韓國經營科學會誌
第 14 券 第 1 號
1989年 6月

－研究論文－

移動 設備의 最適 直線 經路†
(Optimal Straight Line Path of a Moving Facility)

Hanif D. Sherali*
金 成 寅**
朴 興 鮮**

ABSTRACT

In this paper we consider the problem of finding an optimal straight line path of a moving facility which interacts with a set of existing facilities fixed within a given rectangular area. We present a simple algorithm for rectilinear metric which greatly improves the pervious method and also propose algorithms for Euclidean and squared Euclidean distances.

I. 序論

서비스 設備는 어느 한 위치에 固定되어 서비스를 제공하는 설비와, 移動하면서 서비스를 제공하는 설비로 나눌 수 있다. 여기에서 서비스는 통상적인 개념의 서비스 뿐만 아니라 사고 예방, 전쟁발발 억제 등과 같은 역할도 포함한다. 이러한 서비스의 대상인 고객은 일정한 지역내에 여러 점으로 분포되어 고정되어 있다고 가정한다.

고정설비에 대한 最適 位置의 결정 문제에 관한 연구 결과는 많은 문헌에서 찾아 볼 수 있으며, 이들 연구는 서비스를 제공하는 설비와 고객들 간의 距離를 最小化하는 위치 결정을 다루고 있다. 여기에서 거리는 直角距離 (rectilinear distance), 直線距離 (Euclidean distance), 또는 自乘距離 (squared Euclidean distance) 등으로 나타난다.

그러나 최적 위치가 한번 결정되면 그 위치에 건축 또는 설치되어 이동이 불가능하게 되는 고정설비와는 반대로, 우리는 움직이면서 고객을 서비스하는 이동설비를 흔히 볼 수 있다. 이러한 이동설비는 일정한 지역내에 분포되어 있는 고객을 서비스하기 위하여 直線 혹은 曲線 經路를 따라 이동하면서, 고객의 서비스 요구가 있을 때 이 고객을 방문하여 서비스를 제공한다. 따라서 고객이 서비스를 요구할 때 최단시간내에 이에 응할 수

* Department of Industrial Engineering and Operations Research, Virginia Polytechnic Institute and State University
** 高麗大學校 工科大學 産業工學科
† 이 논문은 1988년도 文教部 지원 學術振興財團의 자유공모과제 학술 연구조성비에 의하여 연구되었음.

있는 경로를 결정하는 문제를 생각하게 된다. 이러한 예로는 사고 가능 지역에서의 사고 발생의 예방 혹은 사고 발생시의 처리를 위한 순찰차(patrol car)의 경로 등과 같은 문제를 들 수 있다.

일정한 경로를 따라 움직이고 있는 이동설비가 서비스를 요구하는 고객을 방문할 때에는 이동설비와 고객간의 거리 또는 이 거리에 따른 비용 등이 이동설비와 고객간의 상호관련 尺度(interactive measure)로 사용되어질 수 있으며, 이때 이동설비와 고객간의 거리는, 고정설비의 최적 위치 결정에서와 같이 직각거리, 직선거리, 자승거리 등으로 나타내어질 수 있다.

이러한 이동설비의 최적 경로 결정에 관하여는 직각거리를 사용하여, Euclidean 평면위에 주어진 직사각형내에서 이동설비와 고객간의 平均距離를 최소화하는 직선경로를 결정하는 연구[1]가 이루어진 바 있다. 이 연구에서 제시한 해법은 직선경로의 출발점과 도착점이 이 직사각형의 변에서 위치할 수 있는 각각의 경우에 대하여 부분 최적해(local optimum)를 구한 후, 이들 부분 최적해를 비교하여 전체 최적해(global optimum)를 구하는 방법이었다.

본 연구에서는 두가지 면에서 이 연구를 발전시킨다. 첫째, 기존의 해법이 갖는 많은 계산량을 대폭 감소시킬 수 있는 改善된 해법절차를 제시한다. 둘째, 이동설비와 고객간의 거리로 기존 연구에서 다루었던 직각거리 이외에 直線距離 및 自乘距離에 대하여도 효율적으로 최적해를 구할 수 있는 해법을 제시한다.

