
 論 文

大韓造船學會誌
 第26卷 第1號 1989年 3月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 26, No. 1, March 1989

준타원형 방정식에 의한 선미에서의 3차원 점성유동의 수치계산

강 신 형*, 오 건 제**

 Numerical Calculations of Three-Dimensional Viscous Flows over a Stern
 by the Semi-Elliptic Equations

by

Shin-Hyoung Kang* and Keon-Je Oh**

요 약

자유표면을 고려하지 않은 경우 선체주위의 3차원 점성유동을 수치해석하는 전산프로그램을 작성하였다. 복잡한 선체를 합리적으로 처리할 수 있는 body-fitted 좌표계를 사용하고, 난류모델은 $k-\epsilon$ 모델을 채택하였다. Reynolds 방정식의 준 3차원 형태를 수치해석하도록 하였다. 작성된 전산프로그램의 합리성과 수치해석적 성능을 파악하기 위하여 단면이 3:1 타원단면의 모델과 SSPA-720 컨테이너 선형을 이용하여 수치해석의 결과와 실험데이터를 비교하였다. 평균속도분포와 압력의 분포는 위 모델의 풍동시험결과와 전반적으로 잘 일치하고 있으나, 난류운동에너지는 선미 부근에서 실제보다 많이 예측되고 있다.

Abstract

A computer code has been developed to simulate three-dimensional viscous flows over a ship-stern. Semi-elliptic forms of Reynolds equations are adopted and numerically generated body-fitted coordinate systems are used to resolve complex geometries of the ship-hull. A standard form of $k-\epsilon$ turbulence model is adopted for evaluation of the Reynolds stresses. Turbulent flows on a model with 3:1 elliptic sections and the SSPA-720 container ship model are predicted by using the code. Calculated pressure distributions on hull-surfaces and mean velocity distributions are generally in good agreements with measured values in wind-tunnels. But turbulent kinetic energies tend to be over-estimated near the stern in comparison with measured data.

부 호 설 명

b_j^i : 좌표 변환행렬의 성분
 $C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$: 여러가지 난류모델 상수
 E : 벽법칙에서 사용되는 상수

f^i : 격자제어 함수
 G : 난류에너지의 생성항
 g_{ij}, g^{ij} : metric tensors
 J : 좌표변환의 Jacobian
 k : 난류 운동에너지
 L : 물체의 길이

접수일자: 1988년 3월 25일, 재접수일자: 1988년 10월 13일

* 정회원, 서울대학교 공과대학

** 서울대학교 대학원

p	: 압력
Re	: Reynolds 수($=U_0L/\nu$)
S_ϕ	: 수송방정식에서의 생성항
U, V, W	: x, r, θ 방향의 평균속도
U_0	: 선체의 속도
$-u_i u_j$: Reynolds stress
V_i	: 벽에 평행한 속도의 크기
V_r	: 마찰속도($=\sqrt{\tau_w/\rho}$)
V_i^+	: 무차원 속도($=V_i/V_r$)
x, r, θ	: cylindrical 좌표계
x, y, z	: cartesian 좌표계
y^+	: 무차원 수($=V_r y/\nu$)
y^+_b	: 벽쪽의 첫 그리드에서의 y^+ 의 값
Γ_ϕ	: 변수 ϕ 에 해당하는 확산계수
ϵ	: 난류 소산율
ϕ	: 종속변수를 나타내는 대표변수
ρ	: 밀도
κ	: Von Karman 상수
ν, ν_t	: 동점성계수 및 난류 동점성계수
ν_{eff}	: 유효 동점성계수($=\nu+\nu_t$)
$\sigma_\epsilon, \sigma_\epsilon$: 난류모델 상수
τ_w	: 물체 표면에서 마찰응력
ξ, η, ζ	: 변환된 계산영역에서의 좌표계

1. 서 론

수상선이나 수중선 주위의 점성유동의 예측은 이들의 점성저항의 예측을 위해서나 각종 부가물의 설계를 위해서 매우 중요하다. 일반적으로 선미에 프로펠러 등 추진기를 장치하여 선박을 추진하기 때문에 그 위치에서 국부 점성유동 상태 및 추진기와 선미유동과의 상호 작용의 규명이 이들의 설계에 필요하며 특히 고성능 추진기의 경우 신빙성있는 반류의 예측이 중요하다. 추진성능이 우수한 선형을 개발하기 위해서는 저항의 감소 및 추진효율의 향상이라는 측면에서 선체 주위의 점성유동의 예측은 선형개발을 위한 주요한 설계 기구가 되고 있으며, 단순한 포텐셜이론에 근거를 둔 연구는 그 응용 범위에 상당히 제한을 받게된다.

선체 주위의 점성유동의 예측은 선체가 일으키는 수면의 교란을 무시하고, 3차원 난류경계층이론에 의한 전통적인 방법에 의하여 이루어져 왔다. 최근 선체 주위의 경계층 예측에 관한 현황은 Larsson[1]의 1980년 SSPA-ITTC work shop 보고서에 잘 나타나 있으며, 대체로 선수에서 선체길이의 80% 정도까지는 신빙성

있는 예측이 가능하다. 그러나 선미에 가서는 경계층 가정이 불합리하고 난류 모델링의 문제, 포텐셜 유동과의 상호 작용의 문제, 수치해석상의 문제 등으로 아직 정확한 유동의 해석이 어려운 실정이다. 특히 추진기 위치에서의 반류의 예측은 모형실험에 의존하는 실정이다. 선미에서의 유동특성은 Patel[2]의 논문에 비교적 잘 설명되어 있으며 지금까지 고차 경계층 이론, 포텐셜유동과의 상호 작용, 적합한 난류모델의 개발이라는 차원에서 많은 연구 노력이 있었으며 이런 노력은 국내에서도 강신형 등[3,4]에 의해 시도된 바 있다. 그러나 그간의 노력에도 불구하고 아직 좋은 결과를 얻지 못하고 있으며 최근 ITTC 저항분과의 보고서[5]에서 언급 되었듯이 점차 점성 영역과 비점성 영역을 전부 포함하여 점성유동차원에서의 해석이 시도되고 있다. 그러나 난류 유동의 지배방정식인 레이놀즈 방정식은 3차원 타원형 편미분방정식이고 이 3차원적 해석은 컴퓨터의 기억용량과 계산시간 등의 문제로 아직 쉽게 시도하기는 어렵다. 따라서 선체 주위의 유동에서 유동박리가 일어나지 않는다면 주 유동 방향의 점성 확산항이 거의 무시될 수 있는 경우, 레이놀즈 방정식에서 주 유동 방향의 확산항을 무시한 준 타원형 방정식(partially parabolic equation)에 대한 해석이 시도되고 있다. 이러한 형태의 방정식을 Pratap and Spalding[6]이 덕트내의 유동에 처음 적용하였으며, Abdelmeguid 등[7]은 선형 주위의 점성유동 해석에 처음 적용하였다. 그 후 Markatos[8], Muraoka[9,10] 등의 연구가 이루어졌고, 최근 제 2 차 국제 선박 점성 저항 워크샵에서 Janson and Larsson[11], Raven and Hoekstra[12], Tzabiras[13] 등의 연구 논문이 발표된 바 있다. 또 Chen and Patel[14]은 상당히 신빙성있는 예측의 가능성을 제시하였으며 이에 대한 연구가 계속 추진되고 있으나 아직 설계 또는 선형개발에 이용되기에는 미흡한 실정이다.

