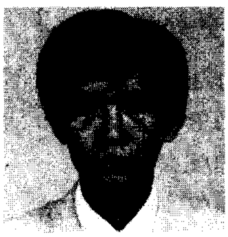
[4] Danzing, G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton, N.J., 1963.

[5] Murty, K.G., Linear Programming, John Wiley and Sons, N.J., 1983.

[6] Strang, G., Linear Algebra and It's Applications, Academic Press, London, 1980.

저자소개

저자 박순달은 현재 경영과학회 회장이며, 서울대학교 교수로 재직중이다. Univ. of Cincinati 에서 이학박사 학위를 획득하였고, 독일 Ruhr University 에서 연구원으로 근무하기도 하였던 저자는 Deterministic O. R. 분야와 컴퓨터 활용에 흥미를 가지고 연구를 하고 있다.



저자 소영섭은 서울대학교 산업공학과에서 학사, 석사를 마치고 현재 서울대학교 산업공학과 대학원 박사과정에 재학중이며, 경영과학과 컴퓨터를 응용하는 분야에 관심을 가지고 있다.