II. 모델

고객 m명의 位置를 각각 좌표 $F_1=(a_1', b_1')$, $F_2=(a_2', b_2')$, …, $F_m=(a_m', b_m')$으로 표시한다. 이동설비는 일정한 經路 $y(x)$를 따라 움직이면서 이들에게 서비스를 제공한다. 이동설비의 이동범위는 이 설비가 서비스를 제공하는 모든 고객을 포함하는, x축과 y축에 평행한 直四角形

$$\{(x,y) \mid x_{min} \leq x \leq x_{max},\ y_{min} \leq y \leq y_{max}\}$$

내로 제한하기로 하며, 이동설비의 경로는 이 범위내에서 直線 $y(x)=\alpha x+\beta$로 가정한다. 여기서 α, β는 상수이며, $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ 이다. 이동설비의 이동범위인 직사각형의 변 위에 출발점과 도착점이 있다고 가정하면, 이들 두 점은 α, β에 의하여 결정되므로, 이동설비가 직선경로를 따라 이동한 距離는 이들의 함수, $\ell(\alpha, \beta)$로 표시될 수 있다. 이때 이동설비의 속도를 단위시간당 단위거리라고 하면 이동 時間 역시 $\ell(\alpha, \beta)$로 표시된다.

이동설비는 직선경로를 따라 움직이므로 이동설비와 고객간의 거리는 설비의 이동에 따라 변하게 된다. 시간 t에서의 이동설비의 위치를 $M_t=(x_t, y_t)$로 표시하고 고객 i (i=1, …, m)와 이동설비간의 거리를 $d(M_t, F_i)$로 표시하면 이동설비와 m명의 고객간의, 이동하는 동안의 總 平均距離 $f(\alpha,\beta)$는 다음과 같이 표시된다.

$$f(\alpha, \beta)=\frac{1}{\ell(\alpha, \beta)} \sum_{i=1}^{m} w_i \int_{t=0}^{\ell(\alpha,\beta)} d(M_t, F_i)\, dt$$

여기에서 w_i (i=1, …, m)는 고객 i가 차지하는 상대적인 비중을 나타낸다. 그러므로 이동설비의 최적 직선경로를 결정하는 문제는 다음과 같이 數式化될 수 있다.

$$\underset{\alpha,\ \beta}{\text{Minimize}}\ f(\alpha, \beta)=\frac{1}{\ell(\alpha, \beta)} \sum_{i=1}^{m} w_i \int_{t=0}^{\ell(\alpha,\beta)} d(M_t, F_i)\, dt$$

$$\text{subject to}\quad y_t=\alpha x_t+\beta$$
$$x_{min} \leq x_t \leq x_{max}$$
$$y_{min} \leq y_t \leq y_{max}$$

두 점 M_t와 F_i간의 거리를 나타내는 함수 $d(M_t, F_i)$는 일반적으로 다음과 같은 ℓ_p−거리로 표시된다[4].

$$d(M_t, F_i) = (|x_t - a_i|^p + |y_t - b_i|^p)^{1/p}$$

예를 들면 p=1인 ℓ_1 - 거리(직각거리)는 도심의 도로망과 같이 격자형의 도로를 따라 이동하는 경우에 사용되어지는 거리이고, p=2인 ℓ_2 - 거리(직선거리)는 주어진 두 점을 직선으로 연결하였을 때의 거리를 나타낸다. 이밖에 ℓ_2^2 - 거리(자승거리)는 이동설비와 고객간의 상호관련 척도가 이들간의 직선거리의 자승인 경우를 나타낸다.

III. 解法

김성인, 김선욱[1]은 위의 모델에서 直角距離를 다루었고, 이에 대한 解法을 제시하기 위하여 이동설비의 직선경로를 그 출발점 및 도착점의 위치에 따라 그림 1의 (a)~(f)와 같이 여섯가지 형태로 분류하였다. 이 중 (e)[(f)]의 형태를 가질 경우에 최적 직선경로는 고객들의 y좌표(x좌표)의 加重中央値를 y절편(x절편)으로 하는 水平線(수직선)임을 증명하였다. (a)~(d)의 형태에 대하여는 각각의 경우에 이동경로의 양 끝점의 좌표와 고객 i의 좌표와의 위치관계에 따라 이를 다시 세가지의 형태로 나누어 각 형태에 대한

