

히스테리시스 특성을 고려한 자계의 유한 요소 해석

Finite Element Analysis of Magnetic Fields With Hysteresis Characteristics

鄭 勳* · 洪 瑄 基** · 元 鍾 洙***
(Hoon Jung · Sun-Ki Hong · Jong-Soo Won)

요 약

본 연구에서는 히스테리시스 특성을 고려한 자계의 유한 요소 해석을 제안한다. 이 방법은 프라이자흐 모델을 이용하여 히스테리시스 특성을 표현하므로 자성 재료의 multi-branch 또는 minor-loop 특성도 고려할 수 있다. 결국 히스테리시스 특성을 고려한 자계의 유한 요소 해석은 자화값 M에 대한 비선형 방정식의 문제가 되며 반복계산법(iteration method)을 이용, 그 해를 구할 수 있다. 이 상에서 제안한 방법을 소프트 페라이트 EI 코어 리액터에 적용하여 실험치와 수치해를 비교하고, 결과가 잘 일치함을 확인하였다.

Abstract- A finite element method for the analysis of magnetic fields with hysteresis characteristics is proposed. The method employs Preisach model to describe hysteresis of magnetic material, so that even multi-branch or minor-loop characteristics can be taken into account. The problem can be considered as the analysis of a nonlinear equation where magnetization depends not only on the present value of the magnetic field but also on the past values, and the problem can be solved by the iteration method. Measurements were carried out on soft ferrite EI core for the comparison with computer solution, and good agreements were obtained.

1. 서 론

모든 자성 재료(ferromagnetic, ferrimagnetic

material)는 히스테리시스 특성을 갖고 있으며, 해석 대상의 전기기기 또는 재료 특성에 따라서는 이를 무시하고 선형 또는 히스테리시스가 없는 단순한 비선형 자기 특성으로 생각할 수 있다. 그러나 ferrite계의 재료가 사용된 리액터, 변압기나 영구자석 착자기, 자기 기록 장치, 히스테리시스 모터 등을 다룰 때에는 히스테리시스 현상을 고려

*正 會 員 : 金星社 家電研究所 先任研究員
 **正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 博士課程
 ***正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 教授
 接受日字 : 1989年 7月 15日
 1次修正 : 1989年 10月 30日

하여 자기 시스템을 해석할 필요가 있다. 한편 1970년대 초반 유한 요소법이 전기기기의 자계 해석에 도입된 이래, 단순한 비선형 자기 특성을 갖는 자계 해석에 대해서는 충분한 성과를 얻어왔으나[1], 히스테리시스 특성을 갖는 자계의 해석에 있어서는 아직 완전히 만족할만한 연구 결과는 없는 것으로 생각된다.

이 문제는 특히 자기 기록 시스템의 자계 해석을 위해 계속 연구되어 왔는데, 그간의 연구 방향은 크게 세가지로 볼 수 있다. 첫째는 "self consistent" 모델[2]을 이용한 방법[3]으로, 자화된 영역(기록매체)과 다른 영역(자기 헤드)간의 상호작용을 고려하지 않는 점에서 근본적인 문제점을 갖고 있으며, 자기 기록 시스템 외에 리액터, 착자기 등에는 적용할 수 없는 방법으로 생각된다. 둘째, 히스테리시스 특성을 갖는 매체를 유한개의 입자로 보고, 이 입자들을 astroid 모델 또는 Stöner-Wohlfarth 모델을 이용, 미시적 열역학적 입장에서 표현하고 유한 요소법을 적용하는 방법[2, 4]이다. 이 방법은 재료의 B-H 특성을 미시적인 입장에서 표현하는 만큼 재료 특성 차이에 따른 파라미터를 결정하기가 힘들며, 입자의 수를 충분히 크게 잡지 않으면 계산의 정밀도가 떨어지므로 유용한 방법으로는 볼 수 없다. 셋째는 히스테리시스 특성을 초기 자화 곡선과 크고 작은 메이저(major) 루프 데이터로 처리하고 유한 요소법을 적용하는 방법[5-8]이다. 이 방법은 특정 입력에 대한 특정 출력의 실험 데이터(메이저 루프)를 이용, 비선형 해석을 하는 방법이므로 입력 전류에 고조파가 포함되어 있거나, 부분적으로 자계에 고조파가 생겨서 마이너 루프가 생기는 경우에는 큰 오차가 생기게 된다. 따라서 히스테리시스 현상을 고려한 해석이라기 보다는 단순한 비선형 해석의 확장으로 간주하는 것이 타당할 것이다. 그외 차분법이나 퍼미언스법을 이용하여 해석을 시도한 연구들[9, 10]이 있으나 차분법이나 퍼미언스법 자체가 갖는 제한성 때문에 그 응용 범위는 제한된 분야에 한정될 수 밖에 없다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 히스테리시스 현상 자체를 자계 입력에 대한 자화 출력의 수학적 모델로 표현하고 유한요소해석을 적용하는 방법을 생각할 수 있다. 본 연구에서는 프라이자흐 모델을 이용하여 히스테리시스 특성을 고려한 자계의 유한 요소 해석을 제안한다. 자성 재료의 변위 전류를 무시하면, 이 자성 재료의 자화값은 프라이자흐 모델로부터 입력 자계와 가중 함수의 이중 적분 형태로 표시된다. 또, 자기 벡터 포텐

