

## 이행적 쌍쌍 비교를 도출하기 위한 휴리스틱 방법

# A Heuristic Method to Construct Transitive Binary Comparisons

김 세 현\*  
김 동 우\*

### ABSTRACT

Many Traditional Algebraic Analyses of preference and choice for a finite set of alternatives have been based on binary choices. They have assumed that the binary preference information given by a decision maker is transitive. However, there is considerable evidence that many relations that might occur as preference relations cannot be represented as transitive relations. To construct transitive binary comparisons from intransitive ones, we suggest the notion of superior set, which helps us to understand the structure of intransitive binary comparisons. We also provide a heuristic method to construct transitive binary comparisons. And some merits of the suggested method over the existing methods are also discussed.

### 1. 서론

쌍쌍 비교(Binary Comparison)는 유한 개의 대안들 사이의 의사 결정 문제에 대한 많은 대수적 연구의 기초가 되어 왔다. 그런데, 쌍쌍 비교를 이용한 많은 연구들은 의사 결정자에게 주어지는 쌍쌍 비교의 정보가 이행적이라는 것을 명시적으로 혹은 암묵적으로 가정하고 있다. 그러나, 현실적으로는 많은 경우에 의사 결정자가 제공하는 쌍쌍 비교는 이행적이지 않으며, 더구나 각 대안을 평가하는 기준이 여러개 있는 다기준 의사 결정 문제(Multiple Attributes Decision Making Problem)에서는 의사 결정자로부터 이행적 쌍쌍 비교

를 얻는다는 것은 더욱 힘들다. 따라서, 의사 결정자로부터 주어지는 비이행적 쌍쌍 비교로부터 어떠한 방법으로 가장 그럴 듯한 이행적 쌍쌍 비교를 얻을 수 있는지의 문제가 관심의 대상이 된다.

이 논문에서는 2절에서 주어진 비이행적 쌍쌍 비교로부터 이행적 쌍쌍 비교를 얻기 위한 하나의 기준을 제시하고, 이 문제를 수리계획법의 형태로 정식화한다. 그리고, 3절에서는 쌍쌍 비교의 구조에 대한 이해를 도와주는 새로운 개념을 제시하고, 이 새로운 개념을 이용해 임의의 쌍쌍 비교가 이행적 쌍쌍 비교이기 위한 필요충분조건을 도출

\* 한국과학기술원 경영과학과

한다. 4절에서는 이 새로운 개념을 이용하여 주어진 쌍쌍 비교로부터 이행적 쌍쌍 비교를 구하는 휴리스틱 방법이 제시되고, 또, 제시된 휴리스틱 방법이 기존의 휴리스틱 방법보다 우수함을 설명한다.

## 2. 가정 및 정식화

집합  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ 를 고려의 대상이 되는 대안들의 집합이라 하자. 집합  $A$ 에 대한 쌍쌍 비교의 결과는 곱집합  $A \times A$ 의 부분 집합이다. " $a_i$ 는  $a_j$ 보다 약한 의미로서 선호된다."는 표현은 대개  $a_i I a_j$ 로 표시되며, 쌍쌍관계(Binary Relationship)  $a_i P a_j$  (" $a_i$ 가  $a_j$ 보다 엄밀한 의미로 선호된다.")는  $a_i P a_j$ 이나  $a_i R a_j$ 의 관계는 성립하지 않음을 나타낸다. 만약  $a_i R a_j$ 이고  $a_i I a_k$ 이면  $a_i I a_k$ 로 나타낸다.

이 논문에서는 의사 결정자에 의해 주어지는 쌍쌍 비교는  $a_i P a_j$ 만의 형태로 주어진다고 가정한다. 이 가정은 의사 결정자의 선호 분별 식역(Preference Discrimination Threshold)이 각 쌍의 대안들에 대해 엄밀한 의미의 선호를 나타낼 수 있을 정도로 충분히 작을 것을 요구한다.

$a_i P a_j$ 는 암묵적으로 비대칭적(Asymmetric) 쌍쌍 관계를 의미한다. 즉, 집합  $A$ 의 모든 대안  $a_i, a_j$ 에 대해  $a_i P a_j$ 이면  $a_j P a_i$ 이지 않다. 위의 가정에 덧붙여, 이 논문에서는 모든 대안  $a_i, a_j$ 에 대해  $a_i P a_j$ 이거나 그렇지 않으면  $a_i I a_j$ 일 것을 가정한다. 이것은 쌍쌍 비교의 완전성(Completeness)에 대한 가정이라 불리기도 한다.

