Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 14, No. 2, Dec., 1989

대규모 혼합 정수계획 문제를 풀기 위한 라그랑지 이완기법과 벤더스 분할 기법과의 대칭적 관계

조성철* · 김세헌**

The ε-Symmetric Relation Between the Lagrangean Relaxation and the Benders' Decomposition for Large Scale Mixed Integer Programming

Seong-Cheol Cho* and Sehun Kim**

Abstract

We in this paper have defined the concept of ε-symmetric relation between the Lagrangean relaxation and the Benders' decomposition. This links the solutions of the Lagrangean subproblems and those of the Benders' subproblems even under positive duality gaps. As an application we have discussed the reduction of the size for a special class of problems.

1. 서 론

Held and Karp(1970, 1971)가 traveling salesman 문제에 라그랑지 이완기법을 체계적으로 처음 적용하여 성공한 이후, 이에 자극받아 이 기법은 여러 혼합 정수계획 문제에 광범위하게 적용되게 되었고, 이의 실제적 수행 업적은 1970년대 이후의 OR 기법중 가장 두드러진 것 중 하나로 평가받게 되었다. 이에 관한 개념과 이론을 Geoffrion(1974)의 논문에서, 폭넓은 응용사례에 관한 보고를 Fisher(1981)의 논문에서 발견할 수 있다.

라그랑지 이완법은 사이즈가 크고 복잡한 문제를 작고 다루기 쉬운 부문제로 바꾸어 반복적으로 풀어서 해의 발견을 추구한다는 점이 가장 큰 매력이라고 생각된다. 복잡한 branch and bound에 편입되더라도 선형계획 이완법 보다 더 좋은 상한(최소화 문제의 경우는 하한)을 제공한다는 것이 알려져 있다.

라그랑지 부문제를 푸는 것은 일반적으로 쉬

* 한국 해양대학 해운경영학과
** KAIST 경영과학과

운 일이므로 현재까지의 이론적 관심은 주로 라그랑지 쌍대문제를 푸는 법에 집중되어 왔다. 이는 볼록 함수의 최소값을 구하는 문제에 관한 관심인데, 가장 실제적인 것이 Polyak(1967, 1969)의 서브그래디언트 해법과 이의 개선들이라고 할수 있다.

혼합 정수계획 문제를 라그랑지 이완기법으로 풀때 정리되지 않은 문제점중 하나는 라그랑지 부문제를 여러번 푼 후에도 실제 원 문제의 적절한 해를 발견하지 못할 때가 많다는 점이다. 이러한 경우는 결국 복잡한 branch and bound에 편입되어야 한다. 이 논문에서는 이러한 점에 착안하여 라그랑지 이완기법과 원문제의 해의 관계를 연구하였다.

혼합 정수계획 문제는 일반적으로 라그랑지 쌍대 격차가 있기 때문에 라그랑지 부문제의 해를 통해 원문제에 관한 체계적 정보를 얻을수 없다고 일반적으로 인식되어 왔다. 명백한 근거없이 사용된 몇몇 라그랑지 휴리스틱 기법은 (Fisher(1976), Cornuejols, Fisher and Nemhauser(1977), Fisher(1981)) 이러한 난점을 나름대로 극복하기 위한 노력이었다. 이 논문에서는 라그랑지 쌍대 격차가 일반적으로 존재한다는 점을 고려하여 라그랑지 이완법의 해와 원문제의 해 사이에 존재하는 대칭적 관계를 규명하여 정리하였다. 이는 라그랑지 이완법과 이와 대조적인 벤더스 분할기법(Benders(1962))과의 관계를 연구함으로써 얻은 결과이다.

라그랑지 쌍대 격차가 작은 경우 우리의 발견은 다음과 같이 해석된다 :

라그랑지 이완기법을 위한 근사 최적 승수가 적절한 벤더스 부문제의 근사 쌍대 최적해로 발견되고, 역으로 벤더스 분할기법의 근사 최적 정수 선택이(따라서 원문제의 근사 최적해)가 적절한 라그랑지 부문제의 근사 최적해로 발견된다.