셜을 이용하면, 영구 자석을 포함하는 자계 해석 문제와 같은 형태의 지배 방정식을 세울 수 있다. 결국 히스테리시스 특성을 고려한 자계 해석은 자화값 M 에 대한 비선형 방정식의 문제가 되며, 반복계산법(iteration method)을 이용, 그 해를 구할 수 있다. 즉, 각 요소의 초기 자화값을 가정하고 이 지배 방정식에서 계산된 벡터 포텐셜 값으로부터 자계를 구한다. 프라이자흐 모델로부터 이 자계에 따른 자화값을 구하여 초기 자화값을 수정하고, 다시 반복계산을 수행하면, 히스테리시스 현상을 고려한 자계의 유한 요소 해석이 가능하게 된다. 수렴은 각 요소 자화값의 상대 오차를 이용하여 판정하였다. 이상에서 제안한 방법을 소프트웨어 EI 코어 리액터에 적용하여 실험치와 수치해를 비교하고, 그 유용성을 확인하였다.

2. 히스테리시스 모델

강자성체의 히스테리시스 현상을 모델링하기 위한 프라이자흐 모델[11-14]에 대해서 설명한다.

입력 $u(t)$, 출력 $f(t)$ 로 표현되는 트랜스듀서에서 입력-출력의 관계가 multi-branch의 비선형이고 branch에서 branch의 전이(transition)가 입력의 극값(extremum)에 따라 결정되면 이 트랜스듀서를 히스테리시스 트랜스듀서로 정의한다. (그림 1, 그림 2)

또한 이 트랜스듀서의 branch가 현재 입력과 과거값(과거의 극값)에 따라 결정되고, 입력의 시간



그림 1 히스테리시스 트랜스듀서(HT)
Fig. 1 Hysteresis transducer (HT)

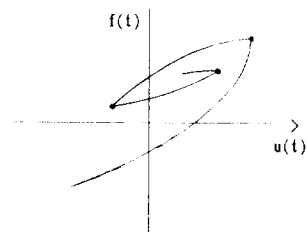


그림 2 히스테리시스 트랜스듀서의 multi-branch 비선형 특성.
Fig. 2 Multi-branch nonlinear characteristic of hysteresis transducer

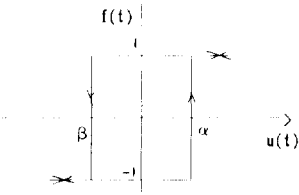


그림 3 요소 히스테리시스 오퍼레이터
Fig. 3 Elementary hysteresis operator

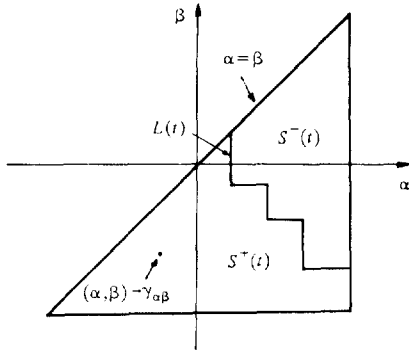


그림 4 프라이자흐 모델의 기하 표현
Fig. 4 Geometric representation of Preisach model

변화율 $\left(\frac{du(t)}{dt}\right)$ 에 무관하면 정적(static) 히스테리시스로 정의한다.