다음은 이행성(Transitivity)에 대한 정의이다.

**정의 2.1** 쌍쌍 관계  $P$ 가 모든 대안  $a_1, a_2, a_3$ 에 대해  $a_1 P a_2$ 이고  $a_2 P a_3$ 이면  $a_1 P a_3$ 를 의미하면  $P$ 는 이행적(Transitive)이라 불린다. 만약  $P$ 가 이행적이지 않으면 비이행적(Intransitive)이라 불린다.

주어진 완전하고 비대칭적인 쌍쌍 비교를 표현

하기 위해서 아래와 같은 선호행렬을 도입한다. 선호 행렬  $X = [x_{ij}]$ 는

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i P a_j \text{ 일 때,} \\ 0, & a_i I a_j \text{ 일 때.} \end{cases}$$

로 정의된다[3].

**정의 2.2** 주어진 선호 행렬  $X$ 에서 다음과 같은 지표를 정의하자.

$$P(a_i) = \sum_j x_{ij},$$

$$I(a_i) = \sum_j x_{ji}.$$

$P(a_i), I(a_i)$ 는 의사 결정자의 각 대안에 대한 선호의 정도를 반영한다.

$B_n$ 을  $n$ 개의 대안에 대한 쌍쌍 비교  $P$ 의 모든 가능한 결과에 대한 선호 행렬들의 집합이라 하자. 또,  $T_n$ 을  $B_n$  중 이행적 쌍쌍 비교에 대한 선호 행렬들의 집합이라 하자. 그러면, 의사 결정자에 의해서 주어진 임의의 쌍쌍 비교로부터 이행적 쌍쌍 비교를 얻는 문제는 주어진 선호 행렬  $X \in B_n$ 로부터 의사 결정자의 선호 구조(Preference Structure)를 가장 잘 표현하는 이행적 선호 행렬  $T \in T_n$ 를 구하는 문제와 동일하다. 따라서 해답이 되는  $T$ 는 의사 결정자에 의해서 주어진 원래의 쌍쌍 비교를 될 수 있는 대로 그대로 유지하고 있어야 한다.

**정의 2.3** 주어진 선호 행렬  $X$ 에서는  $a_i$ 가  $a_j$ 보다 선호되었으나  $T$ 에서는  $a_i$ 가  $a_j$ 보다 선호되는 하나의 쌍 ( $a_i, a_j$ )이 있을 때 하나의 배반(Violation)이 일어났다고 한다.

우리의 문제는 배반을 최소화 한다는 관점에서 주어진 비이행적 쌍쌍 비교로부터 이행적 쌍쌍 비교를 구하는 것이다. 이러한 문제는 다음과 같은 수리 계획법의 형태로 정식화할 수 있다.

주어진  $X \in B_n$ 에 대해서,

Minimize  $V(X, T)$

Subject to  $T \in T_n$

문제(2.1)

여기서,

$$V(X, T) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j |x_{ij} - t_{ij}|.$$

Cook과 Seiford[6]는  $X \in B_n$  와  $T \in T_n$  사이의 배반 수의 척도인  $V(X, T)$ 가 Arrow[2]의 사회적 선택 공리와 같은 성격의 공리들을 만족한다는 것을 보였다.

다음의 위 문제의 제약식을 명시적으로 나타내기 위한 보조 정리인데, Bowman[4]과 Bowman과 Colantoni[5]의 방법을 따른 것이다.

**보조 정리 2.1** 만약  $T \in T_n$  이면  $T$ 는 다음 (i)-(iv) 식의 해이며 그 역도 성립한다.

- (i)  $t_{ii} = 0$ ,
- (ii) 모든  $i \neq j$ 에 대해,  $t_{ij} = 0$ ,
- (iii) 모든  $i \neq j$ 에 대해,  $t_{ij} + t_{ji} = 1$ ,
- (iv) 모든  $i, j, h = 1, 2, \dots, n$ 에 대해,  $t_{ih} + t_{jh} + t_{ih} \leq 2$ .