우리의 관심과 비슷한 유형의 연구로서 Van Roy(1983)의 교차분할 해법을(cross decomposition method) 생각할 수 있으나 우리는 복잡한 masterproblem을 제외하고 계산적으로 유용한 부문제만을 관심 대상으로 했다는 점이 이와 다르다.

우리는 다음 절에서 ε-대칭적 관계를 정의하고 해석하였으며, 이것과 쌍대 격차를 체계적으로 연결시켰다. 제 3절에서는 이를 이용하여 특이한 형태의 혼합 정수계획 모형의 사이즈를 줄이는 문제에 관하여 논의하였다. 이는 실제 해법 개발에 유용한 시사점을 내포하고 있다.

2. ε-대칭적 관계

아래와 같은 혼합 정수계획 모형을 생각해 보자.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}) \quad \alpha = \max\ & c_1x + c_2y \\
\text{s.t. } & A_{11}x + A_{12}y \le b_1 \qquad \cdots\cdots (2.1) \\
& A_{21}x + A_{22}y \le b_2 \\
& x \ge 0,\ \ y \in Y
\end{aligned}
$$

여기서 $c_1{:}1\times n$, $c_2{:}1\times q$, $A_{11}{:}m\times n$, $A_{12}{:}m\times q$, $A_{21}{:}p\times n$, $A_{22}{:}p\times q$, $b_1{:}m\times 1$, $b_2{:}p\times 1$, $x{:}n\times 1$, $y{:}q\times 1$, $Y=R^q$의 부분집합으로서 비음인 정수 벡터들로 구성된 유한집합이라 하고, 표시의 단순화를 위해 아래와 같은 부호를 사용하기로 하자.

$$
\begin{aligned}
X(y) &= \{x \ge 0 \mid A_{11}x \le b_1 - A_{12}y, \\
&\qquad A_{21}x \le b_2 - A_{22}y\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= \{(x, y) \mid A_{21}x + A_{22}y \le b_2,\ \ x \ge 0,\ \ y \in Y\}, \\
Z(y) &= \{x \ge 0 \mid A_{21}x \le b_2 - A_{22}y\}.
\end{aligned}
$$

이제 (P)의 최적해가 존재하고 (2.1)의 제약식이 없으면 비교적 잘 알려진 해법들로 (P)의 (근사) 최적해를 구할수 있는 경우를 가정하기로 하자. 문제 (P)를 분할기법으로 접근하는 방법은 크게 나누어 변수 y를 고정시켜 쉬운 부문제를 만드는 벤더스 분할기법과 승수 u로 제약식 (2.1)을 이완시켜 쉬운 부문제를 만드는 라그랑지 이완기법의 대조적인 두 흐름으로 요약된다.

Van Roy는 (1983) 이 두 흐름을 연결하는 교차 분할기법을 제안하면서 각각을 primal 분할기법, dual 분할기법이라고 불렀다.

벤더스 분할기법은 주어진 정수 $y \in Y$에 대해 아래와 같은 벤더스 부문제 (Py)를 반복적으로 만들어 원문제를 풀려고 하는 해법적 노력이다.

$$(Py) \quad \alpha(y) = \max\{c_1x + c_2y \mid x \in X(y)\}$$

위의 (Py)는 선형계획 문제이므로 심플렉스 해법으로 쉽게 풀수 있고, 벤더스 분할기법의 개념은 아래의 식으로 표현된다.

$$\alpha = \max\{\alpha(y) \mid y \in Y\}$$

따라서 좋은 y를 찾는 것이 가장 중요한 문제이다.

라그랑지 이완기법은 주어진 승수 벡터 $u(\geq 0)$에 대해 아래와 같은 라그랑지 부문제 (Du)를 순차적으로 푸는 것을 근간으로 한다.

$$\begin{aligned}(Du) \quad \beta(u) &= \max\{c_1x + c_2y + u(b_1 - A_{11}x - A_{12}y) \mid (x, y) \in Z\} \\ &= \max\{(c_1 - uA_{11})x + (c_2 - uA_{12})\, y \mid (x, y) \in Z\} + ub_1\end{aligned}$$

함수 $\beta(u)$가 u의 볼록 함수임은 잘 알려진 사실이며, 여러 다양한 미분 불가능 최적화 기법들로 (Shor, 1985) 아래의 라그랑지 쌍대문제 (D)를 풀수 있다.

$$(D) \quad \beta = \min\{\beta(u) \mid u \geq 0\}$$

주어진 정수 $y \in Y$에 대해 $\alpha(y)$는 α의 하한을, 주어진 승수 $u \geq 0$에 대해 $\beta(u)$는 α의 상한을 제공한다. 따라서 $y \in Y$, $u \geq 0$에 대해 $\alpha(y) \leq \alpha \leq \beta \leq \beta(u)$이 성립하며, 라그랑지 쌍대 격차는 $\beta - \alpha$로 정의된다.

