Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 14, No. 2, Dec., 1989

공공차량 경로문제 해법연구

장병만* · 박순달**

Public Vehicle Routing Problem Algorithm

Byung-Man Chang* and Soon-Dal Park**

Abstract

The Public Vehicle Routing Problem(PVRP) is to find the minimum total cost routes of M or less Public-Vehicles to traverse the required arcs(streets) at least once, and return to their starting depot on a directed network.

In this paper, first, a mathematical model is formulated as minimal cost flow model with illegal subtour elimination constraints, and with the fixed cost and routing cost as an objective function. Second, an efficient branch and bound algorithm is developed to obtain an exact solution. A subproblem in this method is a minimal cost flow problem relaxing illegal subtour elimination constraints. The branching strategy is a variable dichotomy method according to the entering nonrequired arcs which are candidates to enter into an illegal subtour. To accelerate the fathoming process, a tighter lower bound of a candidate subproblem is calculated by using a minimum reduced cost of the entering nonrequired arcs. Computational results based on randomly generated networks report that the developed algorithm is efficient.

1. 서 론

본 연구에서는 창고에 배정된 M 대 차량들이 출발하여 유방향의 도로와 같은 호로 구성된 네트워크에서 일부 수요호(Demand Required Arc)를 적어도 1회씩은 방문하여 통과하면서 서

* 서울산업대학 산업공학과
** 서울대학교 산업공학과

비스 후에 다시 출발 차고로 돌아오는, 운행비와 고정비의 합인 총비용을 최소화하는 M 대 이하의 차량별 경로를 구하는 공공차량 운행문제 (Public Vehicle Routing Problem: PVRP)의 수리모형을 제시하고, 최소 비용문제를 이용한 최적해법을 제시하고자 한다.

표 1과 같은 특성을 가진 PVRP 문제에는, 예를 들면 도로 청소차, 쓰레기 수거차, 경찰 순찰차, 살수차, 우편물 수집차, 가로차(street sweeper), 전화선 및 파이프라인 점검 수리원이나 학교 통학버스 등의 경로문제나 복수 우체부의 경로문제 등이 여기에 포함된다.

Dantzig와 Ramser가 1959년에 차량 경로 문제를 연구한 뒤로 현재까지 계속 차량의 운행문제에 관한 연구가 많이 추진되어 왔으나, 특정지점(마디)들을 통과 서비스하고 운행하는 차량경로문제(VRP)가 대부분이고, PVRP와 같이 특정 호들을 통과 서비스하고 운행하는 호경로 문제(Arc Routing Problem)에 관한 연구는 부진한 편이다.

PVRP는 차량의 적재용량내에 서비스 해야 하는 현실적인 제약조건이 첨가된 유용량 호경로 문제(Capacitated Arc Routing Problem) [6, 10]에 대한 수리모형과 해법을 연구하는데 도움이 되는 중요한 다리 역할을 한다고 사료된다.

호경로 문제는 기본 모형이 우체부문제 (Chinese Postman Problem: CPP)이고, 일반화된 모형은 지역 우체부문제(Rural Postman Problem: RPP)와 복수 우체부문제 (*Multiple CPP: MCPP*), 유용량 우체부문제 (*Capacitated CPP: CCPP*), 그리고 유용량 호경로 문제(Capacitated Arc Routing Problem: CARP)가 있으며 [2], [3], [5], [6], [8], [9], [10]에서 이런 호경로 문제들과 변형된 모형 및 해법들이 제시되어 있다.

표 1. PVRP의 특성

1. 모 기지수	1개소	
2. 차량수	복수 차량	M 대
3. 차 종	동일 종류	
4. 수요 형태	확정적	
5. 수요 위치	일부의 호(Arc), 도로	$(i, j) \in R \subseteq A$
6. 네트워크 형태	유방향	
7. 경로의 연속 운행시간	제한 없음	
8. 도착 및 서비스 시간	지정 없음	
9. 작업내용	배달, 상차, 하차, 상하차	
10. 비 용	운행비용, 운행거리	(C_{ij})
11. 목적함수	총 운행거리의 최소화 (필요 차량수 최소화 도모)	
12. 해	r 대의 차량의 최적 운행결로	$r \leq M$

본 논문에서 사용하는 용어는 다음과 같다.

A: 유방향 호(Arc)들의 집합, m= | A |
R: 수요호(Required Arc)들의 집합
$\bar{R}$: 비수요호(Nonrequired Arc)들의 집합, $\bar{R}$=A-R
N: 마디(Node)들의 집합, n= | N |
Q: 부분 마디집합, Q⊆N
C_{ij}: 마디 i 에서 마디 j 로 가는 호의 비용(거리), 한 단위흐름의 비용, $C=(C_{ij})$
M: 최대 투입 차량수
G(N,A): N 과 A 로 이루어진 유방향 네트워크
N_R: R 의 각 호에 붙어있는 마디들의 집합
G * =(N_R,R): G(N,A)의 부분 네트워크
F: 차량의 고정비
X_{ij}: 호(i,j) 사이의 흐름량, 통과 차량수
k_{ij}: 호(i,j)의 흐름량의 상한
l_{ij}: 호(i,j)의 흐름량의 하한
S : 불법경로에 인접해 있고, 흐름이 없고, 진입방향의 비수요호 집합

2. 수리모형

2.1 공공차량 운행문제

유방향의 연결 네트워크 G(N, A)에서 M 대 이하의 차량으로 출발지점 s를 떠나 서비스가 요구되는 수요호의 집합 R(⊆A)를 적어도 1번씩은 방문하고 다시 출발지점으로 돌아오는데 소요되는 차량들의 고정비와 운행비용의 합이 최소인 각 차량별 운행경로를 찾는 문제이다.

PVRP의 가정은 다음과 같다.

1. 투입하는 차량의 수는 M 이하이며, 차량의 종류는 동일하다.
2. 모든 호들은 1회 이상 통과할 수 있으며, 서비스 할때나 서비스 안할때의 통과시간은 같다.