식(2.2)

(증명) ( $\rightarrow$ ) (i)과 (ii)는 선호 행렬의 정의로부터 자명하다. (iii)은 쌍쌍 비교의 완전성과 비대칭성으로부터 성립된다. (iv)는 선호 행렬  $T$ 의 이행성과 비대칭성으로부터 도출되는데,  $i=j$ 일 때는  $t_{ii} = 0$ 이어서  $t_{ih} + t_{jh} \leq 2$  이므로 역시 (iv)의 부등식을 만족하게 된다.  $j=h, i=h$ , 또는  $i=j=h$ 일 때도 같은 방법으로 (iv)의 부등식을 만족함을 보일 수 있다.

( $\leftarrow$ )  $T$ 가 (i)에서 (iv)의 식들을 만족한다고 하자. 그러면  $t_{ii} = 0$ 이다. 쌍쌍 관계  $P$ 를  $i \neq j$ 이고  $t_{ij} = 1$  이면  $t_i P t_j$  라고 놓자. 조건 (ii)와 (iii)은  $P$ 의 완전성과 비대칭성을 의미한다.  $t_h P t_i$  이고  $t_i P t_j$  이면  $t_{ih} = t_{ij} = 1$  이므로 (iv)에 의해서  $t_{jh} = 0$ 이고 (iii)에 의해서  $t_{ji} = 1$ 이다. 따라서,  $t_h P t_j$  이므로  $P$ 는 이행적이며  $T \in T_n$  이다. □

### 3. 우위 집합의 개념

이 절에서는 의사 결정자로 부터 주어진 쌍쌍 비교의 결과의 구조를 이해하고 의사 결정 문제의 해결에 도움이 되는 우위 집합의 개념을 소개한다.

**정의 3.1** 집합  $A$ 의 부분 집합  $S$ 의 모든 원소  $a_i$ 가 모든 대안  $a_j \in I = A - S$ 에 대해  $a_i P a_j$  이면  $S$ 를 우위 집합(Superior Set)이라 부른다. 또한 이 때 집합  $I$ 를 열위 집합(Inferior Set)이라 부른다.

**보조 정리 3.1** 대안들의 집합  $A$ 의 부분 집합으로서 우위 집합  $S$ 가 존재한다면 문제 (2.1)은 우위 집합  $S$ 와 열위 집합  $I$ 의 최소 배반 이행적 선호 행렬을 각각 구하는 두개의 독립적인 부분 문제로 나뉘어질 수 있다.

(증명) 대안들의 집합  $A$ 에 주어진 쌍쌍 비교로부터 이행적 최소 배반 순위를 찾는 문제는 다음 문제 (3.1)과 같다.

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} \sum_{a_j \in A} |x_{ij} - t_{ij}|$$

Subject to 식 (2.2) 문제 (3.1)

$S$ 를 우위 집합이라 하면, 문제 (3.1)은 다음 문제 (3.2)와 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \frac{1}{2} \sum_{a_i \in S} \sum_{a_j \in S} |x_{ij} - t_{ij}| \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a_i \in S} \sum_{a_j \in I} |x_{ij} - t_{ij}| \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a_i \in I} \sum_{a_j \in S} |x_{ij} - t_{ij}| \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a_i \in I} \sum_{a_j \in I} |x_{ij} - t_{ij}| \end{aligned}$$

Subject To

문제 (3.2)

$a_b, a_i \in S$ 이고  $a_j \in S$ 인 모든  $a_b, a_i, a_j$ 에 대해서,  
 $t_b + t_i + t_j \leq 2$ ,  
 $a_b, a_i \in S$ 이고  $a_j \in I$ 인 모든  $a_b, a_i, a_j$ 에 대해서,  
 $t_b + t_i + t_j \leq 2$ ,  
 $a_b, a_i \in I$ 이고  $a_j \in S$ 인 모든  $a_b, a_i, a_j$ 에 대해서,  
 $t_b + t_i + t_j \leq 2$ ,  
 $a_b, a_i \in I$ 이고  $a_j \in I$ 인 모든  $a_b, a_i, a_j$ 에 대해서,  
 $t_b + t_i + t_j \leq 2$ ,  
 모든  $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대해서,  $t_i = 0$ ,  
 그리고 모든  $i \neq j$ 에 대해서,  $t_i + t_j = 1$ .

$a_i \in S$ 이고  $a_j \in I$ 인  $i, j$ 에 대해서,  $t_i = 1$ 이고  $t_j = 0$   
 이므로, 문제 (3.2)에서 필요없는 제약식을 제거  
 하여 다음 문제 (3.3)과 같이 정리 할 수 있다.