본 연구에서는 준 타원형 방정식에 의한 선체 주위의 점성유동 예측을 위한 전산프로그램을 독자적으로 개발하였다. 선체는 표면의 곡률 변화가 심한 일반적인 형상이고 이에 따라 선형에 적합한 좌표계의 선정, 난류 모델의 개발, 수치해석을 위한 공간의 분할, 수치해석의 방법 등에 대한 기초연구가 필요하다. 따라서 본 연구는 앞으로 보다 더 정확한 유동의 예측을 위한 연구의 기초가 될 것이며, 선형개발 및 추진기의 설계에 긴요히 이용되리라 생각된다.

2. 지배방정식 및 경계조건

2.1. 지배방정식

본 연구에서 다루려고하는 유동현상은 축대칭 물체를 포함한 3차원 선형 주위의 유동이므로, 실제 영역을 정의 하는 좌표계는 원통좌표계 (x, r, θ) 를 택하는 것이 편리하다. 또 유체 유동을 지배하는 방정식은 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식이며, 난류유동의 경우에는 레이놀즈 응력을 포함하는 레이놀즈 방정식으로 나타낼 수 있다. 유체를 Newton 유체라 하고, 유동을 정상 비압축성이라고 가정하면, (x, r, θ) 방향의 평균속도 분포 (U, V, W) 에 대한 연속방정식과 레이놀즈 방정식은 다음 식으로 표현된다.

연속방정식

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV) + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \tag{1}$$

x-운동량 방정식

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \overline{uu} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{uv}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{uw}) - \frac{\overline{uv}}{r} + \nu r^2 U \tag{2}$$

r-운동량 방정식

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{rv}) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + \overline{vv} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{vw}) - \frac{\overline{vv}}{r} + \frac{\overline{rw}}{r} + \nu \left(r^2 V - \frac{2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} \right) \tag{3}$$

θ-운동량 방정식

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{WV}{r} = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{uw}) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{vw}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + \overline{ww} \right) - \frac{2\nu \overline{rw}}{r} + \nu \left(r^2 W + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r^2} \right) \tag{4}$$

Reynolds 응력들은 적당한 난류 모델을 도입하여 모델링을 해 주어야 하는데 본 연구에서는 일반적으로 많이 쓰이고 있으며 어느 정도의 타당성이 입증된 k-ε 모델을 사용하였으며, 이때 난류 응력 항을 난류 동점성 계수 ν_t 를 써서 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -\overline{uv} &= \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ -\overline{uw} &= \nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \\ -\overline{vw} &= \nu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \\ -\overline{uu} &= \nu_t \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k \\ -\overline{vv} &= \nu_t \left(2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} k \\ -\overline{ww} &= \nu_t \left(\frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + 2 \frac{V}{r} \right) - \frac{2}{3} k \end{aligned} \tag{5}$$

이때 k-ε 모델에서는 ν_t 는 난류운동 에너지 k와 소산률 ε에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \tag{6}$$

또 κ 와 ε은 다음의 방정식을 만족 한다.

$$\begin{aligned} U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial k}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\kappa} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\kappa} r \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\kappa} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) + G - \epsilon \\ U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\epsilon} r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{\kappa} G - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{\kappa} \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\nu_{eff} = \nu + \nu_t$ 이고 G는 난류에너지의 생성항으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G = \nu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^2 \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

여기서 사용된 $C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, \sigma_\kappa, \sigma_\epsilon$ 은 경험상수로 $C_\mu = 0.09, C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92, \sigma_\kappa = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3$ 으로 하였다.

이상에서 기술한 k-ε 모델을 이용한 3차원 난류유동의 계산은 이미 여러분야의 많은 문제에 적용되어 그 타당성 및 특성이 파악되었으며, 선체 주위의 유동에도 적용된 바 있다. 여기서 미지변수는 p, U, V, W, k, ϵ 으로 지배방정식들은 서로 연계된 비선형 2차 편미분 방정식이며, 적절한 경계조건과 초기조건이 주어지면 해를 구할 수 있다.

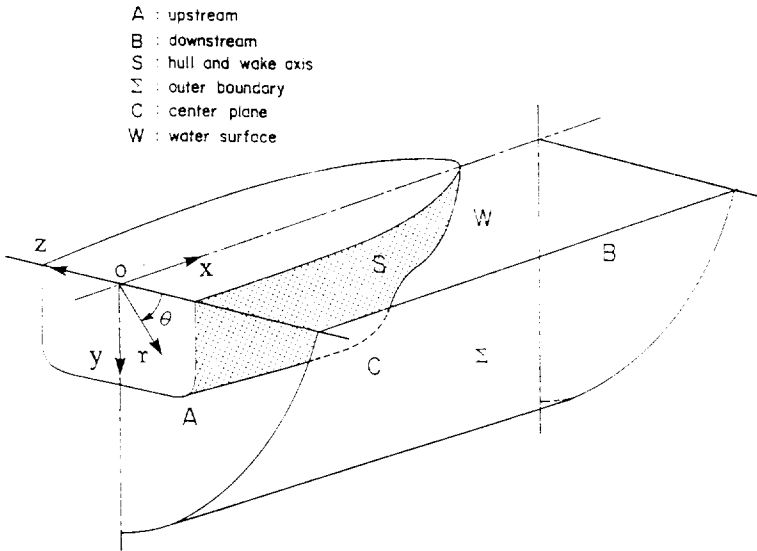


Fig. 1 Coordinate system(physical domain)

2.2. Body-fitted 좌표계 및 격자계 생성 방정식

입의 3차원 형상 주위의 유동 해석을 위해서는 적절한 좌표계의 선정이 중요하다. 특히 유한차분법으로 문제를 해석하는 경우에는 계산영역 상의 모든 경계면이 좌표면과 일치하는 것이 바람직하며 이를 위하여 body-fitted 좌표계를 많이 이용하는데 이는 해석하고자 하는 실제영역의 모든 경계면이 특정 좌표면과 일치하도록 곡선좌표계를 수치적으로 형성하는 방법이다[15]. 이 방법은 3차원 형상 주위의 점성유동을 계산할 때에 경계조건의 적용을 쉽게 하고, 격자계의 밀집배치를 통해 벽면 부근에서 경계층유동을 정밀하게 해석하기 위한 수치적격자 생성방법으로 복잡한 형상 주위의 유동 계산에 많이 이용되고 있다[16]. 격자계의 종류 및 격자배치는 해석하려는 영역의 경계형상 및 경계조건에 따라 적절히 선택되어야 한다.

Fig. 1에서 해석하고자 하는 실제영역의 곡선좌표계는 영역을 계산영역으로 사상함으로써 정의된다. 즉 Fig. 1에 표시된 실제영역이 Fig. 2와 같은 계산영역으로 사상된다. 만약 실제영역이 원통 좌표계이고 계산영역을 (ξ, η, ζ) 좌표계로 정의하면

$$\xi = \xi(x, r, \theta), \quad \eta = \eta(x, r, \theta), \quad \zeta = \zeta(x, r, \theta) \quad (10)$$

와 같이 좌표계 사이의 사상 관계식이 필요하며 이 관계식은 다음과 같은 2차 편미분 방정식으로 나타낼 수 있다[14, 17].

$$r^2 x = 0, \quad r^2 r = \frac{1}{r}, \quad r^2 \theta = 0 \quad (11)$$

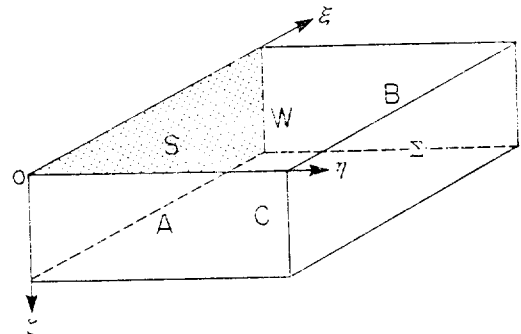


Fig. 2 Coordinate system(transformed domain)

여기서

$$r^2 = g^{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + g^{33} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + 2g^{13} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} + 2g^{23} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} + f^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + f^2 \frac{\partial}{\partial \eta} + f^3 \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

여기서 g_{ij} 및 g^{ij} 는 metric tensor이며 f^i 는 격자의 배열을 조정하는 기능을 갖고 있다.