그림 1과 같은 원래 네트워크에서 모기지를 출발점 s와 종착점 t로 나누고, t와 s를 C_{ts}= F, k_{ts}=M, l_{ts}=0인 유방향호(t, s)로 연결시켜 그림 2와 같은 확장 네트워크를 만들면, 각 수요호(i, j)는 $l_{ij}=1$, $k_{ij}=\infty$이고, 다른 비수요호 (i, j)는 $l_{i,j}=0$, $k_{ij}=\infty$이고, M 대의 각 차량은 상품으로 볼수 있어서, PVRP는 M개 이내의 상품을 s에서 t까지 운반하되 수요호들을 적어도 한번은 지나가는 최소 비용의 M개 이내의 경로를 찾는 최소 비용문제(Min. Cost Flow Problem)로 만들수 있다.

이렇게 풀면 고정비와 운행비용을 고려하게

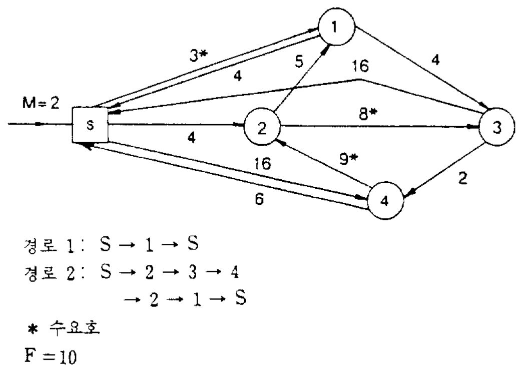


그림 1. PVRP의 네트워크 예

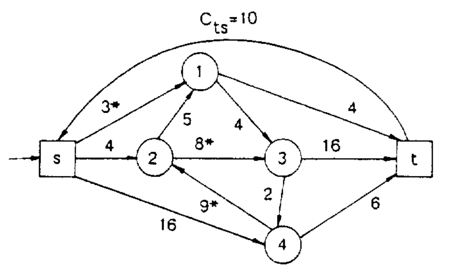


그림 2. 확장된 네트워크 G(N, A)

되어 총비용을 최소화하는 M개 이하의 운행경로를 구할 수 있다.

PVRP가 가능해를 가질려면 모기지에서 나가는 경로의 수와 모기지로 들어오는 경로의 수가 각각 M개 이하여야 하기 때문에, 모기지에 들어오는 수요호의 수나 나가는 수요호의 수가 최대한 M개 이하여야 한다. 그리고 G*가 연결 네트워크이고, s나 t와 연결되어 있으면, 일부 호 (i, j)∈R가 들어있으면서 모기지가 분리되어 환(Cycle)을 형성하는 불법 경로가 생기지 않는다. 그러나 G*가 연결 네트워크가 아니거나, s나 t와 G*가 분리되어 있으면 불법경로가 생길수 있다.

확장 네트워크 G(N, A)상에서 상품흐름 형태의 PVRP의 수식 모형은 다음과 같다.

(PVRP)

$$\text{Min } Z=\sum_{(i,j)\in A} C_{ij}X_{ij} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\text{s, t} \quad \sum_{i=1}^{N} X_{ij}-\sum_{i=1}^{N} X_{ji}=0 \quad \forall j\subseteq N \quad (2)$$

$$X_{ij}\geq 1 \quad \forall (i, j)\in R \quad \cdots\cdots (3)$$

$$1\leq X_{ts}\leq M \quad (t, s)\in A \quad \cdots\cdots (4)$$

$$X=(X_{ij})\in S \quad \cdots\cdots (5)$$

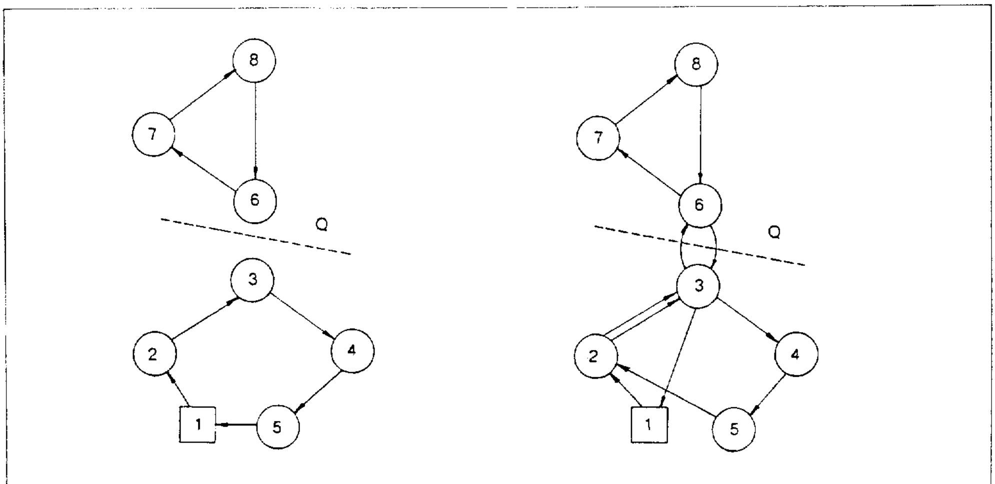
$$X_{ij}\geq 0,\ \text{정수},\ \forall (i, j)\in A \quad \cdots (6)$$

단, S=불법 경로방지 조건식 집합

X_{ts}=사용 차량수

C_{ts}=F

여기서 식(1)은 M대 차량들의 경로의 총비용을 최소화 하는 목적 함수식이다. 이 목적 함수식은 차량의 총 운행비용 $\sum_{(i,j)\in A} C_{ij}X_{ij}$과 총 고정비 $C_{ts}X_{ts}$의 합으로 되어 있다. 식(2)는 모든 지점(마디)에서는 그 지점으로 들어가는 경로의 수는 그 지점에서 나가는 경로의 수와 같아야 한다는 조건식으로 흐름의 보존성을 만족시키는 식이다. 식(3)은 모든 수요호들은 한번 이상 통과되어야 한다는 조건식이다. 식(4)는 사용 차량수는 M대 이하여야 된다는 조건식이다. 식(5)는 s와 t와 연결 안되는 불법경로가 없어야 한다는 조건식이다. 식(6)은 각 호를 지나는 차량수는 양의 정수라는 식이다.