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} \sum_{a_i \in S} \sum_{a_j \in S} |x_{a_i} - t_{a_j}| + \frac{1}{2} \sum_{a_i \in I} \sum_{a_j \in I} |x_{a_i} - t_{a_j}|$$

Subject To

문제 (3.3)

모든  $a_b, a_i, a_j \in S$ 에 대해서,  $t_b + t_i + t_j \leq 2$ ,  
 모든  $a_b, a_i, a_j \in I$ 에 대해서,  $t_b + t_i + t_j \leq 2$ ,  
 모든  $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대해서,  $t_i = 0$ ,  
 그리고 모든  $i \neq j$ 에 대해서,  $t_i + t_j = 1$ .

따라서, 문제 (3.3)은 각기 독립된 두 개의 문제  
 (3.4)와 (3.5)로 나누어 진다.

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} \sum_{a_i \in S} \sum_{a_j \in S} |x_{a_i} - t_{a_j}|$$

Subject To

문제 (3.4)

모든  $a_b, a_i, a_j \in S$ 에 대해서,  $t_b + t_i + t_j \leq 2$ ,  
 모든  $a_i \in S$ 에 대해서,  $t_i = 0$ ,  
 그리고 모든  $a_i, a_j \in S$ 에 대해서,  $t_i + t_j = 1$ .

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} \sum_{a_i \in I} \sum_{a_j \in I} |x_{a_i} - t_{a_j}|$$

Subject To

문제 (3.5)

모든  $a_b, a_i, a_j \in I$ 에 대해서,  $t_b + t_i + t_j \leq 2$ ,  
 모든  $a_i \in I$ 에 대해서,  $t_i = 0$ ,  
 그리고 모든  $a_i, a_j \in I$ 에 대해서,  $t_i + t_j = 1$ .

문제 (3.4)와 문제 (3.5)의 최적해는 문제 (3.3)의  
 최적해이므로, 그것은 역시 문제 (3.1)의 최적해  
 이다. 따라서, 증명이 되었다.  $\square$

**정의 3.2** 대안들의 집합  $A$ 에 우위 집합  $S$ 가 존  
 재한다면 집합  $A$ 는 가분적(Decomposable)이  
 라 불린다.

대안들의 집합  $A$ 가 가분적이라면  $A$ 는  $A = S \cup I$   
 이고  $S \cap I = \emptyset$ 인 두 개의 집합  $S$ 와  $I$ 로 분할 될 수  
 있다. 따라서,  $A$ 의 대안들 중 가장 선호되는 대  
 안을 구하려 한다면 열위 집합  $I$ 에 속하는 대안들  
 은 무시해도 되며,  $I$ 의 대안들 간의 비이행적 선호  
 관계도 무시해도 된다.

**보조 정리 3.2** 집합  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ 를 고려  
 의 대상이 되는 대안들의 집합이라 하자. 만  
 약  $S_1$ 과  $S_2$ 이 서로 다른 두 우위 집합이라  
 하면,

- (i)  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ 이고,  $S_1 \supset S_2$ 이거나 아니면  $S_1 \subset S_2$   
 이다.
- (ii)  $S_1 \cap S_2$ 와  $S_1 \cup S_2$ 는 모두 우위 집합이다.

(증명)

- (i) 어느 하나도 다른 하나의 부분 집합이 아니라  
 고 가정하자. 그러면  $S_1 - S_2 \neq \emptyset$ 이고  $S_2 - S_1 \neq \emptyset$   
 이다.  $a_i \in S_1 - S_2$ 이고  $a_j \in S_2 - S_1$ 이라 하자.  
 그러면,  $a_i \in S_1$ 이고  $a_j \notin S_1$ 이므로  $a_i P a_j$ 이다.  
 그런데,  $a_j \in S_2$ 이고  $a_i \notin S_2$ 이므로  $a_j P a_i$ 인데  
 이것은 가정에 위배된다. 또,  $S_1 \supset S_2$ 이거나  
 아니면  $S_1 \subset S_2$ 이므로  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ 이다.

- (ii) (i)에 의해 명백하다.  $\square$

보조 정리 3.2에 따라서 만약 가장 좋은 대안을  
 구하는 것이 목적이라면 모든 우위 집합들 가운데

단지 대안의 수를 가장 적게 갖는 우위 집합만을 고려의 대상으로 하면 된다.