위의 격자 생성방정식(11)은 적절한 경계조건하에 수치계산된다. 경계조건은 계산영역의 경계에 해당하는 실제영역에서 (x, r, θ) 의 경계값을 이용한다.

$$x = x_b(\xi, \eta, \zeta), \quad r = r_b(\xi, \eta, \zeta), \quad \theta = \theta_b(\xi, \eta, \zeta) \quad (12)$$

한편 식[11]를 이용하여 격자계를 생성할 때 격자배치는 경계상에서의 격자 배치, 즉 경계조건을 통해

조정된다. 그러나 경계에서 부여한 격자 간격의 비율이 영역 내부에서 그대로 유지되지는 않는다. 즉 경계 조건은 단지 영역내 경계 인접부에만 영향을 주며 본질적으로 격자 배치는 격자 생성식 자체에 의존하므로 식(11)의 f^1, f^2, f^3 함을 통하여 원하는 격자 배치를 하게 된다. f^1, f^2, f^3 는 격자 조정 함수(grid control function)로 원하는 격자 배치가 되도록 조정해 주어 야 하며, 경계에서의 격자 배치가 전 영역에 연속적으로 미치도록 결정하여 준다.

본 연구와 같이 선형체 혹은 회전체 주위의 유동을 해석할 경우에는 축 방향 단면(axial cross section)이 특정 좌표면과 일치 되도록 $\xi = \xi(x)$ 로 놓으면 편리하다. 이 경우에는 실제영역의 경계면 처리가 원활하고 격자 생성 방정식이 간단히 될 수 있으며 특히 단면에서 거의 적고하는 좌표계를 얻을 수 있다. 또 계산 결과의 처리가 쉬우며 모든 실험이 거의 단면에서 이루어지기 때문에 실험 결과와 비교하기도 비교적 쉽다. $\xi = \xi(x)$ 로 놓으면 격자 생성 방정식은 다음과 같이 된다.

$$g^{11}r_{\xi\xi} + g^{22}r_{\eta\eta} + g^{33}r_{\zeta\zeta} + 2g^{12}r_{\xi\eta} + 2g^{13}r_{\xi\zeta} + 2g^{23}r_{\eta\zeta} + f^1r_{\xi} + f^2r_{\eta} + f^3r_{\zeta} = \frac{1}{r}$$

$$g^{11}\theta_{\xi\xi} + g^{22}\theta_{\eta\eta} + g^{33}\theta_{\zeta\zeta} + 2g^{12}\theta_{\xi\eta} + 2g^{13}\theta_{\xi\zeta} + 2g^{23}\theta_{\eta\zeta} + f^1\theta_{\xi} + f^2\theta_{\eta} + f^3\theta_{\zeta} = 0 \quad (13)$$

여기서 격자 조정 함수 f^1 은 축 방향의 격자 배치에 따라 결정되며 이에 따라 원하는 축 방향의 격자 배치가 이루어지도록 하였고, 반경 방향의 격자 배치는 격자조정함수 f^2 에 따라, θ 방향의 격자는 f^3 에 의하여 조절된다. 여기서는 참고문헌[14]의 방법과 동일하게 하였다.

경계조건으로 water plane ($\theta=0^\circ$) 및 center plane ($\theta=90^\circ$)에서는 대칭조건을 사용하며 다른 경계면은 (ξ, η, ζ) 의 경계에 해당하는 (x, r, θ) 의 값을 사용한다.

2.3. 지배방정식의 좌표 변환

좌표계 변환에 따라 지배방정식의 변환이 필요하다. 좌표 변환은 독립변수 (x, r, θ) 및 종속변수 (U, V, W, k, ϵ) 를 계산영역 좌표계의 변수로 변환시킬 수도 있고, 임의의 좌표계에 대한 지배방정식을 따로 유도할 수도 있다. 그러나 여기서는 독립변수 (x, r, θ) 만 변환 시키기로 한다[14]. 즉 종속변수 (U, V, W, k, ϵ) 는 Fig. 3과 같이 실제 영역인 원통좌표계에서 정의되고 계산은 변환된 좌표계 (ξ, η, ζ) 에서 이루어진다. 이는 실제로 비교할 실험자료가 대부분 원통좌표계의 물리량으로 정의되고 변수에 대한 양적 비교가 비교적 쉽기 때문이다. 참고문헌[14, 17]의 변환관계를 이용하면

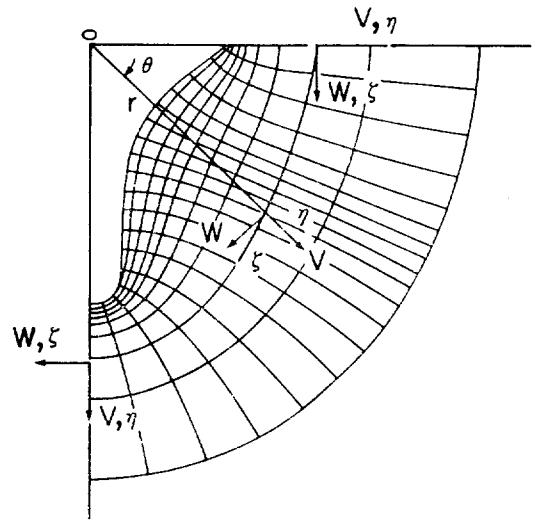


Fig. 3 Velocity components and coordinate system

지배방정식은 다음의 형태로 주어진다.

$$\frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (b_1^1 U \phi + b_2^1 V \phi + b_3^1 W \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (b_1^2 U \phi + b_2^2 V \phi + b_3^2 W \phi) \right]$$

$$= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\Gamma_{, \xi} J g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\Gamma_{, \eta} J g^{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Gamma_{, \zeta} J g^{33} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Gamma_{, \xi} J g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\Gamma_{, \eta} J g^{23} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Gamma_{, \zeta} J g^{31} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\Gamma_{, \eta} J g^{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Gamma_{, \zeta} J g^{32} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Gamma_{, \xi} J g^{13} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}) \right] + S_\phi \quad (14)$$

윗식에서 보던 보존형태(conservative form)의 방정식이 똑같은 보존형태로 변환됨을 알 수 있다. 위 방정식은 완전한 3차원 타원형(3-D elliptic) 방정식이므로 실제 수치해석할 경우에 많은 기억용량과 계산시간이 필요하다. 그러나 잘 설계된 선체 주위의 유동에서 유동박리가 발생하지 않는다면, 주 속도 방향으로 확산이 다른항에 비하여 상대적으로 매우 적다고 생각된다. 이 항을 무시하면 주 속도 방향의 격자 단면부에 대해선 타원형이고 주 속도 방향에 대해선 포물선형인 방정식으로 바뀐다. 이러한 방정식을 semi-elliptic 혹은 partially-parabolic 방정식이라 부르며 이하 준 타원형 방정식이라 칭한다. 본 연구에서는 Chen and Patel[14]에서 언급되었듯이 축 방향(ξ)의 확산항중 식(14)의 오른쪽 첫째항만을 무시하여 준타원형의 최

종적인 지배방정식을 얻었다.