프라이자흐 모델에서 정적 히스테리시스는 기본(elementary) 히스테리시스 오퍼레이터, 가중 함수 및 입력의 이중 적분형태로 표시된다. 먼저 기본 히스테리시스 오퍼레이터 $\gamma_{\alpha\beta}$ 는 그림 3과 같이 입력이 증가할 때 입력 α 에서 -1 에서 $+1$ 로, 입력이 감소할 때 입력 β 에서 $+1$ 에서 -1 로 스위칭하는 오퍼레이터이며, $\alpha \geq \beta$ 의 관계가 있다.

또 $\alpha\beta$ 평면에서 $\gamma_{\alpha\beta}$ 의 갯수(가중치)를 고려하기 위하여 가중 함수 $\mu(\alpha, \beta)$ 를 도입하면 출력 $f(t)$ 는

$$f(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha\beta} u(t) d\alpha d\beta \quad (1)$$

로 나타낼 수가 있다.

$\alpha \geq \beta$ 인 반평면을 다음 식(2)와 같이 $S^+(t)$, $S^-(t)$ 의 두 영역으로 나누면,

$$\begin{aligned} S^+(t) : \gamma_{\alpha\beta} u(t) &= 1 \\ S^-(t) : \gamma_{\alpha\beta} u(t) &= -1 \end{aligned} \quad (2)$$

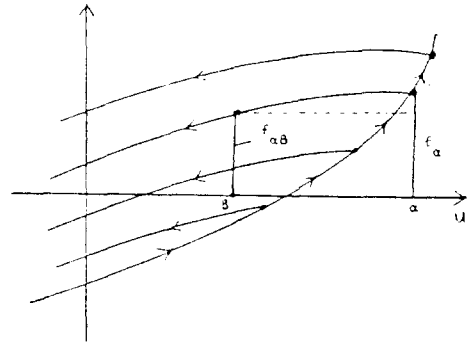


그림 5 전이 곡선
Fig. 5 Transition curve

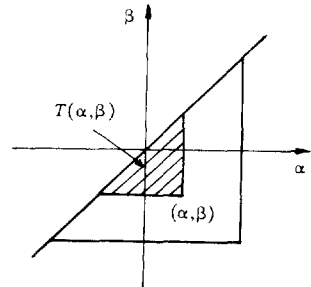


그림 6 $T(\alpha, \beta)$
Fig. 6 $T(\alpha, \beta)$

이 되고, 다시 출력 $f(t)$ 는

$$f(t) = \iint_{S^+(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (3)$$

로 쓸 수 있다.

여기서 영역 $S^+(t)$ 와 $S^-(t)$ 의 경계 $L(t)$ 는 그림 4와 같이 계단 형태로 되며, 첨점(vertex)은 입력의 극값에 따라서 결정된다.

트랜스듀서의 히스테리시스 특성을 규정하는 가중 함수 $\mu(\alpha, \beta)$ 를 정하기 위해 그림 5의 전이 곡선에서 다음 식 (4)를 정의한다.

$$F(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (f_\alpha - f_{\alpha\beta}) \quad (4)$$

이 값은 입력 $u(t)$ 가 α 까지 증가한 후 β 로 감소했을 때의 출력의 변화량으로 $T(\alpha, \beta)$ 평면에서

$$F(\alpha, \beta) = \iint_{T(\alpha, \beta)} \mu(x, y) dx dy$$

$$\mu = \int_a^x \int_b^y \mu(x, y) dx dy \tag{5}$$

로 쓸 수 있다.
식 (5)로부터

$$\mu(\alpha, \beta) = -\frac{\partial^2 F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \tag{6}$$

의 관계를 얻는다. 따라서, 실험을 통해 그림 5와 같은 전이 곡선을 구하여 가중함수 $\mu(\alpha, \beta)$ 을 정할 수 있게 된다. 단, 실제 계산[14]에서는 $F(\alpha, \beta)$ 를 이용한다.