**보조 정리 3.3**  $S$ 는 집합  $A$ 의 우위 집합으로서  $k$ 개의 대안들을 원소로 갖는다고 하면,

$$\sum_{a_i \in S} I(a_i) = \frac{1}{2} k(k-1).$$

(증명) 정의에 의해서 집합  $S$ 의 각 대안은 집합  $I=A-S$ 의 모든 각 대안보다 선호 된다. 따라서 모든  $a_i \in S$ 에 대해,

$$I(a_i) = \sum_{a_j \in A} x_{ij} = \sum_{a_j \in S} x_{ij}$$

이고, 따라서

$$\sum_{a_i \in S} I(a_i) = \sum_{a_i \in S} \sum_{a_j \in S} x_{ij} = \frac{1}{2} k(k-1)$$

이다. □

다음은 우위 집합을 구하는 방법이다.

### 방법 3.1

순서 0.

집합  $S = \{a_i \in A \mid P(a_i) = \max_{a_j \in A} P(a_j)\}$ 를 구한다.

순서 1.

$Q = \emptyset$ 이거나  $S=A$ 일 때 까지 다음을 반복한다.

$Q = \{a_k \in S \mid \text{적어도 하나의 } a_i \in S \text{에 대해 } a_i Pa_k\}$ 를 구하고

$S = S \setminus Q$ 라 한다.

순서 2.

멈춘다. 그러면  $S$ 가 우위 집합이다. □

방법 3.1은 최소 원소를 갖는 우위 집합을 찾아낸다[7].

주어진 쌍쌍 비교가 이행성을 만족하기 위한 필요 충분 조건을 우위 집합의 개념으로 나타낼 수 있다.

**정리 3.1** 집합  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 의 대안들 간의

쌍쌍 비교가 이행적이면 집합  $A$ 는  $n$ 개의 우위 집합을 갖는다.

(증명) ( $\rightarrow$ ) 집합  $A$ 의 대안들 사이에 행해진 쌍쌍 비교가 이행적이라면 집합  $A$ 의 대안들은  $i < j$ 이면  $a^{(i)} Pa^{(j)}$ 인 순위  $(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)})$ 를 갖는다. 따라서, 다음과 같은  $n$ 개의 우위 집합을 얻을 수 있다.

$$S_1 = \{a^{(1)}\}$$

$$S_2 = \{a^{(1)}, a^{(2)}\}$$

$$S_3 = \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}$$

.

.

.

$$S_n = \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots, a^{(n)}\}$$

$S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 이라 하고, 집합  $A$ 의 부분 집합으로  $S$ 에 속하지 않는 우위 집합  $T$ 가 존재한다고 가정하자. 또,  $S_m$ 을  $S_i \subset T$ 의 제약하에서  $S_m = \max S_i$ 를 만족하는  $S$ 의 원소라 하자. 그러면,  $a_k \in T - S_m$ 이고  $a_k \neq a^{(m+1)}$ 인 대안  $a^k$ 가 존재한다.  $a_k \in T$ 이고  $a^{(m+1)} \in T$ 이므로  $a_k Pa^{(m+1)}$ . 또,  $a^{(m+1)} \in S_{m+1}$ 이고  $a_k \notin S_{m+1}$ 이므로  $a^{(m+1)} Pa_k$ . 따라서, 가정에 위배되는 결과가 얻어졌으므로  $n$ 개의 우위 집합이 있다.

( $\leftarrow$ ) 집합  $A$ 의 부분 집합으로  $n$ 개의 우위 집합  $S_1, S_2, \dots, S_n$ 이 있다고 가정하자. 그러면, 보조 정리 3.2에 따라서  $i < j$ 이면  $S^{(i)} \subset S^{(j)}$ 인 순위  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(n)}$ 를 얻는다.  $S^{(i)}$ 은 공집합이 아니므로  $a^{(i)} \in S^{(i)}$ 이라 하자. 그러면, 모든  $i \neq j$ 에 대해  $S^{(i)} \not\subset S^{(j)}$ 이므로  $i=2$ 에서  $n$ 까지  $a^{(i)} \in S^{(i)} - S^{(i-1)}$ 인 대안  $a^{(i)}$ 가 존재한다. 따라서, 모든  $i, j$ 에 대해  $i < j$ 이면,  $a^{(i)} Pa^{(j)}$ 인 순위  $\{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\}$ 을 구할 수 있다. 따라서 주어진 쌍쌍 비교는 이행적이다. □

## 4. 휴리스틱 방법

이 절에서는 문제 (3.1)을 해결할 수 있는 휴리

스틱 방법이 우위 집합의 개념을 이용하여 제시되고, 이 휴리스틱 방법이 여타의 다른 휴리스틱 방법보다 발전적임을 비교 설명한다.