2.4. 경계조건

일반적인 선형 주위의 점성유동을 해석할 경우에는 모두 6개의 경계면이 존재하며 이에 대한 경계조건은 다음과 같다.

(1) 입구단면

상류에서의 변수(U, V, W, k, ϵ)들의 분포가 정해져야 하는데, 선형 앞 부분에서는 경계층이 비교적 얇으므로 포텐셜유동 이론과 경계층 해석이 가장 합리적인 방법이다. 따라서 이들을 이용하여 위의 분포를 계산 또는 가정하거나 실험데이터를 사용한다. 압력경계조건 경우에는 staggered 격자계를 사용하므로 필요없게 된다.

(2) 출구단면

하류에서는 후류가 형성 되는데 주 방향의 확산항을 무시하고 해석하므로 U, V, W, k, ϵ 의 조건은 필요하지 않고 압력 경계조건만이 필요한데 선제로부터 비교적 멀리 떨어진 부근이므로 zero pressure gradient ($\partial p / \partial \xi = 0$) 조건을 사용한다.

(3) 물체표면

물체 표면에서는 절착조건과 층류저층의 존재에 의하여 $U=V=W=k=\epsilon=0$ 이나 실제 문제를 해석할 경우에는 벽 근처에서 벽법칙(law of the wall)을 사용했다. 이에 관한 자세한 설명은 3절에서 다루기로 한다.

(4) 파깁경계

물체표면에서 충분히 떨어진 파깁경계에서는 유동이 교란되지 않은 상태로 가정하였다.

$$U=U_0, W=k=\epsilon=0, \frac{\partial V}{\partial \eta}=0, p=p_0$$

여기서 U_0, p_0 는 각각 교란되지 않은 균일유동의 크기 및 정압력이다.

(5) 대칭면

선형 주위의 center plane 및 water plane에서 대칭 조건을 이용했다.

$$W=0, \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} = 0$$

(6) 후류 중심선(wake center line)

$$V=W=0, \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial k}{\partial \eta} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} = 0$$

3. 수치해석 방법

식(13)으로 표시된 격자 생성식은 준 선형 타원형 방정식 이므로 축차적인 과정에 의하여 해가 결정된다.

먼저 격자 생성식의 도함수들을 격자 크기의 2차 정도를 가지는 유한차분식으로 근사하여 대수식을 구한다. 이때 교차 도함수는 생성함으로 처리한다. 격자조절 함수 f^1, f^2, f^3 는 경계조건으로 부터 계산한다. 계산영역의 격자 크기는 임의로 택할 수 있으므로 $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$ 로 하였다.

지배방정식도 유한차분식을 이용하여 수치적으로 해석한다. 유한차분식을 유도하는 방법은 지배방정식이 보존형태임을 고려하여 검사체적 근사법 및 staggered 격자계를 이용한다. 검사체적을 이용한 수치근사 과정을 사용하면 유한차분식을 보존식으로 나타낼 수 있으며 모든 항들을 물리적인 관점에서 수치해석에 포함시킬 수 있으며, 계산영역이 균일격자이므로 검사체적 구성과 공식화 과정이 쉽다. 구체적으로 유한차분식을 유도하는 과정은 참고문헌[18]에 잘 설명되어 있으며, 대류항의 처리는 hybrid 기법을 사용하였다.

U, V, W, k, ϵ 에 대한 지배방정식은 일단 압력이 가정되면 유동 방향으로 포물선 형태이므로 하류(downstream)를 따라서 구해진다. 압력이 합리적으로 가정 또는 구해진다던 속도는 연속방정식을 만족시켜야 한다. 따라서 압력은 연속방정식이 만족되도록 간접적으로 구하며 흔히 Patankar-Spalding의 SIMPLE(Semi-Implicit Pressure Linked Equation) 방법을 많이 사용한다. SIMPLE 방법은 압력을 가정하여 운동량 방정식을 해석한 후에 연속 방정식이 만족 되도록 압력과 속도를 보정해 주는 방법이다[18]. 압력보정 방정식은 운동량 방정식과는 달리 완전한 타원형이다. 즉 하류의 압력 변화가 상류에 미치도록 한다. 그러나 준 타원형 방정식을 해석할 경우에는 유동 방향으로 순차적으로 풀게 되므로(marching process) 상류 및 하류의 압력을 고정시키고 한 단면에서 압력만을 보정하면서 하류 방향으로 순차적으로 풀게 된다.

벽 근처에서는 속도와 난류량의 변화가 매우 심하므로 매우 조밀한 격자간격이 필요하다. 이러한 어려움을 피하기 위하여 벽법칙을 사용한다. 벽 근처에서 벽에 평행한 속도 V_r 는 다음의 대수 속도 분포(logarithmic velocity profile)를 나타낸다고 가정한다.

$$V_r^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+); y^+ > 11.63 \tag{15}$$

여기서

$$V_i^+ = \frac{V_i}{V_r}, y^+ = \frac{V_r y}{\nu}, V_r = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2},$$

$$\kappa = 0.4187, E = 9.793$$

이다. 벽근처 유동유동은 대부분 위 관계를 만족시킨다고 보아 수정없이 그대로 사용하기로 한다. 또 벽

근처에서 난류에너지의 생성(turbulence generation)과, 소멸(dissipation)이 평형상태에 있다고 가정하고 $k-\epsilon$ 방정식을 사용하던

$$\frac{\tau_w}{\rho} = C_\mu^{1/2} k \quad (16)$$

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (17)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \kappa V_i C_\mu^{1/4} \frac{k^{1/2}}{\ln(Ey_p^+)} \quad (18)$$

위의 관계식은 벽 근처에서 속도 크기와 전단 응력과의 관계를 나타낸다.

전체적인 수치해석 방법은 먼저 적당한 격자 배열을 통해 수치적으로 격자 생성을 한 후에 새로운 격자계에 대한 Jacobian 및 변환 행렬을 계산한다. 격자계가 생성되면 어느 단면에서 상류의 조건을 이용하여 속도에 대한 차분방정식을 해석한다. 해를 구하는 방법은 U, V, W 에 관한 대수식을 순서대로 해석하고 비선형을 고려하여 반복계산을 한다. 대수식의 해는 TDMA를 이용한 line by line 방법을 사용하였다. 하루 단면에서 속도분포를 구한 후에는 연속방정식을 적용하여 압력 및 속도를 보정한다. 압력보정량 관계식을 앞에서와 마찬가지로 단면 격자점에 대하여 해석하여 압력 및 속도를 보정해 새로운 압력분포 및 속도분포를 구한다. 이 과정에서 방정식의 비선형성을 고려하고 해의 발산을 막기 위하여 under relaxation을 시킨다. 속도 및 압력 분포가 구해지면 이를 이용하여 난류 운동에너지 k 및 소산률 ϵ 에 대하여 차분방정식을 해석한다. 이런 과정을 통해서 하루 단면의 속도, 압력, 난류량들에 대한 계산이 끝나면 다음 단면으로 계속 순차적으로 마지막 단면까지 계산한다(marching process). 만약 압력이 미리 알려진 포물선형 방정식이라면 한번의 계산으로 모든 단면에서 실제의 해를 구할 수 있다. 그러나 준 타원형 방정식의 경우에는 압력이 미리 알려져 있지 않으므로 한번 계산으로 정확한 압력 및 속도를 얻을 수 없다. 따라서 정확한 압력 및 속도를 얻기 위하여는 압력이 수렴할 때까지 계속적인 반복 계산이 필요하다(sweep process). 이런 반복 계산을 통하여 압력이 실제값에 접근하면서 수렴된 압력 분포를 얻을 수 있다.