자성체의 히스테리시스 현상에 대해서 입력 $u(t)$ 는 자계 $H(t)$, 출력 $f(t)$ 는 자화 $M(t)$ 로 대응된다.

3. 기본 방정식

자성체의 전기 저항률이 크거나, 입력 자계의 시간 변화율이 작으면 변위 전류를 무시할 수 있다(정적 히스테리시스). 따라서 히스테리시스 재료의 자화값 $M(t)$ 는 다음 식 (7)로 표시되고 앞의 프라이자흐 모델로부터 계산될 수 있는 양이 된다.

$$M(t) = M_x(t, H_x(t)) \hat{a}_x + M_y(t, H_y(t)) \hat{a}_y + M_z(t, H_z(t)) \hat{a}_z \tag{7}$$

여기서

- \hat{a}_x : x방향의 단위 벡터
- \hat{a}_y : y방향의 단위 벡터
- \hat{a}_z : z방향의 단위 벡터

한편, 영역내의 자속 밀도 B 는 자계의 세기를 H , 진공중의 자기 저항율을 ν_0 라 하면 다음 식 (8)과 같이 쓸 수 있다.

$$B = \frac{1}{\nu_0} H + M \tag{8}$$

기타 히스테리시스 효과가 무시되는 자성체는 식 (9)와 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$B = \frac{H}{\nu} \tag{9}$$

여기서 투자율 ν 는 자계 H 의 함수이다. 대상 영역에 두 재료가 같이 있는 경우는 이들은 개별적으로 취급하거나, 히스테리시스를 무시하는 재료의 가중 함수를 $\mu(\alpha, \beta) = 0$ ($\alpha \neq \beta$)로 처리할 수도 있다.

식 (8)에서 암페어 법칙을 적용하면 다음 식 (10)과 같이 된다.

$$\nabla \times \frac{1}{\nu_0} (B - M) = J_0 \tag{10}$$

여기서 J_0 는 강제 전류 밀도이다. 자기 벡터 포텐셜 A 를 다음과 같이 정의하면,

$$\nabla \times A = B \tag{11}$$

$$\nabla \cdot A = 0 \tag{12}$$

다음 식 (13)이 얻어진다.

$$\nu_0 \nabla \times \nabla \times A = J_0 + J_m \tag{13}$$

여기서

$$J_m = \nu_0 \nabla \times M \tag{14}$$

이고, J_m 은 등가자화 전류밀도로 정의된다.

해석 영역을 다음과 같이 x, y 평면에서 2차원으로 가정하면,

$$J_0 = J_{z0} \hat{a}_z \tag{15}$$

$$A = A_z \hat{a}_z \tag{16}$$

$$M = M_x \hat{a}_x + \tilde{M}_y \hat{a}_y \tag{17}$$

로 되고, 식 (10)은

$$\nu_0 \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right] + J_{z0} + J_m = 0 \tag{18}$$

여기서,

$$J_m = \nu_0 \left[\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right] \tag{19}$$

로 정리된다.

갤러킨 법에 의해 식 (18)을 각 요소 e 에 대해

정식화하면 식 (20)이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 I_{ie} = & \iint_{s_e} \sum_{i=1}^3 \nu_0 \left(\frac{\partial N_{ie}}{\partial x} \frac{\partial N_{he}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \frac{\partial N_{he}}{\partial y} \right) A_{he} dx dy \\
 & - \int_{s_e} \nu_0 \left(M_x^e \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} - M_y^e \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} \right) dx dy \\
 & - \int_{s_e} J_{z0} N_{ie} dx dy \quad (20)
 \end{aligned}$$

여기서 N_{ie} : 형상함수

식 (20)의 형태는 영구 자석을 포함하는 자계 해석과 같고, 결국 히스테리시스를 고려한 자계 해석은 M_x, M_y 에 대한 비선형 방정식의 풀이 과정으로 귀착된다.

4. 계산 과정

반복계산방법은 과소완화법 (relaxation method)을 사용한다. 자성체 부분의 한 요소 e 에 대한 계산 과정을 보면 다음과 같다.