### 우위 집합 구축 방법 (Superior Set Construction Method)

집합  $A$ 를  $n$ 개의 대안들의 집합이라 하자.

순서 0.

$k=1$ ,  $S=\emptyset$ 라 하자.

순서 1.

만약  $k=n$ 이면 순서 3으로 가라.

그렇지 않으면, 집합  $E=\{a_i \in A \mid P(a_i)=n-k\}$ 를 구하고,

집합  $E$ 가 하나의 원소만을 갖거나 공집합이면,

$S=S \cup E$ ,  $k=k+1$ 이라 하고 순서 1로 가라,

그렇지 않으면 순서 2로 가라.

순서 2.

$a_i \in S$ 와  $a_j \in S^c$  사이의 쌍쌍 비교의 결과를 반대로 바꾸어라.

순서 3.

멈추어라. □

**정리 4.1** 우위 집합 구축 방법은 많아야  $O(n^2)$  계산 안에 멈춘다.

(증명) 순서 1은 행렬의 행의 합을 구하고, 행의 합이  $n-k$  ( $1 \leq k \leq n$ )와 같은 대안들을 찾는 것이므로, 많아야  $O(n^2)+O(n)=O(n^2)$ 의 계산 안에 이루어진다. 우위 집합을 구축하기 위하여는 기껏해야  $O(n^2)$ 의 계산이 필요하다. 그리고 많아야  $n$ 개의 우위 집합이 구축되므로 우위 집합 구축 방법은  $O(n^2)$ 의 계산 안에 끝난다. □

우위 집합 구축 방법으로 얻어진 쌍쌍 비교는 이행적이므로 순위(Ranking)를 얻을 수 있다. 여

기서는 대안이 5개일 때 의사 결정자로 부터 주어질 수 있는 모든 경우의 쌍쌍 비교를 가지고, 우위 구축 방법과 최소 배반 순위를 구하는 기존의 방법들을 각각으로 부터 얻어진 순위와 배반의 수를 기준으로 비교해 본다. 표 4.1에서 a, b, c, d, e는 5개의 대안을 나타내고, 각각의 경우에 대해서 선호 행렬과 p-connectivity 방법[8], 반복적 Kendall 방법[1], 우위집합 구축 방법에 의한 순위와 위배수가 주어져 있으며, 각각의 경우에 대한 최소 배반 순위와 최소 배반 수도 주어져 있다.

[1]에서 논의된 것처럼, p-connectivity 방법은 많은 경우 동점을 처리하지 못하고, 동점 대안들에 대한 처리 방법을 필요로 한다. 표 4.1에서 보듯이 우위 집합 구축 방법은 모든 경우 p-connectivity 방법과 반복적 Kendall 방법보다 우수하다. 5개의 대안이 있는 경우에는 우위 집합 구축 방법은 최소 배반 순위를 구하게 되는 것도 알 수 있다.

## 5. 결론 및 연구 방향

이 논문의 연구는 쌍쌍 비교에서 우위 집합의 개념을 가지고 이행적 쌍쌍 비교의 필요 충분 조건을 도출하고, 최소 배반 순위를 구하는 휴리스틱 방법을 제시하였다. 우위 집합 구축 방법은 비이행적 쌍쌍 비교나 우위 집합의 구조에 대한 좀더 많은 연구를 통하여 개선될 여지가 있으며, 우위 집합의 개념은 의사 결정자로 부터 주어지는 쌍쌍 비교의 정보가 완전하지 못하거나 대칭성을 만족하지 못할 때에도 이행적 쌍쌍 비교를 구축하는 문제에 있어서 해결의 실마리를 제공할 수도 있을 것이다. 마지막으로, 정리 3.1에 의해서 최적의 우위 집합 구축 방법이 최소 배반 순위를 제공할 수 있으므로 우위 집합의 개념을 이용한 정확한 최적 순위(Exact Optimal Ranking)를 찾는 방법에 대한 연구도 필요할 것이다.