(a) 불법경로 (b) 합법경로

그림 3. 불법경로와 합법경로

이 최소비용 문제형태의 수리모형은 유방향 네트워크 상에서 지정된 수요호들을 모두 통과하면서, 같은 호를 2번 이상 방문해도 되는 호경로 문제를 푸는 모형이 될수 있다.

그림 3(a)에서 불법경로(Illegal Subtour)는 6 → 7 → 8 → 6이다.

식(5)에서 불법경로를 방지하고 합법경로를 허용하도록 되어야 한다.

호경로 문제의 불법경로 처리에는 다음과 같은 점이 VRP와 다르다.

s에서 t까지의 하나의 경로에 불법경로 같은 Circuit가 연결되어 있는 것이 허용된다.

또한 불법경로속에 수요호와 비수요호가 연결되어 들어있을 수 있고, 다수개의 불법경로가 동시에 생길수 있다.

3. PVRP의 최적해법

3.1 해법의 전략

수리모형(PVRP)에서 불법경로 방지식(5)를 완화시키면 특수한 최소비용 문제가 되는데 이를 완화 PVRP(Relaxed PVRP: RPVPP) 문제라고 하자.

먼저 (RPVRP) 문제가 Totally Unimodular인 것을 증명해 보자.

원래 수식모형(PVRP)에서 불법경로 방지조건식과 정수조건을 완화시키고, 식(3)과 식(4)에 비음의 변수 r_{ij}와 s_{ts}를 도입하면 수식모형은 다음과 같이 바뀐다.

$$\text{Min } Z=\Sigma_{(i,j)\in A} C_{ij} X_{ij} \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\text{s.t } \Sigma^{N}_{i=1} X_{ij}-\Sigma^{N}_{i=1} X_{ij}=0 \quad \forall\ j\in N \quad \cdots\cdots (8)$$

$$X_{ij}-r_{ij}=1 \quad \forall (i,j)\in R \quad \cdots\cdots (9)$$

$$X_{ts}+s_{ts}=M \quad (t,s)\in A \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\text{단, } X_{ij},\ r_{ij}\geq 0 \quad \forall (i,j)\in R \quad \cdots\cdots (11)$$

$$X_{ts},\ s_{ts}\geq 0 \quad (t,s)\in A$$

이때 제약식은 다음과 같은 AA와 b 행렬로 표시된다.

$$AA=\begin{bmatrix} AN & 0 & 0 \\ J'_r & -J_r & 0 \\ e_{ts} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M \end{bmatrix}$$

단, e_{ts}는 ts번째 원소가 1인 행 벡터이고, AN은 마디-호 행렬(Node-Arc Incidence Matrix)이고, Totally Unimodular인 $n\times m$ 행렬이다.

J_r은 수요호의 수가 $|R|=r$이라고 하면, $r\times r$ 행렬이다.

J'_r은 AN 행렬과 열의 차수를 맞추기 위해 비수요호에 해당하는 열의 원소가 모두 0인 $r\times m$ 행렬이다.

그러므로 AA는 $(n+r+1)\times(m+r+1)$ 행렬이다.

이때 AA 행렬이 Totally Unimodular 행렬인 것을 연구해 보자.

행렬 B가 Totally Unimodular(TU) 행렬이면, $[B : e_i]$나 $\left[\frac{B}{e_i}\right]$도 TU 행렬인 것은 증명되어 있다[11].

정리 1. 행렬 AN이 TU이면 행렬 AA도 TU이다.

증명. 행렬 AN이 TU이면, $[AN : e_i]$나 $\left[\frac{AN}{e_i}\right]$는 TU이다.

AA와 b 행렬은 다음과 같이 바꾸어도 된다.

$$AA=(-1)^r\begin{bmatrix} AN & 0 & 0 \\ e_{ts} & 1 & 0 \\ J'_r & 0 & +J_r \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 1 \end{bmatrix}$$

그러므로 AN이 TU이기 때문에 $[\frac{AN}{e_{ts}}]$는 TU이다. 부분행렬 J_r의 구조는 각 행은 수요호 i에 해당하는 i열마다 원소의 값이 1인 단위벡타 e_i이다. 그러므로 J_r을 1행씩 분리시켜서 보면

$\begin{bmatrix} AN \\ e_{ts} \\ e_1 \end{bmatrix}$은 $\begin{bmatrix} AN \\ e_{ts} \end{bmatrix}$가 TU이므로 TU이다.

$\begin{bmatrix} AN \\ e_{ts} \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$는 $\begin{bmatrix} AN \\ e_{ts} \\ e_1 \end{bmatrix}$이 TU이므로 TU이다.

같은 방법으로 계속하여 $\begin{bmatrix} AN \\ e_{ts} \\ J'_r \end{bmatrix}$도 TU이다.

또한 $\begin{bmatrix} AN \\ e_{ts} \\ J'_r \end{bmatrix}$이 TU이므로 $\begin{bmatrix} AN & : & 0 \\ e_{ts} & : & 1 \\ J'_r & : & 0 \end{bmatrix}$도 TU이다.

또한 $\begin{bmatrix} AN & 0 \\ e_{ts} & 1 \\ J'_r & 0 \end{bmatrix}$이 TU이므로 $\begin{bmatrix} AN & 0 & : & 0 \\ e_{ts} & 1 & : & 0 \\ J'_r & 0 & : & J_r \end{bmatrix}$도 TU이다.