$$\int_{t=0}^{\ell(\alpha,\beta)} d(M_t, F_i)dt \, / \, \ell(\alpha, \beta)$$

를 구하였다. 일반적으로 m명의 고객에 대한 이들의 가능한 總 組合數는 (m+1)(m+2)/2가 되며, 주어진 (α, β)의 범위내에서 총 조합수 만큼의 해를 구한 다음 이들을 비교하여 하나의 부분 최적해를 구한다. 이와 같은 방법으로 나머지 경우에 대한 부분 최적해를 구한 후, 이들 부분 최적해를 비교하여 비로소 전체 최적해가 구해진다. 따라서 하나의 부분 최적해를 구하기 위하여는 조합수 (m+1)(m+2)/2 만큼의 계산이 필요하며 또한 각각의 경우에 대한 (α, β)의 범위 역시 구하여야 하므로 많은 계산량이 요구되어진다.

이제 새로운 해법을 개발하기 위하여 고객들의 x좌표 $\{a_i'\}$ 및 y좌표 $\{b_i'\}$을 각각 오름순으로 再排列하여 다음과 같이 그 순서대로 표시한다.

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m,$$
$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_m$$

이동설비의 서비스 대상이 되는 고객의 위치는 이동범위내에서 상대적인 좌표로 표시가능하므로 편의상 $x_{min} = a_0 = 0$, $y_{min} = b_0 = 0$으로 놓으며, $x_{max} = a_{m+1}$, $y_{max} = b_{m+1}$로 놓기로 한다.

본 논문에서는 경우 (a)에 대한 최적해를 구하는 해법을 제시한다. (b)~(d)의 경우는 원점을 중심으로, xy-평면을 각각 90, 180, 270도 回轉시키면 (a)와 같은 형태가 된다. 따라서 (a)의 형태를 갖는 경우에 대한 최적해를 얻는 해법절차를 이용하여 나머지 형태에 대한 최적해도 얻을 수 있으며, 이들 네가지 경우와 (e), (f)의 경우에 대한 각각의 최적해를 비교하여 전체 최적해를 구할 수 있다.

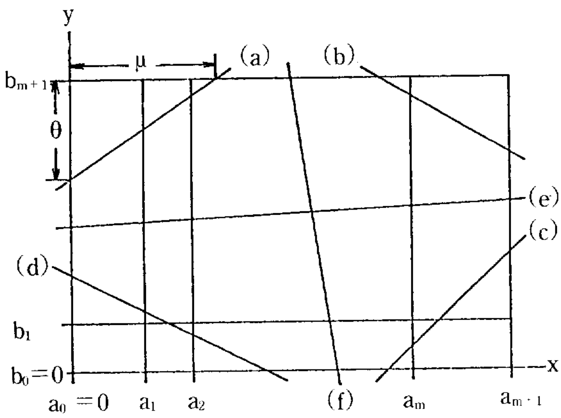

그림 1. 이동 범위내에서의 가능한 直線經路의 形態.

이제 (a)의 경우에 대한 최적해를 구하기 위한 解法節次를 설명한다. (a_0, b_{m+1})로부터, 이동설비의 경로인 직선과 y축과의 교점까지의 거리를 $\theta(b_0 \leq \theta \leq b_{m+1})$로, 이동범위인 직사각형의 윗변과의 교점까지의 거리를 $\mu(a_0 \leq \mu \leq a_{m+1})$로 표시

하면(그림 1 참조), $\alpha=\theta/\mu$, $\beta=b_{m+1}-\theta$ 가 된다. 따라서 (a)의 경우에 대한 이동설비의 최적 직선 경로를 결정하는 문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underset{\mu,\ \theta}{\text{Minimize}}\ f(\mu,\theta)=\frac{1}{\ell(\mu,\theta)}\sum_{i=0}^{m+1} w_i \int_{t=0}^{\ell(\mu,\theta)} d(M_t, F_i)\ dt$$

$$\begin{aligned}\text{subject to}\quad & y_t=(\theta/\mu)\,x_t+(b_{m+1}-\theta)\\ & a_0\leq x_t,\ \mu\leq a_{m+1}\\ & b_0\leq y_t,\ \theta\leq b_{m+1}\end{aligned}$$