Step 0 : 시간 스텝 $k=0$ 에서 전류 밀도 $J_{z0}^{(0)}=0$, 초기 자화 $M_x^{(0)}=0, M_y^{(0)}=0$ 로 설정한다.

Step 1 : 시간 스텝 k 에서 전류 밀도 $J_{z0}^{(k)}$ 가 주어지고, 초기 자화값은 $M_{x,0}^{(k)}=M_x^{(k-1)}, M_{y,0}^{(k)}=M_y^{(k-1)}$ 로 설정한다.

Step 2 : 시간 스텝 k , 반복 계산 회수 i 에서 초기 자화값을 $M_{x,i}^{(k)}=M_{x,i-1}^{(k)}, M_{y,i}^{(k)}=M_{y,i-1}^{(k)}$ 로 설정한다.

Step 3 : 초기 자화값을 등가 전류 밀도 J_m 으로 환산(식 (19))한다. 유한요소 루틴에서 앞의 식 (18)을 풀어 각 절점의 벡터 포텐셜 A 를 구한다. 이 포텐셜 값으로부터 요소 e 의 자속 밀도 $B_{x,i}^{(k)}, B_{y,i}^{(k)}$ 를 구한다.

Step 4 : step 3에서 구한 자속 밀도값과 초기 자화값을 이용, 다음식으로부터 각 요소의 자계 $H_{x,i}^{(k)}, H_{y,i}^{(k)}$ 를 구한다.

$$H_{x,i}^{(k)} = \nu_0(B_{x,i}^{(k)} - M_{x,i}^{(k)})$$

$$H_{y,i}^{(k)} = \nu_0(B_{y,i}^{(k)} - M_{y,i}^{(k)})$$

Step 5 : 프라이자흐 루틴에서 입력자계 $H_{x,i}^{(k)}, H_{y,i}^{(k)}$ 에 따른 자화값 $M_{x,i+1}^{(k)}, M_{x,i+1}^{(k)}$ 을 구한다.

Step 6 : 자성체 영역의 각 요소에 대해, 다음 식을 이용, 오차 e_x, e_y 가 허용치 안으로 들어왔는가를 판정한다.

$$e_x = \frac{M_{x,i+1}^{(k)} - M_{x,i+1}^{(k)}}{M_{x,i+1}^{(k)}}$$

$$e_y = \frac{M_{y,i+1}^{(k)} - M_{y,i+1}^{(k)}}{M_{y,i+1}^{(k)}}$$

자성체 영역의 모든 요소에 대해 오차가 허용치 이내로 들어온 경우 step 8로 가고, 아닌 경우 step 7로 간다.

Step 7 : 계산된 자화값은 다음과 같이 수정하고 i

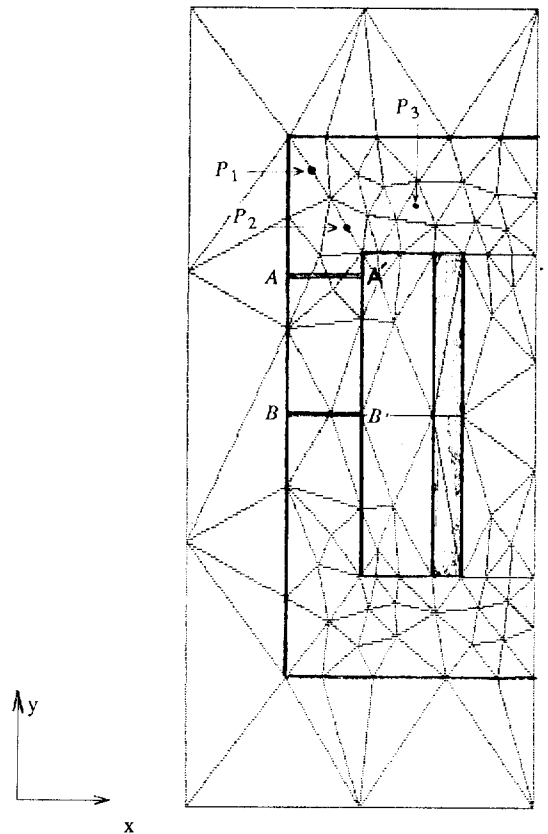


그림 7 EI코어의 요소 분할도 (짙은 부분 : 전류 영역)