그러므로 AN이 TU이면 행렬 AA도 TU이다.

정리 1에 의해서 (RPVRP) 문제 모형의 행렬 AA가 TU이므로, (RPVRP) 문제의 해는 정수이다. 그러므로 (RPVRP) 문제를 풀면 기저가능해나 최적해는 정수해이며, 이는 (PVRP) 문제의 하한(Lower Bound) 값을 준다.

이 (RPVRP) 문제를 풀어서 나온 해 가운데 불법경로가 없는 해는, 흐름량을 각 차량의 경로로 전환시켜서 PVRP의 가능해로 사용할 수가 있다. 그리고 (RPVRP) 문제는 호(t, s)만 흐름 용량의 상한이 $k_{ts}=M$이고, 다른 모든 호(i, j)의 하한이 $l_{ij}=0$ or 1인 최소비용 문제와 같다. 그러므로 원문제 PVRP의 하한은 최소비용 해법으로 구할수 있다.

그러므로 PVRP에서 불법경로 방지식과 정수조건을 완화시켜서 최소비용 해법으로 풀고, 불법경로가 발생하는 해가 나오면 이를 제거하는 부분 문제들을 만들어 최소비용 해법으로 푸는 절차를 반복하여 최적해를 찾는 분지한계 해법을 개발하는 것이 합리적이다.

불법경로를 처리하는 방안으로는 불법경로의 호들을 하나씩 불통이 되게 하는 깨뜨리는 방안과, 불법경로의 인접 비수요호들에 각각 흐름이 생기게 하는 방안이 있겠다.

불법경로를 깨뜨리고 새로운 경로를 찾는 방안은, 비수요호를 못가게 하면 오히려 불법경로가 다른 경로에 연결되는 해들을 못찾게 될 수도 있고, 그 불법경로가 모두 수요호로 연결되어 있어서 깨뜨릴 수 없는 경우도 발생하므로 부적당하다.

그래서 불법경로로 들어가는 비수요호에 흐름이 생기도록 하면 불법경로내의 마디 집합 V와 불법경로밖의 마디 집합 $\bar{V}$에 속한 마디간의 연결이 이루어져서 불법경로에서 나가는 비수요호들에도 흐름이 생기게 되어서 합법경로가 생기게 되든지 또 다른 불법경로가 생기게 되는데, 이 방법을 계속하면 불법경로를 깨고 가능해가 구해진다.

그래서 불법경로로 진입 가능한 인접 비수요

호를 하나씩 그 흐름 하한 $l_{ij}=0$을 $l_{ij}=1$로 두어 새로운 부분문제를 만들고, 최소비용 해법으로 풀어서 비가해나 가능해가 나올때까지 계속하여 불법경로에 들어가는 비수요호의 하한 용량을 조정하여 분지하는 분지한계법을 택하기로 한다.

분지 변수는 불법경로 밖에서 불법경로로 들어올 수 있는 비수요호 $(i, j)\in S$의 흐름으로 하고, 이것을 가지고 $X_{ij}\geq 1$인 부분문제 k_1과 $X_{ij}=0$의 부분문제 k_2로 분지한다. 분지변수 X_{ij}를 $X_{ij}\geq 1$로 두어서 인접 불법경로로 흐름을 발생시키면, 불법경로가 깨어지고 출발점 s와 종착점 t로 가는 새로운 경로들로 바뀌거나, 불법경로 Cycle이 그대로 있되 다른 경로와 연결이 되어 가능해가 구해져서 분지끝이 되거나, 새로운 불법경로가 발생하게 된다.

불법경로가 반복하여 발생을 해도 모든 S 집합의 비수요호가 분지변수로 분지되면, 가능해가 구해지면서 분지끝이 되든지, 불법경로로 들어가는 모든 비수요호(i, j)가 $X_{ij}=0$으로 되어 불법경로를 제거할 길이 없어 비가해로 분지끝이 되든지하여 최종적으로 최적해나 비가해를 구할수 있게 된다.

임의의 불법경로로 들어오는 호$(i, j)\in\bar{R}$들이 이미 분지되어 흐름량이 $X_{ij}=0$으로 결정된 경우에, 네트워크의 형태는 불법경로로 들어오는 모든 호가 모두 제거되어 출발점 s에서 불법경로상의 어떤 마디에도 연결되는 경로가 없는 분리(disconnected)된 상태가 된다. 따라서 출발 마디에서 수요호를 서비스 하고, 종착점 t까지 가는 경로들중에 현재의 불법경로를 지나갈 수 있는 경로가 존재할 가능성이 없으므로 이 부분문제를 비가해로 판정하면 된다.

정리 2. (최적 수렴조건) 부분문제의 불법경로로 들어오는 호$(i, j)\in S$만을 분지변수의 호로 선정하여도 최적해를 찾을수 있다.

증명. PVRP 문제를 분지한계법으로 푸는 경우에 분지변수는 X_{ij} $(i, j)\in\bar{R}$를 $X_{ij}\geq 1$과 $X_{ij}=0$으로 분지하면 모든 해를 찾아나감으로 최적해를 찾을수 있다.

이때 분지하는 호를 선택하는 방법으로 불법경로로 들어오는 비수요호 중에서 흐름이 발생하지 않은 호$(i, j)\in S$를 먼저 선택할 수 있다.

어떤 부분문제의 호집합 S가 $S\neq\phi$인 경우에는 분지를 계속 수행해 나간다. 만약 부분문제에서 S가 $S=\phi$인 경우에는 그 부분문제는 비가해로 판정되어 분지끝이 된다.

따라서 부분문제에서 호집합 S에 속한 호만을 분지하여도 최적해를 찾을수 있다.

따라서 위와 같은 분지전략을 이용하면 다른 불법경로가 다시 발생하여도 이미 분지된 호는 다시 분지하지 않기 때문에 최악의 경우라도 $|\bar{R}|$보다 적게 분지되므로 유한번만에 최적해를 구할수 있으며, 문제의 비가해성을 판정할 수 있다.