4. 계산에 및 검토

전절에서 기술한 수치해석 방법을 2차원유동, 축대칭유동, 3차원유동 그리고 일반 선형에 적용시켜 계산을 하였다. 2차원 유동의 예로 후류를 포함하는 평판

주위의 난류 및 층류유동을 계산하여 기존의 실험, 계산 결과와 비교하였고 비교적 좋은 결과를 얻어 수치 해석의 타당성을 검증하였다. 그리고 축대칭의 예로는 Huang 등[19]에 의해 실험된 A-5 축대칭 물체에 대해 계산하여 실험 결과와 비교하였다. 여기서 이에 대한 결과는 자세히 기술하지 않았고 참고문헌[17]에서 다루었다.

본 논문에서는 3차원 유동의 예로 Huang 등[20]의 단면이 3:1인 타원형 물체주위의 유동과, 일반 선형의 예로는 SSPA-720 모델을 택하였는데, 이는 Larsson 등[21]에 의해 실험된 선체 모델로 일반적인 선형 주위의 유동특성을 잘 나타내고 있다. 즉 물체의 뒷 부분에서 경계층이 급격히 두꺼워지며 단면에서 경계층의 두께가 심하게 변하면서 경계층 해석으로는 속도분포 및 압력의 예측이 힘들게 된다. 본 연구에서는 준 타원형 방정식을 적용하여 후류를 포함한 전 영역을 점성유동의 차원에서 해석하여 어느 정도 정확한 압력 및 속도의 예측이 가능하였고 결과를 실험자료와 비교할 수 있었다.

4.1. 3:1 타원형 단면 모델

3:1 타원형 단면 모델은 모든 단면이 3:1 타원체인 모델이며 2개의 대칭면이 있어 물체 단면부의 1/4만 해석하면 된다. 유동 방향으로 $0.5 < x/L < 2.0$ 사이에 모두 52개의 격자를 두었으며 반경 방향으로 $r/L=0.7$ 까지 20개의 격자를 두었고 단면은 5개의 격자를 두어 실제영역을 $52 \times 20 \times 5$ 개의 격자로 나누었다. 하류경계를 $x/L=2.0$ 으로 함은 실제유동에서 $1.5 < x/L < 2.0$ 범위에서 정압력은 거의 회복되고 더구나 압력구배는 없다고 생각되기 때문이다. 여기서 θ 방향은 편의상 물체의 반경이 증가하는 방향으로 택하였다. 레이놀즈수는 실험이 이루어진 $Re=6 \times 10^6$ 으로 했으며 입구의 속도 및 난류량의 분포는 벽법칙을 사용하였고, 경계층 외부의 속도는 $U=U_0$ 로 초기의 압력 분포는 전영역에서 $p=p_0$ 로 하였다.

Sweep에 따른 압력 수렴의 경향 및 분포를 Fig.4에 나타내었다. 70회 정도에서 수렴된 값을 얻을 수 있었으며 실험과 거의 일치하고 있다. 단면에서 5개의 격자로는 정확한 유동을 예측 하기에는 부족하다고 생각된다. 여기서의 일단 실험치 또는 유사한 계산결과와 어느 정도 일치하는지에 일차적인 관심을 두었기에 더 이상 격자수를 증가시키지 않았다. $\theta=0^\circ$ 의 압력 분포는 $\theta=90^\circ$ 보다는 실험과 더 일치하는 경향을 보이는데 이는 $\theta=90^\circ$ 에서 3차원 효과가 크게 나타나며 복잡한 유동이 형성되는 것을 고려하면 어느 정도 기대되는

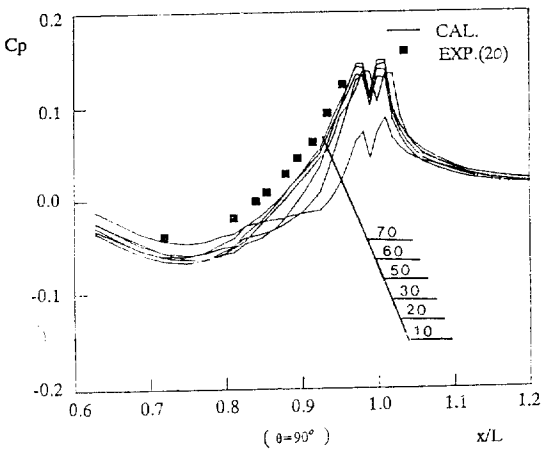
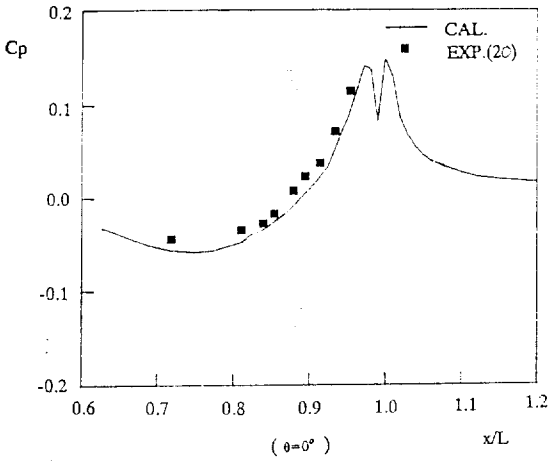


Fig. 4 Convergence hystory of pressure distributions

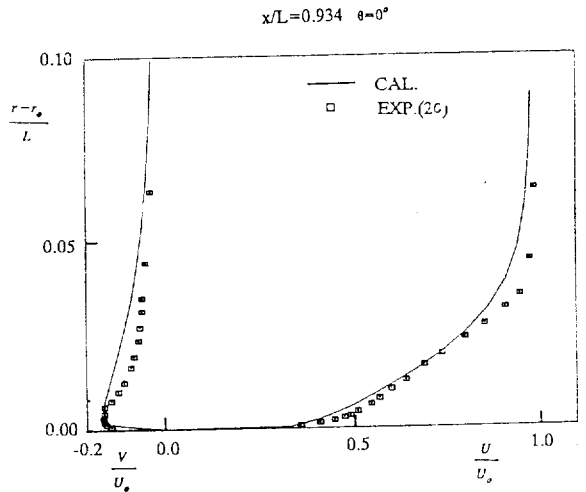
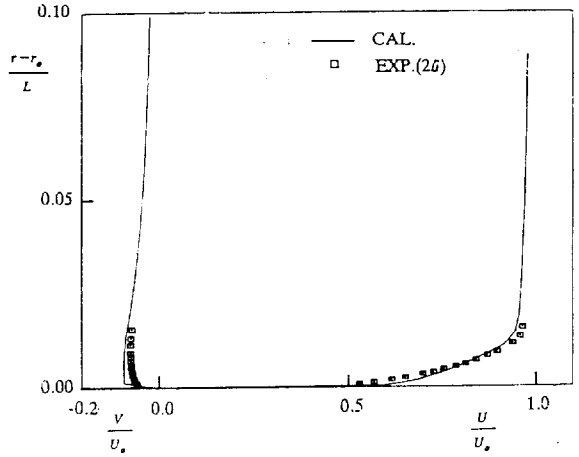


Fig. 5 Axial and radial velocity profiles

결과라 생각된다.