이때 이동설비의 이동거리 $\ell(\mu,\theta)$와 dt는 각각 다음과 같다.

$$\ell(\mu,\theta)=\sqrt{\mu^2+\theta^2}$$
$$dt=\sqrt{dx_t^2+dy_t^2}$$

1) 直角距離

직각거리의 경우 목적함수는 다음과 같이 된다.

$$f(\mu,\theta)=\frac{1}{\ell(\mu,\theta)}\sum_{i=0}^{m+1} w_i \int_{t=0}^{\ell(\mu,\theta)}(\,|\,x_t-a_i\,|+|\,y_t-b_i\,|\,)dt$$

이 함수는 한 개의 변수만을 갖는 함수인 $g(\mu)$와 $h(\theta)$로 分離可能(separable)하므로 이 문제는 다음과 같이 두 문제로 분할될 수 있다.

$$\underset{\mu,\ \theta}{\text{Minimize}}\ f(\mu,\theta)=\underset{\mu}{\text{minimize}}\ g(\mu)+\underset{\theta}{\text{minimize}}\ h(\theta)$$

여기에서 $g(\mu)$는

$$g(\mu)=\frac{1}{\ell(\mu,\theta)}\int_{t=0}^{\ell(\mu,\theta)}\sum_{i=0}^{m+1} w_i(\,|\,x_t-a_i\,|\,)dt$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^{\mu}\sum_{i=0}^{m+1} w_i(\,|\,x_t-a_i\,|\,)dx_t$$

이며, 같은 방법으로 $h(\theta)$는

$$h(\theta)=\frac{1}{\theta}\int_{b_{m+1}-\theta}^{b_{m+1}}\sum_{i=0}^{m+1} w_i(\,|\,y_t-b_i\,|\,)dy_t$$

이다. 따라서 $f(\mu,\theta)$를 최소화하는 최적해(μ^*, θ^*)는 $g(\mu)$ 및 $h(\theta)$를 최소화하는 μ^*, θ^* 를 각각 구함으로써 얻어진다. 우선 μ^* 가 0이 아님을 가정하면, $a_q\leq\mu\leq a_{q+1}$, q=0, 1, …, m 일때 $g(\mu)$는 다음과 같다.

$$g(\mu)=\frac{\mu}{2}\Big(\sum_{i=0}^{q} w_i-\sum_{i=q+1}^{m+1} w_i\Big)+\frac{1}{\mu}\sum_{i=0}^{q} w_i a_i^2-\Big(\sum_{i=0}^{q} w_i a_i-\sum_{i=q+1}^{m+1} w_i a_i\Big)$$

이 함수의 μ에 대한 일차도함수 $g'(\mu)$ 및 이차도함수 $g''(\mu)$는 각각

$$g'(\mu)=-\frac{1}{\mu^2}\sum_{i=0}^{q} w_i a_i^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{q} w_i-\sum_{i=q+1}^{m+1} w_i\Big)$$

$$g''(\mu)=\frac{2}{\mu^3}\sum_{i=0}^{q} w_i a_i^2$$

이며, $\mu>0$, $w_i>0$, $a_i>0$ (i=1, …, m)으로부터 $g''(\mu)>0$ 이므로 $g(\mu)$는 완전 오목함수(strictly convex function)이고, 따라서 이를 최소로 하는 유일한 최적해 μ^* 가 존재함을 알 수 있다.

이제 $g'(\mu)$의 두번째 항을 D/2로, 즉

$$D=\sum_{i=0}^{q} w_i-\sum_{i=q+1}^{m+1} w_i$$

으로 놓으면, 필요충분조건 $g'(I)=0$ 으로부터

$$I = \left(\sum_{i=0}^{q} w_i a_i^2 / D \right)^{1/2} = \sqrt{2N/D}$$

이고, 여기서 $N = \sum_{i=0}^{q} w_i a_i^2$ 이다.

$D \leqq 0$ 이면, $g'(\mu)$의 첫번째 항은 항상 양수이므로 $g'(\mu) < 0$ 이다. 따라서 이 경우에 $g(\mu)$는 구간 $[a_q, a_{q+1}]$에서 감소함수이므로 최적해 μ^* 는 이 구간에 존재하지 않게 되며, 이 경우 다음 구간 $[a_{q+1}, a_{q+2}]$에서 μ^* 의 존재 여부를 다시 살펴 보아야 한다.