(정의 2.1.) (P)의 실행 가능해 (x, y)가 비음의 수 ε에 대해 $c_1x + c_2y \geq \alpha - \varepsilon$을 만족하면 이를 (P)의 ε-최적해라고 한다. 다른 문제들의 ε-최적해도 같은 개념으로 정의하기로 하자.

위의 정의에 따르면 정확한 최적해는 0-최적해에 해당된다. 임의의 비음의 두 수 $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$에 대해 ε_1-최적해는 또한 ε_2-최적해임을 쉽게 알수 있다. 혼합 정수계획 문제는 계산의 복잡성상 NP-hard에 속하기 때문에 정확한 최적해를 찾는 것은 매우 힘든 경우가 많으므로 비교적 작은 노력으로 ε-최적해를 찾는 것이 현실적인 좋은 방법들이다.

(정의 2.2.) $y \in Y$, $u \geq 0$으로 이루어진 해의 쌍 (y, u)가 $\beta(u) - \alpha(y) \leq \varepsilon$일 때, 이 해의 쌍을 (P)와 (D)의 ε-최적쌍이라고 한다.

많은 실제적 해법의 종결 조건은 결국 ε-최적쌍을 하나 발견하는 것이라 할수 있다. 주어진 해의 쌍 (y, u)에 대해

$$f(y, u) = ub_1 + (c_2 - uA_{12})y + \max\{(c_1 - uA_{11})x \mid x \in Z(y)\}$$

로 정의하기로 하자. 그러면 임의의 해의 쌍 (y, u)에 대해

$$\alpha(y) \leq f(y, u) \leq \beta(u) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (2.2)$$

임을 쉽게 알수 있다.

(정의 2.3.) 적절한 두 비음의 수 ε_1, ε_2가 있어서 아래의 세 관계가 성립할 때, $(P\bar{y})$와 $(D\bar{u})$ 사이에 ε-대칭적 관계가(ε-symmetric relation) 있다고 한다.

(1) 적절한 $\bar{w}$에 대해 $(\bar{u}, \bar{w})$가 $(P\bar{y})$의 쌍대문제의 ε_1-최적해이다.

(2) 적절한 $\bar{x}$에 대해 $(\bar{x}, \bar{y})$가 $(D\bar{u})$의 ε_2-최적해이다.

(3) $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$

위의 정의에 따르면 $(P\bar{y})$와 $(D\bar{u})$간에 ε-대칭적 관계가 있을 경우, $\bar{y}$를 $(D\bar{u})$의 (근사) 최적해로, $\bar{u}$를 $(P\bar{y})$의 쌍대문제의 (근사) 최적해로 각각 발견할 수 있다. 적절한 비음의 두 수 ε_1, ε_2에 대해 $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$이면 ε_1-대칭적 관계는 또한 ε_2-대칭적 관계를 의미한다.

(정리 2.1.) 이제 $\bar{y}\in Y$, $\bar{u}\ge 0$에 대해 $(P\bar{y})$와 $(D\bar{u})$간에 ε-대칭적 관계가 있으면 $(\bar{y}, \bar{u})$는 (P)와 (D)의 ε-최적쌍이다.