다수의 불법경로가 생성되면 비수요호 S의 수 $|S|$가 적은 불법경로에 대해서만 부분문제들을 분지하여 생성시키고자 한다. 그 이유는 형성되는 부분문제 수가 적어지고, 나머지 불법경로들에 대해서는 나중에 부분문제를 만들게 될때 그동안 구해진 양호한 상한 $\bar{Z}$에 의해서 분지끝이 빨리 됨으로 전반적인 계산 노력을 단축할 수 있기 때문이다.

3.2 한계 전략

하한 전략으로는 현재까지의 상한값 $\bar{Z}$보다 큰 목적함수 값 Z가 나올 부분문제는 미리 분지

끝을 시켜 계산을 하지 않는 방안을 선택하고자 한다.

먼저 현재 부분문제 k에서 비수요호 $(i, j)\in S$를 분지하여 $X_{ij}\geq 1$으로 두어서 나오게 될 목적함수 값 Z의 양호한 하한 Z_{k1}을 최소비용 해법의 성질을 이용해서 찾아보자.

정리 3. 부분문제 k의 해가 불법경로일 때, 이 부분문제에서 하나의 호 $(i, j)\in S$를 분지한다고 하자. 이때 부분문제 k의 해가 Z_k이고, $\bar{C}_{ij}=C_{ij}+\pi_i-\pi_j$라 하고, $X_{ij}\geq 1$로 분지된 부분문제 k_1의 해를 Z_{K1}이라 하면, Z_k와 Z_{K1} 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$Z_{K1}\geq Z_K+\bar{C}_{ij}$$

증명. 부분문제 k에서는 $X_{ij}=0,\ (i, j)\in S$이고, 최적해에 도달해 있다. 부분문제 k_1에서는 $X_{ij}\geq 1$이므로 X_{ij}가 부분문제 k에서 보다 최소한 1만큼 증가하여야 한다. X_{ij}를 1만큼 증가시키는 경우에는 마디 j를 출발점, i를 종착점으로 하는 흐름증가 경로(Flow Augment Path)를 찾아야 한다.

만약 흐름증가 경로가 존재하고 흐름증가량이 1이면, $X_{ij}=1,\ (i, j)\in s_2$이 되어

$$Z_{K1}=Z_K+\bar{C}_{ij} \quad \cdots\cdots (12)$$

을 만족한다.

만약 흐름증가 경로가 존재하지 않으면, 쌍대변수값 π_i를 $\pi_i+\delta$로 바꾸어서 흐름증가 경로를 찾는다. 단 $\delta\geq 0$이다. X를 경로가 이어진 마디 집합이고, $\bar{X}=N-X$라 하면, 쌍대변수 값은

$$\pi'_j=\pi_j,\quad j\in X$$
$$\pi'_i=\pi_i+\delta,\quad i\in\bar{X}$$

가 된다.

따라서
$$\begin{aligned} Z_{K1}&=Z_K+(C_{ij}+\pi'_i-\pi'_j)\\ &=Z_K+(C_{ij}+\pi_i+\delta-\pi_j)\\ &=Z_K+(C_{ij}+\pi_i-\pi_j)+\delta\\ &=Z_K+\bar{C}_{ij}+\delta\\ &\geq Z_K+\bar{C}_{ij}(\delta\geq 0) \quad \cdots\cdots\cdots (13)\end{aligned}$$

∴ (12)와 (13)에 의해서

$$Z_{K1}\geq Z_K+\bar{C}_{ij}$$

를 만족한다.

상기 정리에서 사용되는 $\bar{C}_{ij}$는 현재의 부분문제 k의 해와 함께 최소비용 해법으로 구한 결과에서 얻을수 있다. Z'_{K1}를 부분문제 k_1의 하한 추정값으로 두고

$$Z'_{K1}=Z_K+\bar{C}_{ij}$$

과 같이 이 하한값을 정의하면, Z'_{K1}는 Z_{K1}의 추정치로 사용할 수 있고, 다음과 같은 관계가 있다.

$$Z'_{K1}\leq Z_{K1}$$

그러면 정리 3에 의해서 부분문제 k_1을 풀기전에, 하한 추정치 Z'_{K1}을 미리 계산하여 $Z'_{K1}\leq\bar{Z}$이면 분지끝을 시킬수 있으므로 계산시간을 많이 단축시킬 수가 있다.

정리 4. 부분문제 k를 풀었을 때의 목적함수 값을 Z_K라 하고, 각 호$(i, j)\in S$의 할인가를 $\bar{C}_{i,j}$라 하면, 부분문제 k의 새로운 하한 LB_K는 다음과 같다.

$$LB_K=Z_K+\min_{(i,j)\in S_2}\{\bar{C}_{ij}\}$$

증명. 모든 비수요호 $(i, j)\in S$에 대하여

$$\bar{C}_{pq}=\mathrm{Min}\{\bar{C}_{ij}\}$$
$$\bar{C}_{rs}=\mathrm{Min}\{(\bar{C}_{ij})\backslash\bar{C}_{pq}\}$$

이라 하면, 부분문제 k_1의 Z'_{K1}은 정리 3에 의해서 다음과 같다.

$$Z'_{K1}=Z_K+\bar{C}_{pq}$$

그런데 부분문제 k_1은 모든 비수요호 $(i, j) \in S$ 가운데 하나를 분지하는 것이므로, 정리 3에 의하여 부분문제 k_1은 최소한 다음을 만족하게 된다.

$$Z'_{K1} \geq Z_K + \min_{(i,j)\in S} \{\bar{C}_{ij}\}$$

또 부분문제 k_2의 Z'_{K2}는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} Z'_{K2} &\geq Z_K + \bar{C}_{rs} \\ &\geq Z_K + \bar{C}_{pq} \\ &= Z'_{K1} \end{aligned}$$

그러므로 부분문제 k 는 $Z_K + \mathrm{Min}\{\bar{C}_{ij}\}$ 이상의 해의 값을 가지기 때문에 부분문제의 새로운 하한 LB_k는 다음과 같다.

$$LB_K = Z_K + \min_{(i,j)\in S} \{\bar{C}_{ij}\}$$

부분문제 k 와 k_2의 하한을 다음과 같이 두면,

$$\begin{aligned} LB_K &= Z_K + \min_{(i,j)\in S} \{C_{ij}\} \\ &= Z_K + \bar{C}_{pq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LB_{K2} &= Z_{K2} + \min_{(i,j)\in S_2} \{(\bar{C}_{ij}) \setminus \bar{C}_{pq}\} \\ &= Z_K + \bar{C}_{rs} \end{aligned}$$

하한값이 더욱 높아져서 분지끝이 촉진된다.