Fig. 7 Finite element mesh for EI-core

$= i+1$ 로 하고, step 2로 간다,

$$M_{x,i+1} = M_{x,i} + p(M_{x,i+1} - M_{x,i})$$

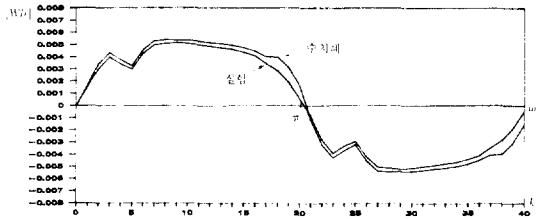
$$M_{y,i+1} = M_{y,i} + p(M_{y,i+1} - M_{y,i})$$

여기서, p 는 완화계수(relaxation factor)이다.

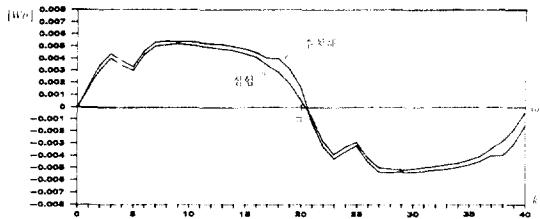
Step 8 : 시간 스텝 k 에서의 자계 $H_x^{(k)}$, $H_y^{(k)}$ 를 프라이자흐 루틴에 기억시키고 계산 결과를 출력한다. 다음, $k=k+1$ 로 하고, step 1로 가서 다음 시간 스텝의 계산을 수행한다.

5. 사례 연구 및 검토

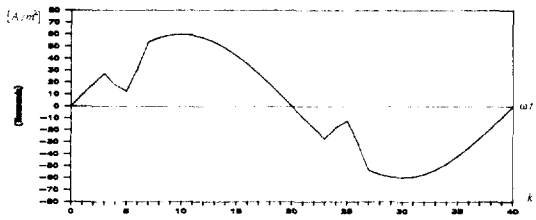
히스테리시스 현상을 고려한 경우에는 해석해를 갖는 적당한 예를 찾을 수 없으므로 수치해를 실



(a) A-A' 자속
(a) A-A' flux



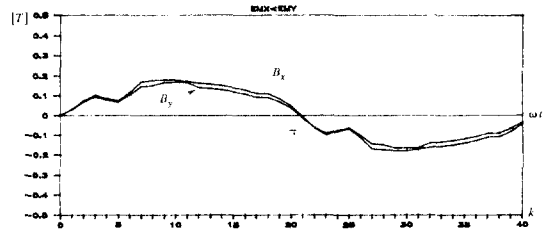
(b) B-B' 자속
(b) B-B' flux



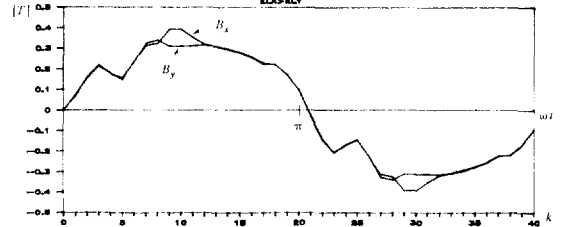
(c) 전류 밀도
(c) Current density

그림 8 실험값과 수치해의 비교

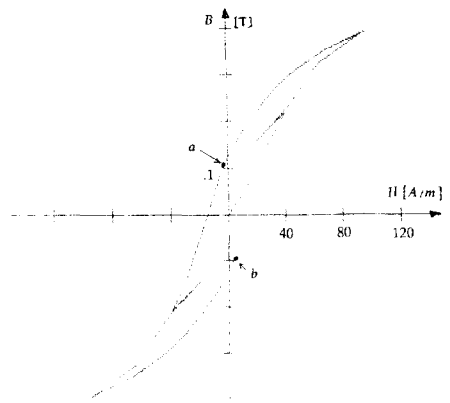
Fig. 8 Experimental results and finite element solution