$D > 0$ 이면 $a_q \leqq I \leqq a_{q+1}$ 일 때에 $\mu^* = I$ 가 되며, $I < a_q$ 이거나 $I > a_{q+1}$ 의 경우에는 각각 구간 $[a_{q-1}, a_q]$ 및 $[a_{q+1}, a_{q+2}]$ 에서 μ^* 의 존재 여부를 살펴 보아야 한다.

이러한 사실로부터 구간 $[a_0, a_1]$ 에서부터 시작하여 順次的으로 각 구간에서 μ^* 의 존재여부를 확인함으로써 $g(\mu)$를 최소로 하는 해를 구할 수 있다. 특히 구간 $[a_0, a_1]$ 에서 $D > 0$ 이면 $\mu^* = 0$ 이 되며, 이는 최적 직선경로가 수직선(vertical line)임을 나타낸다.

$h(\theta)$는 $g(\mu)$와 같은 형태의 수식으로 표현되므로 $g(\mu)$의 최적해 μ^* 를 구하는 방법을 적용하여 $h(\theta)$의 최적해 θ^* 또한 결정할 수 있다. 이제 $b_{q-1} \leqq b_{m+1} - \theta \leqq b_q$, $q = 1, \cdots, m+1$ 이라고 가정하면 $h(\theta)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} h(\theta) = & \frac{\theta}{2} \left(\sum_{i=q}^{m+1} w_i - \sum_{i=0}^{q-1} w_i \right) \\ & + \frac{1}{\theta} \sum_{i=q}^{m+1} w_i (b_{m+1} - b_i)^2 \\ & + \sum_{i=0}^{q-1} w_i (b_{m+1} - b_i) - \sum_{i=q}^{m+1} w_i (b_{m+1} - b_i) \end{aligned}$$

이 함수의 이차도함수 $h''(\theta) > 0$ 으로부터 $h(\theta)$는 완전 오목함수이므로 $h(\theta)$를 최소로 하는 유일한 최적해 θ^* 가 존재한다. 특히 구간 $[b_m, b_{m+1}]$에서 $D > 0$ 이면 $\theta^* = 0$ 이며, 이는 최적 직선경로가 수평선(horizontal line)임을 나타낸다.

이상을 종합하면 $g(\mu)$ 및 $h(\theta)$를 최소화하는 최적해 μ^*, θ^* 를 결정하기 위한 해법절차는 다음과 같다.

i) μ^* 의 결정

단계 1. $q = 0$, $N = 0$ 으로 놓고, $D = \sum_{i=0}^{q} w_i - \sum_{i=q+1}^{m+1} w_i$ 를 계산한다. 만약 $D > 0$ 이면 $\mu^* = 0$ 으로 놓고 끝낸다. $D \leqq 0$ 이면 단계 2 로 간다.

단계 2. q 를 $q+1$ 로 놓는다. 만약 $q = m+1$ 이면 $\mu^* = a_{m+1}$ 로 놓고 끝낸다. 그렇지 않으면 D 를 $D + 2w_q$ 로, N 을 $N + w_q a_q^2$ 으로 놓고 단계 3 으로 간다.

단계 3. $D > 0$ 이면 $I = \sqrt{2N/D}$ 를 계산하여 $a_q \leqq I \leqq a_{q+1}$ 이면 $\mu^* = I$ 로 놓고 끝낸다. 그렇지 않으면 단계 2 로 간다.

ii) θ^* 의 결정

단계 1. $q = m+1$, $N = 0$ 으로 놓고, $D = \sum_{i=q}^{m+1} w_i - \sum_{i=0}^{q-1} w_i$ 를 계산한다. 만약 $D > 0$ 이면 $\theta^* = 0$ 으로 놓고 끝낸다. $D \leqq 0$ 이면 단계 2 로 간다.

단계 2. q 를 $q-1$ 로 놓는다. 만약 $q = 0$ 이면 $\theta^* = b_{m+1}$ 로 놓고 끝낸다. 그렇지 않으면 D 를 $D + 2w_q$ 로, N 을 $N + w_q (b_{m+1} - b_q)^2$ 으로 놓고 단계 3 으로 간다.