그러므로 어떤 불법경로에 비수요호 집합 S 에 속하는 호들이 있으면, 이 호들의 $\bar{C}_{ij}$의 크기가 작은것부터 비수요호를 하나씩 순서대로 선택하여 부분문제들을 만들면, 각 부분문제 k 의 값 Z_K 보다 높은 하한 LB_K를 사용할 때, 분지끝이 촉진되어 해법의 효율성이 높아질 수 있다. 이때 부분문제 k 의 새로운 하한 LB_K과 부분문제 k_1의 하한 추정치 Z'_{K1}는 같다.

분지할때 가능해를 우선적으로 빨리 구하고, 가능한 목적함수값이 낮은 가능해를 먼저 구하고자 깊이 우선 탐색(Depth First Search)과 $Z_{K1} = \mathrm{Min}(Z_K + \bar{C}_{ij})$의 부분문제 k_1을 먼저 풀이하도록 한다. Z_{K1}을 계산하여 부분문제 k_1을 찾는 시간 복잡도는 증가하지만, 부분문제를 호의 지수 순으로 하는 것보다는 높은 하한을 사용하므로 부분문제의 분지끝이 촉진되고, 그 부분문제의 목적함수 값의 추정치로 분지끝이 되는 부분문제도 생기므로 부분문제의 계산상의 노력이 절약될 수 있다.

4. PVRP 의 최소비용 해법

PVRP 의 최소비용 해법은 다음과 같다.

단계 1. 초기화

$\bar{Z}^{\circ} = \infty$

$LB = -\infty$

단계 2. 최소비용 해법으로 RPVRP 의 해를 구함.

(1) 불법경로가 있으면 단계 3으로 간다.

(2) $Z_0 = \infty$이면 비가해이다.
해가 없다. STOP

(3) 불법경로가 없는 가능해이면 최적해에 도달했다. STOP
총비용 : $Z^* = Z_0$
경로별 코-스 : $X^{\circ} = (X_{ij})$

단계 3. 분지할 불법경로 및 비수요호 선택

(1) $t = t+1$, $\bar{Z}^t = \bar{Z}^{t-1}$
비수요호 S의 수가 적은 불법경로 IS_K를 찾는다.

(2) IS_K의 비수요호의 집합 $S_K = \phi$ 이면, 현재 부분문제 P_K가 비가해이다.
분지끝하고 단계 5로 간다.

(3) $\bar{C}_{pq} = \min_{(i,j)\in S_K}(\bar{C}_{ij})$의 호 (p, q)를 선택한다.
$S_K = S_K - (p, q)$

(4) P_K의 하한 LB_K을 추정한다.

1) $LB_K = Z_K + \bar{C}_{pq}$

2) $LB_K \geq \bar{Z}^t$이면 P_K를 분지끝 시키고 단계 5로 간다.

단계 4. 분지 및 하한계산

(1) 2개의 부분문제로 분지하고 문제 목록에 등록한다.

P_{K1} : $X_{pq} \geq 1$

P_{K2} : $X_{pq} = 0$

(2) P_{K1}의 하한을 정한다.

$LB_{K1} = LB_K$

(3) P_{K2}의 하한을 정한다.

1) $S_K = \phi$ 이면, P_{K2}는 비가해이다.
분지끝하고 단계 5로 간다.

2) $\bar{C}_{rs} = \min_{(i,j) \in S_K} (\bar{C}_{ij})$의 호(r, s)를 선택한다.
$S_K = S_K - (r, s)$

3) $LB_{K2} = LB_K + (\bar{C}_{rs} - \bar{C}_{pq})$

4) $LB_{K2} \geq \bar{Z}^t$이면, P_{K2}를 분지끝 시킨다.
단계 5로 간다.

단계 5. 탐 색

(1) 부분문제 하나를 선택한다.
깊이 우선 탐색의 규칙대로 문제를 선택한다.

(2) 부분문제의 목록이 비었으면 STOP.

1) $\bar{Z}^t$와 그 해를 최적해로 한다.

2) $\bar{Z}^t = \infty$이면 비가해이다.

단계 6. 부분문제 풀이

(1) $X_{ij} \geq 1$의 문제이면 하한 용량은 $l_{ij} = 1$로 둔다.

1) 최소비용해법으로 흐름의 변화를 일으킨다.

2) Z_K, X_K, 경로의 수 r을 계산한다.

3) PVRP의 가능해가 나왔으면 P_K를 분지끝 시킨다.
단계 7로 간다.

4) $Z_K = \infty$이면 P_K는 비가해이다. 분지끝하고 단계 5로 간다.

5) 불법경로가 있으면 단계 3으로 간다.

(2) $X_{ij} = 0$의 문제이면 (p, q) = (r, s)로 두고 단계 4로 간다.

단계 7. 상한개선과 문제 목록의 정리

(1) 상한을 개선한다.

$\bar{Z}^t = \min(\bar{Z}^{t-1}, Z_K)$

(2) $\bar{Z}^t < \bar{Z}^{t-1}$이면, $LB_i > \bar{Z}^t$인 모든 P_i를 분지끝 시킨다. 단계 5로 간다.