(a) P_1 의 자속 밀도
(a) flux density at P_1



(b) P_2 의 자속 밀도
(b) flux density at P_2



(c) P_3 의 B-H 변화
(c) flux density and field at P_3

그림 9 해석 결과

Fig. 9 Calculation results

험값과 비교하여야 한다. 해석 대상으로는 소프트웨어의 EI코어를 선정하였다. 이 코어의 특성, 전이 곡선의 실험 결과는 부록 A와 같다. 페라이트 재료는 전기 저항률이 $10^{-1} \sim 10^{-2} [Q \cdot m]$ 로 철의 10^6 배 정도이므로 수 kHz 이하의 자계변화에 대해서는 변위 전류는 충분히 무시된다. 전이 곡선의 실험치로부터 100×100 의 $F(\alpha, \beta)$ 테이블을 작성하고, 중간값에 대해서는 선형으로 보간하였다.

요소는 1차 삼각형 요소를 택하였고, 대칭성을

고려하여 1/2 평면에 대해서만 해석 영역을 취하였다. 그림 7은 요소 분할도이고, 전체 요소수는 148개(자성체 영역 104개), 절점수는 83개 이다.

도체의 전류 밀도 $J_{z0}(t)$ 는

$$J_{z0}(t) = J_1(t) + J_2(t) [A/m^2]$$

여기서,

$$J_1(t) = 60000 \sin(\omega t)$$

$$J_2(t) = \begin{cases} 30000 \sin(6\omega t) & \frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq \frac{\pi}{3} \\ -30000 \sin(6\omega t) & \frac{7}{6}\pi \leq \omega t \leq \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

로 주어진 것으로 하여 해석 및 실험 ($\omega \leq 2\pi \times 0.1$ [rad/s])을 하였다. 해석에서는 위의 2π 한 주기를 40 스텝으로 나누어 계산하였다. (그림 8(c))

그림 8(a), (b)는 그림 8(c)의 전류 밀도 변화에 따른 $A-A'$ 및 $B-B'$ 면을 통과하는 자속의 실험값과 수치해이다. 수치해는 완화계수 0.3, 허용 오차 1%에서 각 시간 스텝에 대해 반복 계산 회수 20회 정도에서 수렴하였다. 그림에서 보면 자속이 히스테리시스 효과로 인해 전류 밀도 변화에 대해 지연(lag)되고, 특히 전류가 0($\omega = \pi, 2\pi$)인 때에 대해서도 자속 값은 0이 아닌 것(잔류 자속)을 알 수 있다. 자속의 실험치가 수치해보다 약간 작고, 히스테리시스 효과가 적게 나타나는 것은 실험상 E코어와 I코어 사이의 공극을 자기적으로 완전히 0으로 할 수는 없었던 것($10\mu m$ 이하)에 기인하는 것으로 보인다. 오차는 5~15% 정도였으나, 좀 더 정밀한 실험을 하고, 요소 분할수를 늘리면 정밀도는 더욱 향상되리라 본다.

그림 9 a), b)는 같은 전류 밀도 변화에 따른 E코어 모퉁이 P_1, P_2 점에서의 x 방향, y 방향 자속 밀도 B_x, B_y 이다. 그림 9 c)는 P_3 에서 전류 변화에 따른 x 방향 자계와 자속 밀도의 관계로 a, b 점은 $J_{z0} = 0$ ($\omega = \pi, 2\pi$)인 경우에 해당되고 자기 감자(self demagnetization)에 의해 역자계가 걸린 상태를 보이고 있다. 그림 9의 해석 결과에 대해서는 적절한 실험 방법을 찾지 못하여, 실험치와 비교 검토는 하지 못했으나, 그 추이가 물리적인 사실과 잘 부합되는 것으로 생각된다.