표 4.1

	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>c</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>d</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>e</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td>a</td><td>c</td><td>b</td><td>d</td><td>e</td><td>4</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>d</td><td>c</td><td>e</td><td>2</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>d</td><td>c</td><td>e</td><td>2</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>d</td><td>c</td><td>e</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	0	1	1	b	0	0	1	1	0	c	1	0	0	0	1	d	0	0	1	0	1	e	0	1	0	0	0	ranking violations						a	c	b	d	e	4	a	b	d	c	e	2	a	b	d	c	e	2	a	b	d	c	e	2	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>c</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>d</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>e</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td colspan="6">unbreakable ties</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>e</td><td>c</td><td>d</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>e</td><td>c</td><td>d</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>e</td><td>c</td><td>d</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	1	1	0	a	0	0	1	1	1	c	0	0	0	1	0	d	0	0	0	0	0	e	1	0	1	1	0	ranking violations						unbreakable ties						a	b	e	c	d	1	a	b	e	c	d	1	a	b	e	c	d	1	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>c</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>d</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>e</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td colspan="6">unbreakable ties</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>d</td><td>e</td><td>c</td><td>4</td></tr> <tr><td>a</td><td>e</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>3</td></tr> <tr><td>a</td><td>e</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	0	0	1	b	0	0	1	1	0	c	1	0	0	1	0	d	1	0	0	0	1	e	0	1	1	0	0	ranking violations						unbreakable ties						a	b	d	e	c	4	a	e	b	c	d	3	a	e	b	c	d	3
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	0	1	1																																																																																																																																																																																																				
b	0	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																				
c	1	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																				
d	0	0	1	0	1																																																																																																																																																																																																				
e	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
a	c	b	d	e	4																																																																																																																																																																																																				
a	b	d	c	e	2																																																																																																																																																																																																				
a	b	d	c	e	2																																																																																																																																																																																																				
a	b	d	c	e	2																																																																																																																																																																																																				
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	1	1	0																																																																																																																																																																																																				
a	0	0	1	1	1																																																																																																																																																																																																				
c	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																				
d	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																				
e	1	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
unbreakable ties																																																																																																																																																																																																									
a	b	e	c	d	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	e	c	d	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	e	c	d	1																																																																																																																																																																																																				
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	0	0	1																																																																																																																																																																																																				
b	0	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																				
c	1	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																				
d	1	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																				
e	0	1	1	0	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
unbreakable ties																																																																																																																																																																																																									
a	b	d	e	c	4																																																																																																																																																																																																				
a	e	b	c	d	3																																																																																																																																																																																																				
a	e	b	c	d	3																																																																																																																																																																																																				
p-conn IK SSCM MV																																																																																																																																																																																																									
	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>c</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>d</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>e</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td>c</td><td>a</td><td>b</td><td>e</td><td>d</td><td>2</td></tr> <tr><td>c</td><td>a</td><td>e</td><td>b</td><td>d</td><td>1</td></tr> <tr><td>c</td><td>a</td><td>e</td><td>b</td><td>d</td><td>1</td></tr> <tr><td>c</td><td>a</td><td>e</td><td>b</td><td>d</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	0	1	1	b	0	0	1	1	0	c	1	0	0	1	1	d	0	0	0	0	0	e	0	1	0	1	0	ranking violations						c	a	b	e	d	2	c	a	e	b	d	1	c	a	e	b	d	1	c	a	e	b	d	1	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>c</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>d</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>e</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>0</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>0</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>0</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	1	1	1	b	0	0	1	1	1	c	0	0	0	1	1	d	0	0	0	0	1	e	0	0	0	0	0	ranking violations						a	b	c	d	e	0	a	b	c	d	e	0	a	b	c	d	e	0	a	b	c	d	e	0	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>c</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>d</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>e</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td colspan="6">unbreakable ties</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	1	1	1	b	0	0	1	1	1	c	0	0	0	1	0	d	0	0	0	0	1	e	0	0	1	0	0	ranking violations						unbreakable ties						a	b	c	d	e	1	a	b	c	d	e	1	a	b	c	d	e	1
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	0	1	1																																																																																																																																																																																																				
b	0	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																				
c	1	0	0	1	1																																																																																																																																																																																																				
d	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																				
e	0	1	0	1	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
c	a	b	e	d	2																																																																																																																																																																																																				
c	a	e	b	d	1																																																																																																																																																																																																				
c	a	e	b	d	1																																																																																																																																																																																																				
c	a	e	b	d	1																																																																																																																																																																																																				
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																				
b	0	0	1	1	1																																																																																																																																																																																																				
c	0	0	0	1	1																																																																																																																																																																																																				
d	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																				
e	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
a	b	c	d	e	0																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	0																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	0																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	0																																																																																																																																																																																																				
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																				
b	0	0	1	1	1																																																																																																																																																																																																				
c	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																				
d	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																				
e	0	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
unbreakable ties																																																																																																																																																																																																									
a	b	c	d	e	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	1																																																																																																																																																																																																				
p-conn IK SSCM MV																																																																																																																																																																																																									
	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>c</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>d</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>e</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td colspan="6">unbreakable ties</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>d</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>d</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>d</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	1	1	1	b	0	0	1	0	0	c	0	0	0	1	1	d	0	0	0	0	0	e	0	1	0	1	0	ranking violations						unbreakable ties						a	b	c	e	d	1	a	b	c	e	d	1	a	b	c	e	d	1	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>c</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>d</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>e</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>d</td><td>2</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>d</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	1	1	1	b	0	0	1	1	0	c	0	0	0	1	1	d	0	0	0	0	1	e	0	1	0	0	0	ranking violations						a	b	c	e	d	2	a	b	c	e	d	1	a	b	c	d	e	1	a	b	c	d	e	1	<table border="0"> <thead> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>b</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>c</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>d</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>e</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td colspan="6">ranking violations</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>e</td><td>c</td><td>d</td><td>3</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>d</td><td>2</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>1</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		a	b	c	d	e	a	0	1	1	1	0	b	0	0	1	1	1	c	0	0	0	1	1	d	0	0	0	0	1	e	1	0	0	0	0	ranking violations						a	b	e	c	d	3	a	b	c	e	d	2	a	b	c	d	e	1	a	b	c	d	e	1
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																				
b	0	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																				
c	0	0	0	1	1																																																																																																																																																																																																				
d	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																				
e	0	1	0	1	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
unbreakable ties																																																																																																																																																																																																									
a	b	c	e	d	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	e	d	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	e	d	1																																																																																																																																																																																																				
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	1	1	1																																																																																																																																																																																																				
b	0	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																				
c	0	0	0	1	1																																																																																																																																																																																																				
d	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																				
e	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
a	b	c	e	d	2																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	e	d	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	1																																																																																																																																																																																																				
	a	b	c	d	e																																																																																																																																																																																																				
a	0	1	1	1	0																																																																																																																																																																																																				
b	0	0	1	1	1																																																																																																																																																																																																				
c	0	0	0	1	1																																																																																																																																																																																																				
d	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																				
e	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																				
ranking violations																																																																																																																																																																																																									
a	b	e	c	d	3																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	e	d	2																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	1																																																																																																																																																																																																				
a	b	c	d	e	1																																																																																																																																																																																																				
p-conn IK SSCM MV																																																																																																																																																																																																									