PVRP의 최소비용 해법을 이용하여 그림 4의 예제를 풀어보자.
이 문제를 본 해법으로 풀면 최적해는 다음과 같다.

총 운행거리 : $Z^* = 46$

차량의 경로 : s-1-2-3-4-6-7-5-6-t

차량의 수 : $M^* = 1$

그리고 해의 산출과정을 그림으로 표시하면 그림 5와 같다.

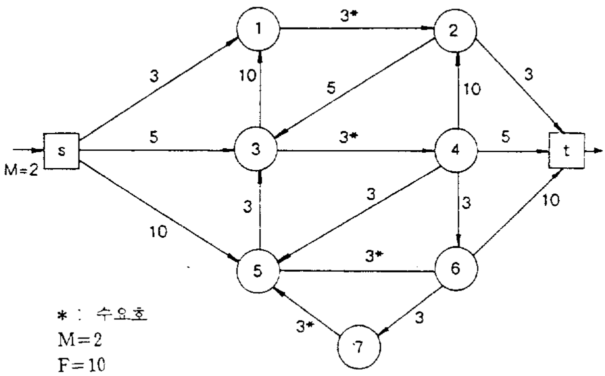


그림 4. 적용예제 네트워크

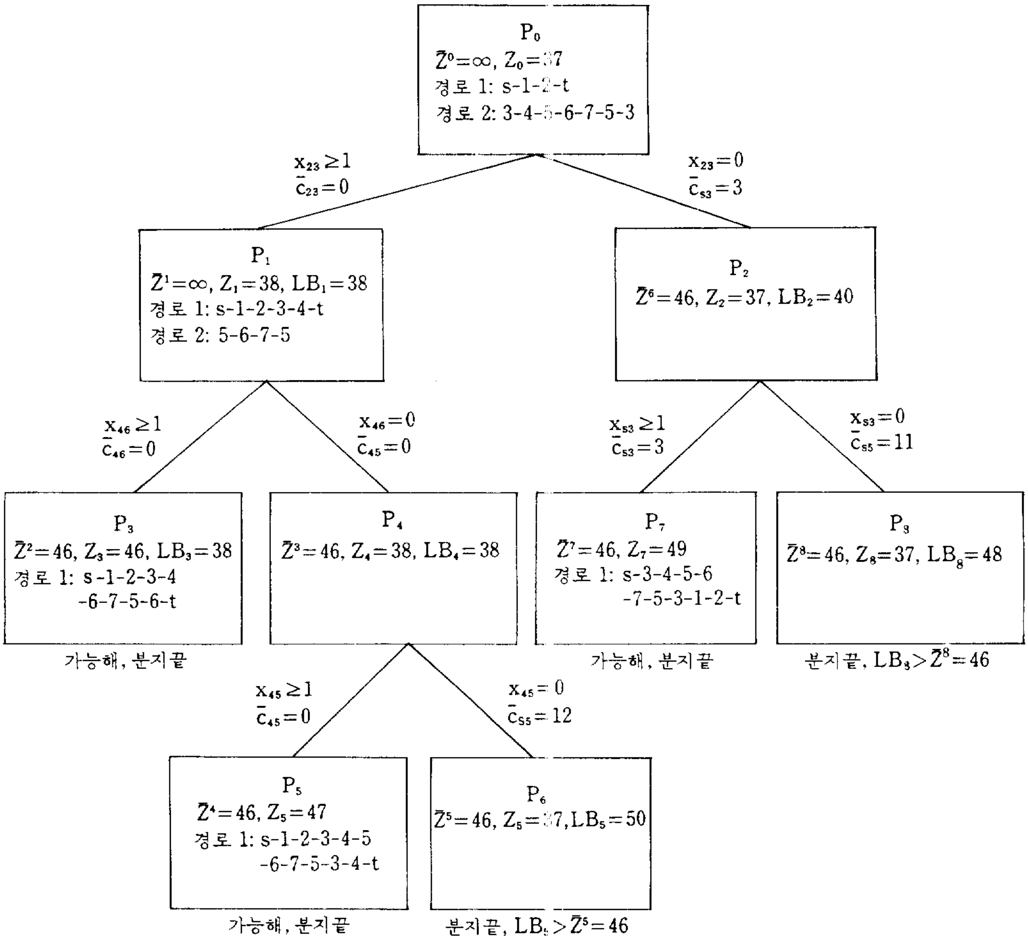


그림 5. 예제의 해 산출과정

5. 계산결과의 분석

PVRP의 최소비용 해법의 계산상의 효율성을 분석하고자 한다.

PVRP의 네트워크를 생성시키기 위하여 네트워크 생성의 Benchmark 프로그램인 Klingman[6]의 NETGEN을 사용하였다. 이 NETGEN을 이용하여 호의 수가 10개부터 1,000개까지의 네트워크를 200개 생성을 시켰는데, 이 가운데서 불법경로가 발생하는 네트워크가 26개가 생겼으며, 이 네트워크의 크기는 표 2와 같다.

호의 밀도는 10%, 25%, 40%의 3가지로 하였다. 개선해법의 프로그램 코드는 Microsoft 사에서 개발한 QuickBasic 4.0으로 프로그램되고, 실험은 IBM-PC AT-286 시스템에서 실행하였다.

개발한 PVRP의 최소비용 해법의 효율성을

분석하는데, 비교 대상은 PVRP의 단순 분지한계 해법으로 한다.

단순 분지한계 해법은 불법경로 조건이 완화된 PVRP 문제를 최소비용 해법으로 구한 후, 한계전략으로 부분문제 k_1의 해의 값 Z_{K1}과 상한 $\bar{Z}^t$를 비교하여 분지끝 시키며, 탐색전략은 불법경로에 들어가는 비수요호 S의 지수(Index) 순으로 부분문제를 선정하여 먼저 푸는 해법이다.