(증명) 이제 선형계획 모형

$$\max\{(c_1-\bar{u}A_{11})x \mid x\in Z(\bar{y})\} \quad \cdots\cdots (2.3)$$

을 생각해 보자. 정의 2.3으로부터 $\bar{x}$와 $\bar{w}$는 각각 (2.3)과 이의 쌍대문제의 실행 가능해이다. 따라서

$$\begin{aligned}&(c_1-\bar{u}A_{11})\bar{x}+(c_2-\bar{u}A_{12})\bar{y}+\bar{u}b_1\\ &\le f(\bar{y},\bar{u})\\ &\le \bar{u}(b_1-A_{12}\bar{y})+\bar{w}(b_2-A_{22}\bar{y})+c_2\bar{y}\end{aligned}$$

임을 알수 있다. 이로부터

$$\begin{aligned}&\beta(\bar{u})-\alpha(\bar{y})=\beta(\bar{u})-f(\bar{y},\bar{u})+f(\bar{y},\bar{u})-\alpha(\bar{y})\\ &\le \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon\end{aligned}$$

임이 증명된다.

Van Roy(1983)는 그의 교차 분할해법을 설명하면서 위의 정리중 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$인 경우를 증명한 바 있다. 이 경우는 라그랑지 쌍대 격차가 없는 드문 경우에 해당된다. 따라서 위의 정리는 Van Roy의 관찰의 일반화라 할수 있으며, 보다 확장적으로 우리는 이의 역을 증명할 수 있다.

(정리 2.2.) $\bar{y}\in Y$, $\bar{u}\ge 0$에 대해 $(\bar{y}, \bar{u})$가 (P)와 (D)의 ε-최적쌍이면 $(P\bar{y})$와 $(D\bar{u})$ 사이에 ε-대칭적 관계가 존재한다.

(증명) $\alpha(\bar{y})$, $\beta(\bar{u})$가 정의상 모두 유한한 값이므로, 선형계획 모형(2.3)은 쌍대 정리에 의해 최적해와 쌍대 최적해를 모두 갖는다. 이들을 각각 $\bar{x}$, $\bar{w}$라 하자. 그리고

$$\varepsilon'_1=\beta(\bar{u})-f(\bar{y},\bar{u}),$$
$$\varepsilon'_2=f(\bar{y},\bar{u})-\alpha(\bar{y})$$

로 정의하자. 그러면 관계식(2.2)로부터 ε'_1, $\varepsilon'_2\ge 0$이고, $(\bar{u}, \bar{w})$는 $(P\bar{y})$의 쌍대문제의 ε'_2-최적해, $(\bar{x}, \bar{y})$는 $(D\bar{u})$의 ε'_1-최적해이다. $\varepsilon'_1+\varepsilon'_2\le\varepsilon$이므로, $\varepsilon'_1\le\varepsilon_1$, $\varepsilon'_2\le\varepsilon_2$인 적절한 ε_1, ε_2에 대해 $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$임을 알수 있다. 따라서 $(P\bar{y})$와 $(D\bar{u})$간에 ε-대칭적 관계가 존재한다.

아래의 정리는 위의 두 정리로부터 자명하게 도출되며, 쌍대 격차와 ε-대칭적 관계를 직결시켜 주고 있다.

(정리 2.3.) (P)와 (D)의 쌍대 격차가 ε 이하일(β-$\alpha\le\varepsilon$) 필요 충분조건은 적절한 $\bar{y}\in Y$, $\bar{u}\ge 0$에 대해 $(P\bar{y})$와 $(D\bar{u})$ 사이에 ε-대칭적 관계가 존재한다는 것이다.

지금까지 설명한 ε-대칭적 관계는 실제로 쌍

대 격차가 양의 값으로 존재하는 보다 현실적인 경우를 포괄하고 있다. 쌍대 격차가 작은 경우, 이는 임의의 ε-최적쌍 $(\bar{y}, \bar{u})$에 대해 $\bar{y}$를 $(D\bar{u})$의 근사 최적해로, 즉 원 문제의 유익한 해를 라그랑지 이완기법의 수행중에 또한 역으로 $\bar{u}$를 $(P\bar{y})$의 쌍대문제를 근사적으로 풀어서, 즉 좋은 라그랑지 승수를 벤더스 이완기법의 수행 중에 발견할 수 있는 가능성을 설명해 주고 있다.