단계 3. $D > 0$ 이면 $I = \sqrt{2N/D}$ 를 계산하여 $b_{m+1} - b_q \leqq I \leqq b_{m+1} - b_{q-1}$ 이면 $\theta^* = I$ 로 놓고 끝낸다. 그렇지 않으면 단계 2로 간다.

2) 自乘距離

자승거리에 대한 목적함수는 다음과 같이 된다.

$$f(\mu, \theta) = \frac{1}{\ell(\mu, \theta)} \sum_{i=0}^{m+1} w_i \int_{t=0}^{\ell(\mu, \theta)} \{ (x_t - a_i)^2 + (y_t - b_i)^2 \} \, dt$$

이 경우 역시 $f(\mu, \theta)$는 $g(\mu)$와 $h(\theta)$로 분리가 능하며, 이때 $g(\mu)$ 및 $h(\theta)$는 다음과 같다.

$$g(\mu) = \mu^2 \sum_{i=0}^{m+1} \frac{w_i}{3} - \mu \sum_{i=0}^{m+1} w_i a_i + \sum_{i=0}^{m+1} w_i a_i^2$$

$$h(\theta)=\theta^2 \sum_{i=0}^{m+1} \frac{w_i}{3} - \theta \sum_{i=0}^{m+1} w_i (b_{m+1} - b_i)$$

$$+ \sum_{i=0}^{m+1} w_i (b_{m+1} - b_i)^2$$

$g(\mu)$ 및 $h(\theta)$는 모두 완전 오목함수이므로 유일한 최적해 μ^* 및 θ^* 가 존재하며 일차도함수 $g'(\mu^0)=0$ 으로부터

$$\mu^0 = (3 \sum_{i=0}^{m+1} w_i a_i) / (2 \sum_{i=0}^{m+1} w_i)$$

이다. 그런데 $\mu^0 > 0$ 이므로 $\mu^0 \leq a_{m+1}$ 이면 $g(\mu)$를 최소로 하는 최적해 $\mu^* = \mu^0$ 이다.

$h(\theta)$를 최소로 하는 최적해 θ^* 역시 같은 방법으로 구할 수 있으며 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\mu^* = (3 \sum_{i=0}^{m+1} w_i a_i) / (2 \sum_{i=0}^{m+1} w_i), \quad 0 \leq \mu^0 \leq a_{m+1}$$

$$\theta^* = (3 \sum_{i=0}^{m+1} w_i (b_{m+1} - b_i)) / (2 \sum_{i=0}^{m+1} w_i), \quad 0 \leq \theta^0 \leq b_{m+1}$$

$\mu^0 > a_{m+1}$ $(\theta^0 > b_{m+1})$일 때 직선경로는 그림 1 의 (e)[(f)]의 형태가 되며, 이때 최적 직선경로는 고객들의 y 좌표(x 좌표)값의 가중평균치를 y 절편(x 절편)으로 하는 수평선(수직선)이 된다[2].

3) 直線距離

목적함수는 다음과 같이 되며, 앞의 두 경우와는 달리 직선거리의 경우 $f(\mu, \theta)$는 μ 와 θ 의 함수로 분리불가능(nonseparable)하다.

$$f(\mu, \theta) = \frac{1}{\ell(\mu, \theta)} \sum_{i=0}^{m+1} w_i \int_{t=0}^{\ell(\mu,\theta)} \{(x_t - a_i')^2 + (y_t - b_i')^2\}^{1/2} dt$$

여기에서

$$A = 1+(\theta/\mu)^2$$

$$B_i = (2\theta/\mu)(b_{m+1} - b_i' - \theta) - 2a_i'$$

$$C_i = a_i'^2 + (b_{m+1} - b_i' - \theta)^2$$

으로 놓고 이를 정리하면

$$f(\mu, \theta) = \frac{1}{\mu^0} \int_0^{\mu} \sum_{i=0}^{m+1} w_i (Ax_t^2 + B_i x_t + C_i)^{1/2} dx_t$$

이다. 이 식을 적분하여 구한 $f(\mu, \theta)$는 다음과 같다.