p-conn [P-connectivity 방법] IK [반복적 Kendall 방법] SSCM [우위 집합 구축 방법]  
 MV [최소 배반 순위] ranking [순위] violations [배반 수]

### 참고문헌

1. Ali, I., W. D. Cook and M. Kress, "On the Minimum Violations Ranking of Tournament", *Management Science*, Vol. 32, No. 6, pp. 660-672, 1986.
2. Arrow, K. J., *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York, 1951.
3. Bazilai, J., W. D. Cook and M. Kress, "A Generalized Network Formulation of the Pairwise Comparison Consensus Ranking Model", *Management Science*, Vol. 32, No. 8, pp. 1007-1014, 1986.

4. Bowman, V. J., "Permutation Polyhedrons", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol 22, 1972.
5. Bowman, V. J. and C. S. Colantoni, "Majority Rule under Transitivity Constraints", *Management Science*, Vol. 19, No. 9, pp. 1029-1041, 1973.
6. Cook, W. D. and L. M. Seiford, "Priority Ranking and Consensus Formation". *Management Science*, Vol. 24, No. 16, pp. 1721-1732, 1978.
7. Dongwoo, Kim, *A Study on the Intransitive Features of Binary Comparisons in a Ranking Problem*. Master Thesis, KAIST, 1989.
8. Goddard, S. T., "Ranking Tournaments and Group Decision Making". *Management Science*, Vol. 29, No. 12, pp. 1348-1392, 1983.
9. Ibaraki, T., *Enumerative Approches to Combinatorial Optimization*, Annals of Operations Research, Vol. 10, 1987.
10. Kendall, M., *Rank Correlation Methods*, 3rd ed., Harfner, New York, 1962.