쌍대 격차가 없는 경우 대칭적 관계는 임의의 최적쌍 $(\bar{y}, \bar{u})$에 대해 $\bar{u}$가 $(P\bar{y})$의 최적해로 $\bar{y}$가 $(D\bar{u})$의 최적해로 발견됨을 의미한다. 교차 분할해법의 중요한 개념중 하나는 벤더스 부문제를 위한 정수 $\bar{y}$를 라그랑지 부문제를 통해, 라그랑지 부문제를 위한 승수 $\bar{u}$를 벤더스 부문제를 통해 제공받는다는 것인데, 따라서 라그랑지 쌍대 격차가 없다는 것과, $\bar{u} \rightarrow \bar{y} \rightarrow \bar{u}$, 혹은 $\bar{y} \rightarrow \bar{u} \rightarrow \bar{y}$ 식의 반복적 제안이 발견된다는 것이 논리적으로 같다. 이러한 점에 착안하여 다수 우변항 선형계획 모형을(Johnson(1974)) 위한 단순화된 교차 분할해법이(Kim, Cho and Um(1989)) 개발되어 좋은 결과를 얻은 바 있다.

다음 장에서 우리는 특이한 구조의 혼합 정수계획 모형의 사이즈를 줄여서 푸는 문제에 관해 우리의 대칭적 관계를 적용해 보고자 한다.

3. 특이한 구조의 혼합 정수계획 모형에의 응용

2절에서 정의한 문제 (P)에서 $A_{22}=0$인 경우를 생각해 보자. 또한 Y를 special ordered set of type 1(Williams, 1978, p. 164) 혹은 다중 선택 집합(multiple choice set) 즉,

$$Y=\{y\in R^q \mid y_1+\cdots+y_q=1, y_j : 0 \text{ or } 1\} \quad \cdots\cdots (3.1)$$

로 가정하기로 하자. 예를 들면 다수 우변항 선형계획 모형이 이러한 정식화에 해당되고, 앞절에서 Y가 유한집합이라고 가정했으므로 (P)가 언제나 (3.1)의 형태의 Y를 갖고 있는 것으로 가정해도 일반성을 잃지 않는다.

주어진 $y\in Y$에 대해 벤더스 부문제 (Py)는

$$(Py) \quad \alpha(y)=\max\{c_1x+c_2y \mid A_{11}x\le b_1-A_{12}y,\ A_{21}x\le b_2\}$$

의 선형계획 문제이고

$$\alpha=\max\{\alpha(y) \mid y\in Y\} \quad \cdots\cdots (3.2)$$

이 성립한다.

라그랑지 부문제 (Du)는 아래와 같은 보다 단순한 두개의 부문제로 다시 나뉘어진다.

$$(Du) \quad \beta(u)=\max\{(c_1-uA_{11})x \mid A_{21}x\le b_2, x\ge 0\}+\max\{(c_2-uA_{12})y \mid y\in Y\}+ub_1$$

(3.1)의 Y가 단순한 구조의 집합이므로, 아래의 부문제 (IDu)는 즉각적으로 풀린다. 즉

$$(IDu) \quad \beta'(u)=\max\{(c_2-uA_{12})y \mid y\in Y\}=\max\{(c_2-uA_{12})j \mid j=1,\cdots,q\}$$

이다. 이제 $Y_\varepsilon(u)$를 주어진 승수 u에 대해 (IDu)의 ε-최적해의 집합이라고 하자. 아래의 사실을 즉각적으로 알수 있다.

(정리 3.1.) $\beta(u)$의 값이 유한한 경우 $Y_\varepsilon(u)=\{y\in Y \mid$ 적절한 x에 대해 (x, y)가 (Du)의 ε-최적해$\}$.

(정리 3.2.) $\bar{u}$가 (D)의 ε_1-최적해이고, $\varepsilon\ge\varepsilon_1+\beta-\alpha$라 해보자. 그러면

$$\alpha=\max\{\alpha(y) \mid y\in Y_\varepsilon(\bar{u})\} \quad \cdots\cdots (3.3)$$

가 성립한다.

(증명) 정리 2.2에 의해 (P)의 임의의 최적해 $(\bar{x}, \bar{y})$는 $(D\bar{u})$의 ε-최적해이고, 정리 3.1에 의해 $\bar{y} \in Y_\varepsilon(\bar{u})$가 성립한다. $\alpha = \alpha(\bar{y})$이므로 (3.3)의 관계식이 성립된다.