속도 분포를 살펴 보면 $\theta=0^\circ$ 에서는 $\theta=90^\circ$ 와 비교하여 경계층이 매우 얇고 뒷부분까지 잘 일치하나 경계층이 두꺼운 $\theta=90^\circ$ 의 뒷부분에 가서는 실험과 많은 차이를 나타낸다. 그 예로 Fig.5에는 $x=0.934$ 에서의 속도분포를 나타내었다. Fig.6에 난류운동에너지의 분포를 나타냈는데 앞에서는 실험과 거의 일치하나 물체 뒤에서는 전반적으로 실험결과 보다 크게 예측하고 있다.

위의 결과를 종합하면 전체적으로 만족할 만한 압력 분포를 얻을 수 있었으며 경계층이 두꺼운 뒷부분을 제외하면 속도 및 난류량도 실험과 거의 일치하고 있다. 그러나 여전히 경계층이 두꺼운 뒷 부분에서는 실험과 상당한 차이를 나타낸다. 이는 격자수의 영향, 난류모델의 합리성, 벽법칙의 타당성 등 타 연구에서

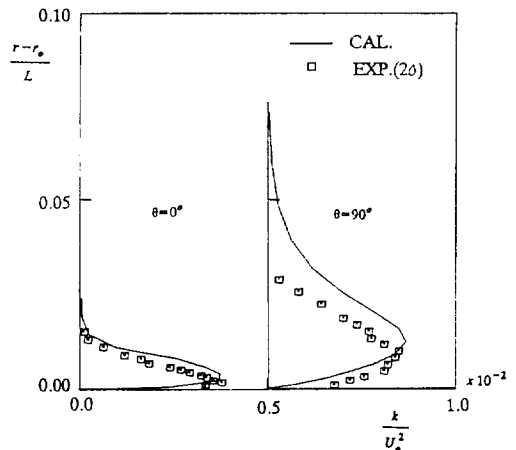


Fig. 6 Turbulent kinetic energy distributions

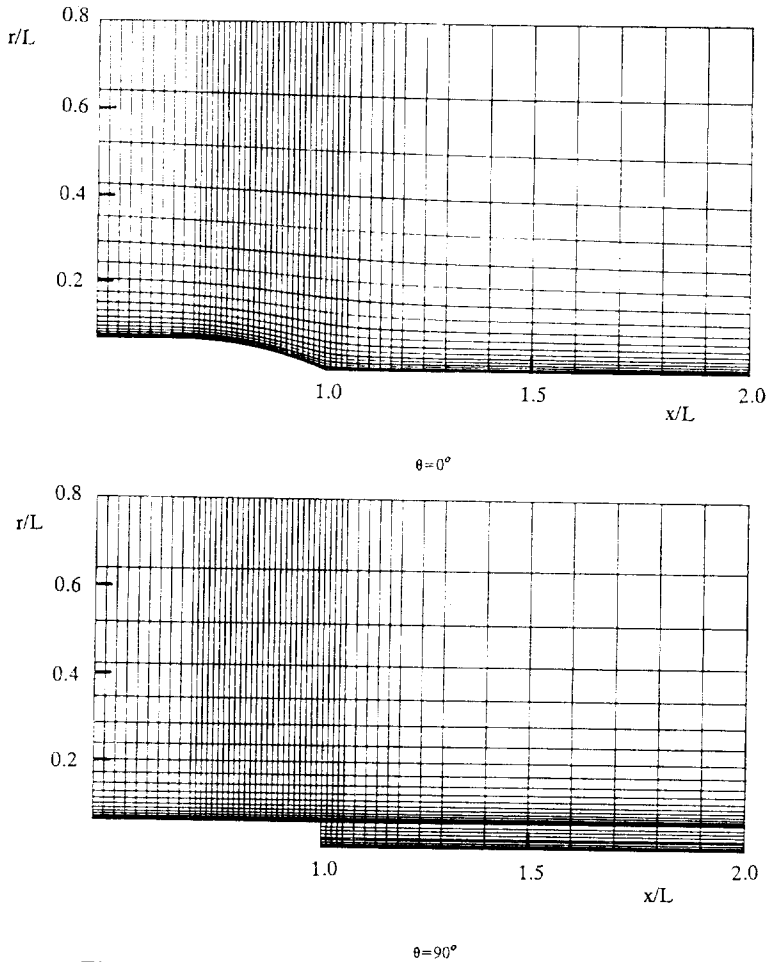


Fig. 7 Longitudinal views of numerical grid for SSPA-720 model

도 지적되고 있는 사항들에 의한 결과라고 생각된다.

4.2. SSPA-720 모델

먼저 생성된 격자계의 예를 Fig.7, Fig.8에 나타내었는데 유동 방향으로 $0.5 < x/L < 2.0$ 사이에 52개의 격자를 두었으며 반경 방향으로는 $r/L=0.8$ 까지 20개의 격자를 두었고 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 사이에는 12개의 격자를 두어 모두 $52 \times 20 \times 12$ 개의 격자로 실제영역을 나누었다. 레이놀즈수는 실험에 맞추어 $Re=5 \times 10^6$ 으로 했으며 입구조건은 전술한 바와 같은 방법으로 벽법칙을 사용하여 원주 방향에 상관없이 일정하게 주었다. 그리고 경계층 밖에서의 x 방향 속도는 실험된 압력계수를 참고로 하여 바깥 경계까지 반경에 제곱에 반비례하게 주었다. 또 반경 방향 속도, 원주 방향 속도는 입구 전 영역에서 영으로 주었다.