단순 분지한계 해법(해법 1)과 개발한 해법(해법 2)으로 네트워크에 대해 문제를 계산한 결과인 최적값과 계산시간은 표 2와 같다. 이 해법

표 2. 네트워크의 구조와 해법의 효율성 비교

(단위 : 초)

문제	문제크기				CPU Time		최적해값	
	호	마디	수요호	투입차량수	해법 1	해법 2	Z*	M*
1	13	7	2	3	0 : 06	0 : 05	34	1
2	16	8	2	3	0 : 08	0 : 05	20	1
3	16	8	2	3	0 : 16	0 : 05	33	1
4	16	8	3	3	0 : 08	0 : 02	24	1
5	16	8	3	3	0 : 07	0 : 02	28	1
6	18	9	4	3	0 : 19	0 : 14	55	1
7	20	10	3	3	0 : 22	0 : 17	466	1
8	20	10	5	3	0 : 48	0 : 44	289	1
9	20	13	6	3	0 : 30	0 : 17	843	1
10	22	10	6	3	0 : 29	0 : 25	269	1
11	22	11	5	3	0 : 32	0 : 32	458	2
12	30	17	7	5	1 : 40	0 : 43	982	1
13	50	20	12	5	0 : 53	0 : 15	1, 552	2
14	50	22	15	5	11 : 09	11 : 04	3, 398	1
15	70	20	12	10	27 : 59	5 : 33	867	1
16	80	22	20	10	1 : 17	1 : 06	8, 155	1
17	90	31	17	3	3 : 31	3 : 30	1, 902	1
18	94	31	20	3	11 : 08	9 : 15	2, 188	1
19	100	24	23	10	2 : 42	2 : 43	9, 155	1
20	120	30	29	10	13 : 32	10 : 02	5, 679	3
21	130	24	33	10	5 : 40	1 : 07	5, 423	1
22	130	20	40	12	10 : 09	2 : 40	5, 650	5
23	140	40	38	15	5 : 47	4 : 17	6, 522	3
24	150	35	31	15	8 : 18	8 : 20	9, 610	2
25	150	50	36	15	7 : 26	7 : 26	17, 809	1
26	300	100	50	15	29 : 02	26 : 03	56, 558	4

들의 부분문제는 Out-of-Kilter 해법으로 풀었다.

계산시간에 대하여 네트워크 크기별로 비교하는 실험계획을 행하였는데, 해법 2가 해법 1보다 전반적으로 짧은 시간이 소요되었다.

통계량에 대한 분석결과 해법 2가 해법 1보다 유의수준 0.05로 계산상의 효율이 좋았다.

그리고 계산시간은 문제의 크기와 함께 불법경로의 수와 생성되는 부분문제의 수 등 네트워크의 구조에 영향을 받는다. 해법 2의 효율성이 높은 것은 해법 2에서 하한 추정치 Z_{K1}와 하한 LB_K를 각 부분문제 k 마다 계산하고, 이를 상한과 비교하여 분지끝을 빨리시키는 한계전략과, 비수요호에서 $\min(\bar{C}_{ij})$, $(i, j) \in S$ 의 호를 선정하여 부분문제부터 생성시켜 풀어서 가능해를 빨리 구하는 탐색전략을 사용하면, 하한계산과 $\min(\bar{C}_{ij})$의 계산시간은 소요되지만, 분지끝을 빨리 시키고, 부분문제의 생성을 적게하므로 해법 2가 좋다는 것을 보여준다.

6. 결론 및 추후 연구방향

본 논문에서는 공공차량 운행문제를 정의하였고, 차량의 고정비를 고려한 최소비용 문제 형태의 수식모형을 제시하였다. 그리고 최소비용 해법을 이용한 분지한계법의 최적해법을 개발하였고, 높은 하한 추정치와 하한을 구하여 분지끝을 촉진시키는 해법으로 개발했다.

추후 연구과제로는, 분지한계법을 벗어난 효율적인 최적해법을 제시하는 것과, 경로(Path, Route)나 나무(Tree, Arborescence)의 특성을 살려서 푸는 발견적 해법을 연구해 보는 것이 바람직하다. 또한, 무방향의 공공차량 운행문제의 해법 개발이 될수 있다.

그리고 본 문제에 차량의 제약조건이 있는 실제적인 유용량 호경로 문제의 최적 해법을 개발하는 것도 큰 의미가 있다.

참고문헌

[1] 박순달, OR(경영과학), 대영사, 1987.

[2] 장병만, "복수지역 우체부 문제", 서울대학교 박사논문, 1989.

[3] Bodin, L., Golden, B., Assad, A., and Ball, M., "Routing and Scheduling of Vehicles and Crews", Comput & O.R. 10, 63-211, 1983.

[4] Fulkerson, D., "An Out-of-kilter Method for Minimal-Cost Flow Problems", J.S.I. Appl. Math., 9, 1, 18-27, 1961.

[5] Frederickson, G., "Approximation Algorithms for Some Postman Problems", JACM, 26, 538-554, 1979.

[6] Golden, B. and Wong, R., "Capacitated Arc Routing Problems", Networks, 11(3), 305-315, 1981.

[7] Klingman, D., Napier, and Stutz, J., "NETGEN: A Program for Generating Large Scale Capacitated Assignment, Transportation and Minimum Cost Flow Network Problems", Management Science, 20, 5, 814-821, 1974.

[8] Levy. L., "The Walking Line of Travel Problem: An Application of Arc Routing and Partitioning", Ph. D. Dissertation, University of Maryland, 1987.

[9] Orloff, C., "A Fundamental Problem in Vehicle Routing", Networks, 4, 35-64, 1974.

[10] Pearn, W.L., "The Capacitated Chinese Postman Problem", Ph. D. Dissertation, University of Maryland 1984.

[11] Schrijver, A., "Theory of Linear and Integer Programming", John Wiley & Sons, Chichester, 1986.