(3.1)의 Y 하에서 $Y_\varepsilon(\bar{u})$는 아래와 같은 매우 쉬운 비교 연산으로 만들어질 수 있음을 주목해 보자.

$$Y_\varepsilon(\bar{u}) = \{y \in Y \mid \beta'(\bar{u}) - (c_2 - \bar{u}A_{12})j > \varepsilon \text{ 인 } j\text{에 대해 } y_j = 0\} \quad \cdots\cdots (3.4)$$

이제 $|Y|$를 집합 Y의 원소의 갯수로 정의하기로 하자. 그러면 $|Y|$는 문제의 사이즈를 정수변수 갯수로 평가한 수치가 되며, 그것은 (P)를 풀기 위해 최대 $|Y|$개의 선형계획 문제를 풀어야 함을 의미한다. (D)의 (근사) 최적 라그랑지 승수 $\bar{u}$를 하나 얻었다고 하자. 이러한 승수를 얻기 위한 좋은 방법들은 이미 미분 불가능 최적화 분야에서 많이 개발되어 있다. 그러면 $Y_\varepsilon(\bar{u})$는 위의 (3.4)와 같이 매우 쉽게 얻을수 있다.

만일 $|Y_\varepsilon(\bar{u})|$가 $|Y|$보다 매우 작은 수이면, (3.2)와 (3.3)을 비교하여 알수 있듯이 (P)의 사이즈를 아주 작게 줄여논 셈이 되며, 따라서 (P)를 푸는 수고를 크게 줄인 셈이다. 이러한 계산상의 잇점은 앞절에서 설명한 ε-대칭적 관계의 부분적 응용으로부터 얻은 것이다.

우리의 관찰의 유용성을 실험하기 위해 이 절에서 논의한 유형의 문제를 임의로 30개 만들어서 계산결과를 관측하여 표 1과 같은 결과를 얻었다. 테스트 문제의 행렬구성에 특이한 제약을 두지 않았으며, 아래와 같은 네 단계로 테스트를 수행하였다.

단계 1. (P)의 선형계획 이완문제를 푼다. 이 선형계획 문제의 최적값을 β, 쌍대 최적해를 $(\bar{u}, \bar{w})$라 하자 ; 이 경우 Geoffrion(1974)의 정수적 성질(integrality property)에 의해 $\bar{u}$가 (D)의 최적해임을 증명할 수 있다.

단계 2. $(ID\bar{u})$를 풀어 최적해 $\bar{y}$를 택한다.

단계 3. $(P\bar{y})$를 풀어 $\varepsilon = \beta - \alpha(\bar{y})$로 둔다 ; 이 값이 정리 3.2의 ε에 해당된다.

단계 4. (3.4)에 의해 $Y_\varepsilon(\bar{u})$를 구성한다.

표 1이 시사하듯이 (P)의 문제 사이즈를 매우 크게 줄일수 있었다. 정수 변수가 30내지 40개 정도의 문제가 대부분 2개에서 5개 정도의 정수 변수만 갖는 문제로 현저히 축소되었다. 상대적 문제의 사이즈가 평균적으로 약 10% 수준으로 줄어들었으며, 5% 이하로 줄어든 문제가 30개 중 13개나 되었다. 우리는 Y가 한개의 다중 선택 제약식으로 구성되는 경우를 다루었지만, 비슷한 적용을 여러개의 다중 선택 제약식이 있는 문제의(Martin and Sweeny(1983)) 해법 개발에 사용할 수 있으리라 생각된다. 보다 일반적인 형태의 Y에 대해서도 만일 $Y_\varepsilon(\bar{u})$를 비교적 쉽게 만들수 있는 유형의 문제라면 우리의 관찰은 이러한 혼합 정수계획 모형의 해법 개발에 유용한 시사점을 제공하고 있다.