90회 sweep으로 수렴된 압력분포를 얻을 수 있었으

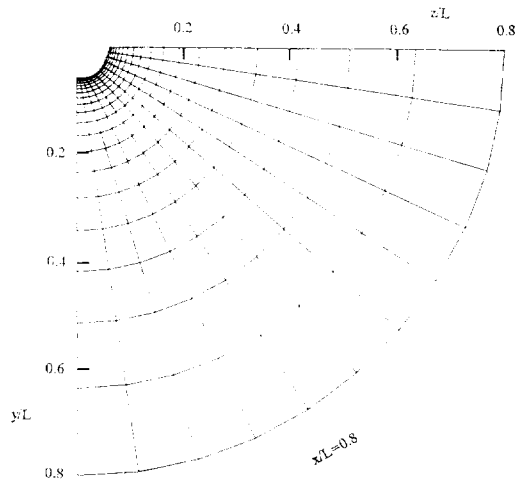


Fig. 8 Sectional view of numerical grid for SSPA-720 model

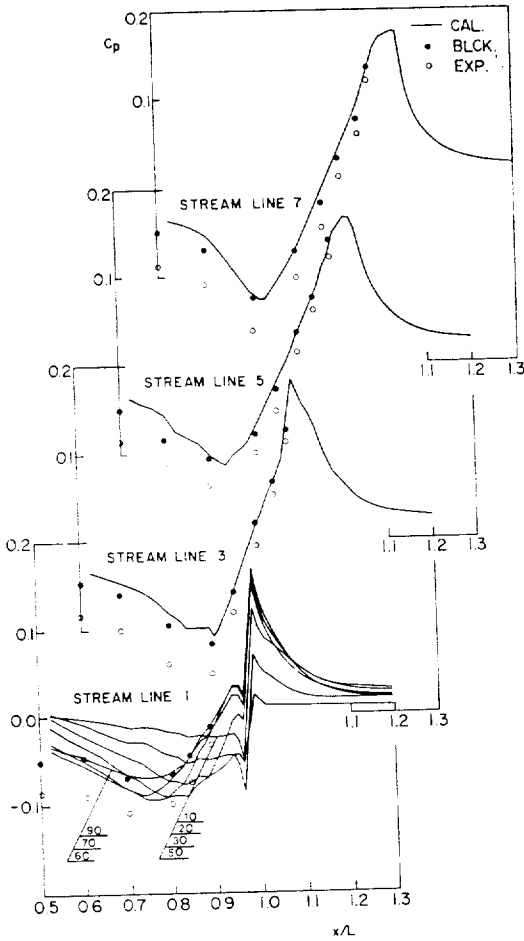


Fig. 9. Distributions of pressure coefficient on SSPA-720 model

며 이를 Fig.9에 나타내었다. 여기서 유선의 번호는 참고문헌[21]에서의 유선번호이다. 유선 1은 킬라인, 유선 3은 빌지킬과 킬사이 유선의 곡률변화가 심하고 경계층이 비교적 얇은 영역, 유선 5는 빌지킬 근처로 경계층이 두꺼운 지역, 유선 7은 빌지킬과 수면 사이를 지나는 유선이다. 실험결과는 어느 정도의 blokage 효과를 포함하고 있음을 알 수 있다. Larsson 등[21]에 의해 보정된 압력분포와 비교하면 입구경계면 근처를 제외하고는 실험값과 전반적으로 거의 일치하고 있다. 그러나 앞 부분으로 갈수록 약간의 차이를 나타내는데 이것은 입구 조건의 부정확성, 상대적으로 뒷 부분보다 적은 격자수의 영향으로 보이며 이를 고려하여 계산하면 더 좋은 결과가 예상된다. 그러나 이것이 선체 후미 계산에 그렇게 큰 영향을 주지 않음을 알 수

있다. Fig.10에는 벽마찰계수를 각 유선을 따라 나타내었다. 결과를 살펴 보면 대체적인 경향은 일치하나 뒷 부분으로 갈수록 실험과 차이를 나타낸다. 이것은 다른 유동의 계산과 마찬가지로 전체 영역을 계산하다 보니 벽 근처에 충분한 수효의 격자를 배치하지 못한 이유가 크겠고, 난류 모델링 및 벽법칙의 영향도 기대된다. 따라서 선미주위의 유동을 정확히 예측하려면 선미 부분의 복잡한 유동 형태에 적합한 격자배치 및 난류 모델에 대한 연구가 더 이루어져야 하겠다.

속도 분포는 단면에서 계산된 좌표와 실험이 이루어진 좌표가 다르기 때문에 정확히 비교해 볼 수는 없으나 계산된 속도 분포를 각 단면에서 등속도선 및 속도 벡터로 나타내면 어느 정도 경향을 파악할 수 있다. Fig.11에 각 단면에서 축 방향 속도의 분포를 나타냈는데 $\theta=90^\circ$ (keel line)에서 경계층이 매우 얇으며 $\theta=0^\circ$ (water line)에서 경계층이 두껍다. 선미에 가가와 질수록 단면에서 경계층의 두께가 심하게 변하고 있다. 이것은 전형적인 선체 선미 주위의 유동 특성으로 경계층 해석으로는 구하기 어려우며 실험결과와 대체로 일치하고 있으나 경계층의 두께를 실험값 보다 두껍게 예측하고 있다. 한편 원주방향 및 반경방향의 속도 벡터를 살펴보면 경계층이 얇은 mid-ship 근처에서는 keel line으로 부터 water line으로 향하고 있으나 선미로 가면 방향이 바뀌면서 단면의 중심부로 향하고 있는데 이것은 단면의 중심부에서 경계층이 갑자기 두꺼워지는 경향과 대체로 일치하고 있으며 타당한 결과라 생각된다.

5. 결 론

이상의 연구결과로부터 다음의 결론을 내린다.

(1) 선미에서 3차원 점성유동을 수치해석하기 위하여 body-fitted 좌표계를 채택하고 준타원형 방정식을 사용하여 전산프로그램을 작성하였다. 이를 기존 실험자료가 있는 여러가지 모형에 적용한 결과 정성적인 관점에서 압력분포 및 속도분포가 합리적으로 예측됨이 확인되었다.

(2) 단면이 3:1 다윈형인 3차원 물체와 SSPA 720 model에 적용한 결과 물체표면의 압력분포와 속도분포는 실험결과와 상당히 잘 일치하고 있으며, 기존 수치계산 결과와도 같은 경향을 보인다. 그러나 난류강도의 분포는 선미 끝에서 실험치와 상당한 차이를 보인다. 기존 실험의 정확도와 난류모델의 문제점, 계산격자 수효의 부족 및 경계면의 위치와 경계조건의