$$f(\mu, \theta) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{w_i}{4A} [(2A\mu + B_i)\sqrt{A\mu^2 + B_i \mu + C_i} - B_i \sqrt{C_i}]$$

$$+ \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{w_i (4AC_i - B_i^2)}{8 A\sqrt{A}} \cdot \ln \left| \frac{2\sqrt{A(A\mu^2 + B_i \mu + C_i)} + 2A\mu + B_i}{2\sqrt{AC_i} + B_i} \right|$$

$f(\mu, \theta)$는 μ, θ 에 대하여 오목함수가 아니므로 이 함수를 최소로 하는 최적해 (μ^*, θ^*)는 최적경사감소법(steepest decent method)과 같은 일반적인 비선형함수에 대한 다차원 탐색법[3]을 이용하여 구할 수 있다. 그러나 이러한 방법으로 구하여진 해가 구간

$$0 \leq \mu \leq a_{m+1}, \quad 0 \leq \theta \leq b_{m+1}$$

에서의 전체 최적해(global optimum)임을 보장할 수는 없으므로, 각기 다른 여러가지의 초기해(initial solution)를 이용하여 여러번 탐색하므로써 전체 최적해에 대한 근사해를 구할 수 있다.

그림 1의 경우 (e)에 대하여는 직선경로와 직사각형의 좌변과의 교점을 u로, 우변과의 교점을 v $(u \leq v)$로 놓으면

$$A = 1+\left(\frac{v-u}{a_{m+1}}\right)^2$$

$$B_i = [2(v-u)/a_{m+1}](u - b_i') - 2a_i'$$

$$C_i = a_i'^2 + (u - b_i')^2$$

이고, 목적함수 f(u, v)는 식 f(μ, θ)의 μ 대신에 a_{m+1}을 대입하여 얻을 수 있으므로 이 함수에 대한 최적해 (u^*, v^*) 역시 위와 같은 방법으로 구할 수 있으며, 경우 (f)에 대하여는 이를 90도 회전시켜서 구할 수 있다.

例題.

기존 논문[1]에서의 예제와 같은 다음의 네 문제를 풀어본다. 이동범위는 $x_{min}=0$, $x_{max}=50$, $y_{min}=0$, $y_{max}=40$ 이며, 4명의 고객에 대한 비중은 같게 하였다.

그림 2에 고객의 위치가 ■, ▲, ◆, ✱로 표시되어 있는 예제를 각각 (1)~(4)로 하자. 이들 예제에 대한 고객의 좌표와 직각거리, 직선거리, 자승거리 척도에 따른 최적해 (μ^*, θ^*) 및 목적함수값이 표 1에 종합되어 있다.

예제 (1), (2), (4)의 경우 최적 직선경로는 세 가지 거리 척도 모두에 대하여 같은 형태를 갖으나, (3)의 경우 직각거리 척도에 대하여는 (e)의 형태를, 직선거리 및 자승거리에 대하여는 (f)의 형태를 갖는다. 그림 2 에서 빗금친 부분은 고객의 x 좌표(y 좌표)의 가중중앙치를 나타내는 범위로서 빗금친 직사각형내의 수직선(수평선)은 어느 것이나 직각거리 척도에 대한 최적 직선경로가 되는, 다수의 최적 직선경로를 갖는 경우를 나타낸다.

표 1. 고객의 좌표와 거리 척도에 따른 최적해

예 제	고객 i 의 좌표
(1)	$F_1=(5,20)$, $F_2=(10,35)$, $F_3=(15,30)$, $F_4=(20,39)$
(2)	$F_1=(20,20)$, $F_2=(24,10)$, $F_3=(27,15)$, $F_4=(30,30)$
(3)	$F_1=(25,20)$, $F_2=(15,25)$, $F_3=(35,23)$, $F_4=(41,27)$
(4)	$F_1=(25,35)$, $F_2=(30,30)$, $F_3=(40,33)$, $F_4=(45,15)$