6. 결 론

프라이자흐 모델을 이용하여 히스테리시스 현상을 갖는 자계의 유한 요소 해석 알고리즘을 제시하였다. 히스테리시스 모델로 입출력 모델인 프라이자흐 모델을 사용, 마이너루프 등의 묘사가 가

능하며, 유한 요소 해석이므로 복잡한 형상의 해석에 대해서도 적용이 가능하다. 이를 소프트 페라이트 EI core에 적용하여 유한 요소해와 실험치를 비교한 결과, 해석의 정확성을 확인할 수 있었다. 이 방법은 이외에도 영구 자석 착자기(특히 페라이트 자석), 히스테리시스 모터, 자기 기록 헤드의 해석 및 설계에 적용할 수 있으며, 매우 유용한 결과를 얻을 수 있으리라 생각된다. 앞으로의 연구 과제로 히스테리시스 뿐만 아니라 변위 전류를 함께 고려하여 해석하는 것이 필요하며, 수렴을 빠르게 하기 위해서 뉴우튼 알고리즘을 이용하는 것도 생각할 수 있다.

부 록 A

표 A1. 페라이트의 특성

Table A1. Ferrite characteristics

잔류 자속 밀도($H=800$ [A/m])	0.12[T]
포화 자속 밀도($H=800$ [A/m])	0.47[T]
보 자 력	16[A/m]
고 유 지 항	1[Ωm]

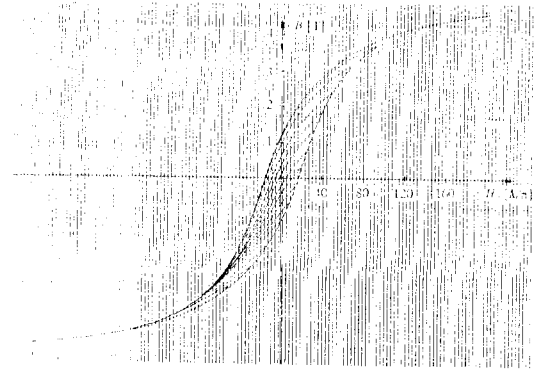


그림 A-1 페라이트의 전이 곡선

Fig. A-1 Transition curve

참 고 문 헌

- [1] P.P. Silvester et. al., Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University Press, 1983, p. 121
- [2] M. Feliachi et al., "Two Dimensional Hysteresis Model using Finite Element Method,"

- IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-21, no. 6, pp. 2362-2365 November 1985.
- [3] N. Brais et al., "Numerical Modeling of Iron Losses in Ferromagnetic Steel Plate," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-18, no. 2, pp. 558-562 March 1982.
- [4] C. Lefrance et al., "On Numerical Modeling of Hysteresis in Recording System," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-20, no. 5, pp. 1891-1893 September 1984.
- [5] T. Nakata et al., "Finite Element Analysis of Magnetic Fields Taking into Account Hysteresis Characteristics," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-21, no. 5, pp. 1856-1858 September 1984.
- [6] A. Savini "Modeling Hysteresis Loops for Finite Element Magnetic Field Calculations," IEEE Trans. on Mag., vol. mag-18, no. 2, pp. 552-557 March 1982.
- [7] J.R. Desserre "Simulation of the Writing Process using Finite Elements and Augmented Lagrangian Methods," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-18, no. 1, pp. 238241 January 1982.
- [8] S.S. Udpa et al., "Numerical Modeling of Residual Magnetic Phenomena," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-21, no. 6 pp. 2165-2168 November 1985.
- [9] Y. Saito et. al., "Hysteresis Fields in a Toroidal Reactor," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-20, no. 5, pp. 1965-1967 September 1984.
- [10] Y. Saito, "Three Dimensional Analysis of Magnetodynamic Fields in Electromagnetic Devices Taken into Account the Dynamic Hysteresis Loops," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-18, no. 2, pp. 546-551 March 1982.
- [11] I.D. Mayergoyz "Mathematical Models of Hysteresis," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-22, no. 5 pp. 603-608 September 1986
- [12] K. Okumura et al., "Digital Simulation of Hysteresis Characteristics and its Applications," IEE Japan Trans. B vol. 103, no. 7, pp. 451-458 July 1983.
- [13] Y. Saito, et al., "A representation of Magnetic Hysteresis," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-20, no. 5, pp. 1434-1463 September 1984.
- [14] T. Doong et al., "On Numerical Implementation of Hysteresis Models," IEEE Trans. on Mag., vol. Mag-21, no. 5 September 1985.