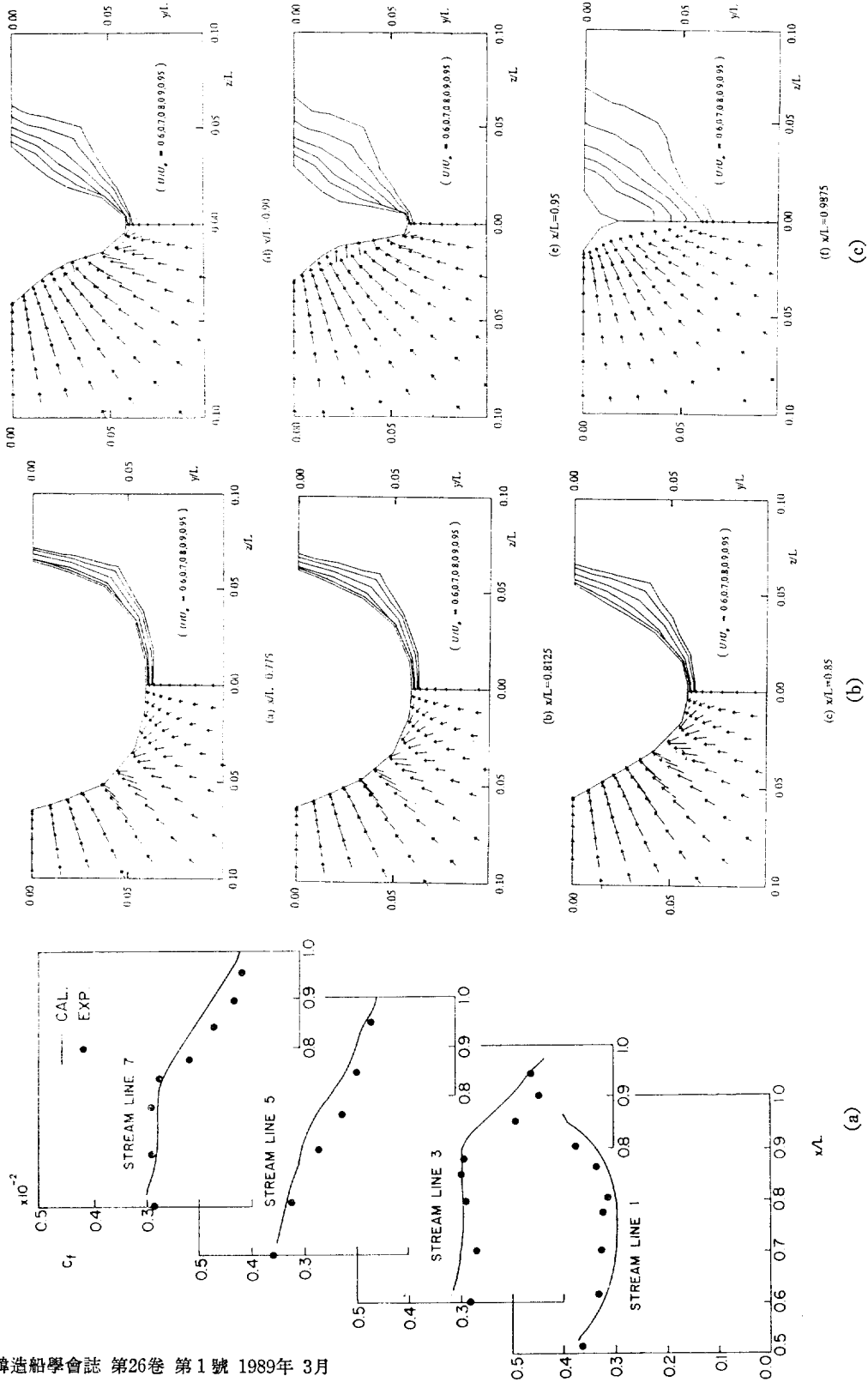


Fig. 10 Distributions of skin friction coefficient on SSPA-720 model

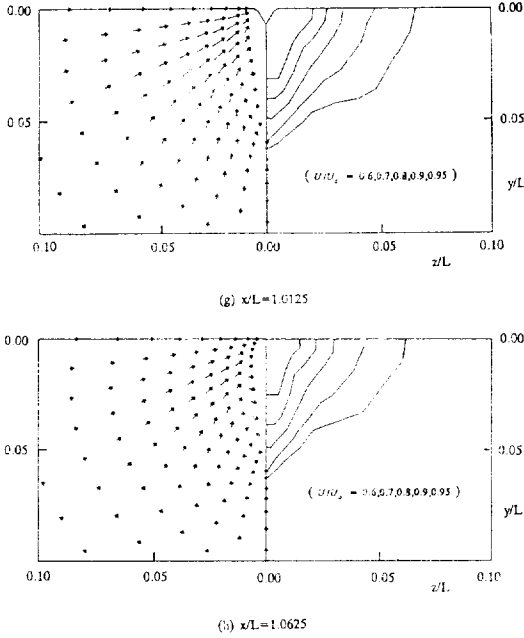


Fig. 11 Axial velocity contours and velocity vectors in cross-sections of SSPA-720 model

문제점등을 고려할 때 신빙성 있는 유동의 예측을 위해서는 여러 측면에서의 연구가 필요하다.

(3) 선형설계 및 선미개발을 위해서는 점성저항의 정량적 예측 뿐만 아니라 프로펠러면 근처의 유동에 측이 가능해야 한다. 이러한 관점에서 계속된 연구가 이루어져야 하며, 본 연구결과는 이를 위해 많이 활용되리라 생각된다.

후 기

본 연구는 부분적으로 대한조선공사의 지원하에 이루어졌으며, 연구기간 동안 많은 협조를 하여주시는 김근배 상무와 관련된 여러분들에게 깊은 감사를 드리는 바이다.

참 고 문 헌

1. L. Larsson, SSPA-ITTC Workshop on Boundary Layers-Proceedings, SSPA-Publication No. 90, 1981.
2. V.C. Patel, "Some Aspects of Thick Three-Dimensional Boundary Layers", *Proc. 14th ONR*

Symp., 1982.

3. 강신형, 이태식, 이근형, "수학 선형 선미에서 3차원 난류 경계층의 해석 및 실험(유동계측)", 대한기계학회 논문집, 9(3), 1985.
4. 강신형, 이태식, 조형희, "수학 선형 선미에서 3차원 난류 경계층의 해석 및 실험(수치계산)", 대한기계학회 논문집, 9(3), 1985.
5. Report of the Resistance and Flow Committee, ITTC 87, ITTC, 1987.
6. V.S. Pratap and D.B. "Spalding, Fluid Flow and Heat Transfer in Three-Dimensional Duct Flows", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, 1979.
7. A.M. Abdelmeguid, N.C. Markatos, K. Muraoka and D.B. Spalding, "A Comparison Between the Parabolic and Partially Parabolic Solution Procedures for Three-Dimensional Turbulent Flows around Ship's Hull", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 3, 1976.
8. N.C. Markatos, M.R. Malin and D.G. Tatcheel, "Computer Analysis of Three-Dimensional Turbulent Flows around Ship's Hulls", *Proc. Inst. Engrs.*, London, Vol. 194, 1980.
9. K. Muraoka, "Calculation of Thick Boundary Layer and Wake of Ships by a Partially Parabolic Method", *Proc. 13th ONR Symp.*, Tokyo, 1980.
10. K. Muraoka, "Calculation of Viscous Flow around Ships with Parabolic and Partially Parabolic Solution Procedures", *Trans. West Japan Soc. Naval Arch.*, Vol. 63, 1982.
11. C.E. Janson and L. Larsson, "Ship Flow Calculations Using the PHOENICS Computer Code", *Proc. 2nd Int. Symp. on Ship Viscous Resistance*, SSPA, 1985.
12. H.C. Raven and M. Hoekstra, "A Parabolized Navier-Stokes Solution Method for Ship Stern Flow Calculations", 2nd Int. Symp. on Ship Viscous Resistance, SSPA, 1985.
13. G.D. Tzabiras, "On the Calculation of the 3-D Reynolds Stress Tensor by Two Algorithm", 2nd Int. Symp. on Ship Viscous Resistance, SSPA, 1985.
14. H.C. Chen and V.C. Patel "Calculation of Stern

- Flows by a Time Marching Solution of the Partially-Parabolic Equations”, *Proc. 16th ONR Symp.*, 1986.
15. J.F. Tompson, Z.U.A. Warsi and C.W. Mastin, “Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equation—A Review”, *J. Comput. Physics*, Vol. 47, 1982.
 16. Numerical Grid Generation Technics, NASA Conference Conference Publication 2166, 1980.
 17. 강신형, 오건제, “선체 주위의 점성유동 해석을 위한 전산프로그램 개발에 관한 연구”, 서울대학교 생산기술연구소 보고서, 서울대학교, 1986.
 18. S.V. Pantankar, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere Publishing Corporation, 1977.
 19. T.T. Huang, N.C. Groves and G.S. Belt, “Boundary Layer Flow on an Axisymmetric Body with an Inflected Stern”, DTNSRDC Report 801064, 1980.
 20. T.T. Huang, N.C. Groves and G.S. Belt, “Stern Boundary Layer Flow on a Three-dimensional Body of 3 : 1 Elliptic Cross Section”, DTNSRDC Report 821022, 1982.
 21. L. Larsson, “Boundary Layers of Ships. Part 3: An Experimental Investigation of the Turbulent Boundary Layer on a Ship Model”, SSPA, Goteborg, Sweden, Rep. 46, 1974.
 22. 강신형, 오건제, 이승배, “점성유동예측에 의한 선미선형 설계에 관한 연구”, 서울대학교, 공과대학 부속 생산기술연구소, 연구보고서 RIIS87-092, 1987.