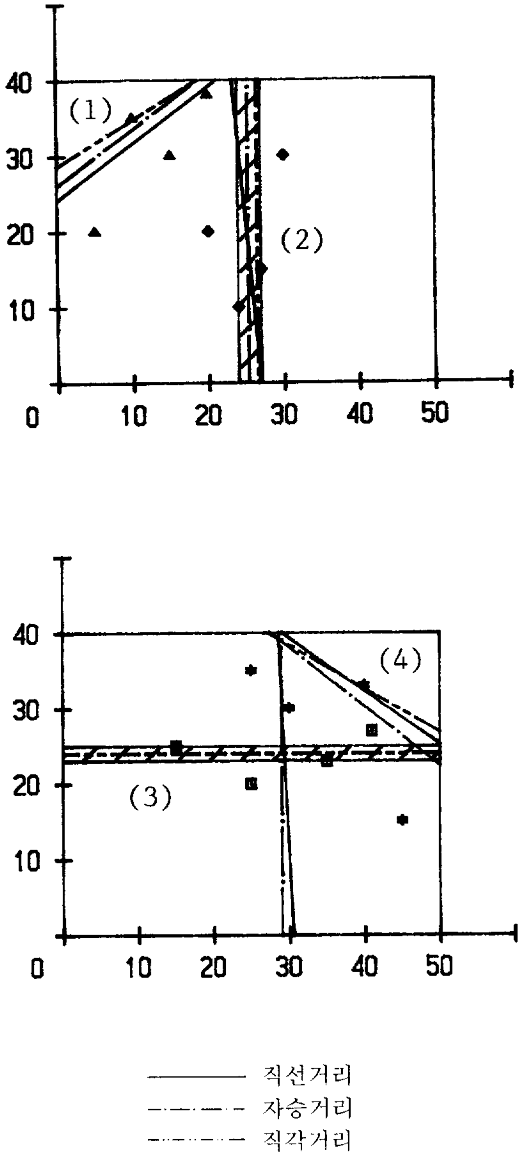

그림 2. 고객의 위치와 거리 척도에 따른 최적 직선경로.

예제	직각거리		직선거리		자승거리	
	(μ^*, θ^*)	$f(\mu^*, \theta^*)$	(μ^*, θ^*)	$f(\mu^*, \theta^*)$	(μ^*, θ^*)	$f(\mu^*, \theta^*)$
(1)	(18.7, 11.4)	53.13	(21.2, 15.4)	40.06	(18.8, 13.9)	553.56
(2)	(24.0, ∞)[1)]	58.63	(23.0, 26.7)	49.03	(25.3, ∞)	813.08
(3)	(∞, 23.0)[2)]	68.12	(28.6, 30.5)	59.14	(29.0, ∞)	1008.33
(4)	(13.2, 22.9)	65.21	(14.8, 21.0)	50.78	(17.6, 22.5)	859.81

[1)] $24.0 \leqq \mu^* \leqq 27.0$

[2)] $23.0 \leqq \theta^* \leqq 25.0$

Ⅳ. 結論

본 논문에서는 직사각형으로 제한된 xy-평면상에 위치한 고객에 대하여 이동하면서 서비스를 제공하는 설비의 最適 直線經路를 구하는 해법을 제시하였다. 이동설비와 고객간의 상호관련 척도로는 이들간의 평균거리를 사용하였으며, 거리 척도로는 직각거리, 직선거리, 자승거리를 사용하였다.

直角距離와 自乘距離의 경우에 기존 연구의 해법절차보다 계산량을 대폭 감소시킬 수 있는 새로운 해법절차를 개발하였으며, 直線距離의 경우 전체 최적해임을 보장할 수는 없으나 이에 근사한 해를 발견할 수 있는 방법을 제시하였다.

일반적으로 이동설비의 경로를 直線으로 制限함은 실제 문제에의 적용에 많은 제약을 준다. 그러나 이러한 최적 직선경로는 직선이 아닌 최적 경로에 대한 하나의 참고자료로서 의미가 있을 것이다. 이러한 제약을 완화시켜서 직선이 아닌 최적 이동경로를 결정하는 것은 앞으로의 연구 과제가 될 것이다.

參考文獻

1. 金成寅, 金善旭, "移動設備의 最適經路," 한국 OR 학회지, 제 6 권, 제 1 호, 1981, pp. 5~13.
2. 全炳昶, "移動設備의 自乘距離에서의 最適 直線經路에 관한 연구," 석사학위 논문, 高麗大學校, 1982.
3. Bazaraa, M. S., and Shetty, C. M., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithm*, John Wiely and Sons, Inc., 1979.
4. Francis, R. L., and White, J. A., *Facility Layout and Location*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.