4. 결　론

우리는 이 논문에서 혼합 정수계획의 라그랑지 이완기법에서 라그랑지 쌍대 격차를 극복하는 문제를 체계적으로 다루려고 노력하였다. 이 과정에서 벤더스 부문제와 라그랑지 부문제간의 ε-대칭적 관계의 개념을 정의하였고, 이것과 쌍대 격차를 연결시켰다. 우리의 발견은 일반 분할 기법에서 해법적 해석을 수반하는 바, 이의 부분적 적용으로 특이한 구조의 정수계획 모형의 사

표 1. 문제 사이즈 감소결과

문제번호	x 변수 갯수	(1)	(2)	$\|Y\|$	$\|Y_{\varepsilon}(\bar{u})\|$	$\|Y_{\varepsilon}(\bar{u})\|/\|Y\|$
1	12	2	4	30	2	6.7%
2	12	2	4	30	1*	3.3%
3	12	2	4	30	1*	3.3%
4	12	2	4	30	5	16.7%
5	12	2	4	30	2	6.7%
6	12	2	4	40	1*	2.5%
7	12	2	4	40	2	5.0%
8	12	2	4	40	2*	5.0%
9	12	2	4	40	11	27.5%
10	12	2	4	40	1	2.5%
11	30	4	12	30	1*	3.3%
12	30	4	12	30	6*	20.0%
13	30	4	12	30	2	6.7%
14	30	4	12	30	5	16.7%
15	30	4	12	30	20	66.7%
16	30	4	12	40	6*	15.0%
17	30	4	12	40	1	2.5%
18	30	4	12	40	3	7.5%
19	30	4	12	40	2	5.0%
20	30	4	12	40	2	5.0%
21	80	6	18	30	2	6.7%
22	80	6	18	30	1*	3.3%
23	80	6	18	30	3	10.0%
24	80	6	18	30	4	13.3%
25	80	6	18	30	7	23.3%
26	80	6	18	40	3	7.5%
27	80	6	18	40	4	10.0%
28	80	6	18	40	2	5.0%
29	80	6	18	40	1*	2.5%
30	80	6	18	40	13	32.5%

(1) 이완된 제약식의 갯수
(2) 나머지 제약식의 갯수
* 표시는 쌍대격차가 없는 문제를 나타낸다.

이즈를 줄이는 방법을 논하였는데 실제 계산을 통하여 이의 유용성을 예시하였다.

참고문헌

[1] Benders, J.F., "Partitioning procedures for solving mixed variable programming problems", Numeriche Mathematik, 4, 238-252, 1962.

[2] Cornuejols, G., M.L. Fisher and G.L. Nemhauser, "Location of bank accounts to optimize float: an analytic study of exact and approximate algorithms", Management Science, 23, 789-810, 1977.

[3] Fisher, M.L., "A dual algorithm for the one machine scheduling problem", Mathematical Programming, 11, 229-251, 1976.

[4] Fisher, M.L., "The Lagrangean relaxation method for solving integer programming problems", Management Science, 27, 1-18, 1981.

[5] Geoffrion, A.M.. "Lagrangean relaxation and its uses in integer programming", Mathematical Programming Study, 2, 82-114, 1974.

[6] Held, M. and R.M. Karp, "The traveling salesman problem and minimum spanning trees", Operations Research, 18, 1138-1162, 1970.

[7] Held, M. and R.M. Karp, "The traveling salesman problem and minimum spanning trees: Part II", Mathematical Programming, 1, 6-25, 1971.

[8] Johnson, E.L., "Integer programming in continuous variables", Report No. 7418-OR, Institut für Okonometrie und Operations Research(Nassestrasse, 2, D5300, West Germany), 1974.

[9] Kim, S., S. Cho and B. Um, "A simplified cross decomposition algorithm for multiple right hand choice linear programming", Journal of the Operations Research Society of Japan, 32, 441-449, 1989.

[10] Martin, R.K. and D.J. Sweeny, "An ideal column algorithm for interger programs with special ordered sets of variables", Mathematical Programming, 26, 48-63, 1983.

[11] Polyak, B.T., "A general method of solving extremum problems", Soviet Mathematics Doklady, 8, 593-597, 1967.

[12] Polyak, B.T., "Minimization of unsmooth functionals", USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 9, 14-29, 1969.

[13] Shor, N.Z., "Minimization methods for nondifferentiable functions", (Springer Verlag, 1985).

[14] Van Roy, T.J., "Cross decomposition for mixed integer programming", Mathematical Programming, 25, 46-63, 1983.

[15] Williams, H.P., "Model building in mathematical programming", (Wiley, 1978).