

비선형궤환을 이용한 간접극배치 적응제어기

Indirect Pole Placement Adaptive Controllers using a Nonlinear Feedback

金 洪 必* · 梁 海 元**
(Hong-Pil Kim · Hai-Won Yang)

요 약

본 논문에서는 임의의 영점을 갖는 이산시간계통에 비모형화특성이나 외란이 존재할 경우의 극배치 간접적응제어기 설계문제를 다루었다. 플랜트 파라미터와 제어기 파라미터들이 각각 별도의 추정기를 통해서 얻어진다. 추정된 플랜트의 가제어성이 가능한 한 코드로록 해주기 위해 비선형 궤환을 도입하였다. 유한시간이 지나면 이 비선형궤환은 더 이상 가해지지 않고 전체제어알고리즘은 표준극배치 제어알고리즘이 된다.

Abstract- This paper deals with an indirect pole placement adaptive controller design problem for discrete-time plants with arbitrary zeros in the presence of unmodeled dynamics and/or disturbances. The plant and controller parameters are estimated by separate estimators. The nonlinear feedback is introduced so that the estimated plant has as high degree of controllability as possible. The nonlinear feedback will be used in a finite time, after which the control algorithm becomes a standard pole placement one.

1. 서 론

극배치 간접적응제어에서는 제어하고자 하는 플랜트의 파라미터들을 먼저 추정하고, 그 다음 이 추정치들을 이용하여 Diophantine방정식으로 부터 제어기 파라미터들을 계산해낸다. 이러한 간접제어의 단점으로는 대수적인 연산에 의해 제어기 파

라미터를 구하는데 소요되는 시간이 전체제어 알고리즘 수행시간의 상당 부분을 차지한다는 것과, 추정된 플랜트의 가제어성문제가 발생한다는 것이다. 여기서 추정된 플랜트의 가제어성문제란 추정된 플랜트의 전달함수의 분자다항식과 분모다항식이 서로 소가 아니거나 또는 서로 소라 할지라도 매우 근접한 근들을 갖는다면 유계된 제어기 파라미터들이 구해지지 않는 경우를 말한다. 추정된 플랜트가 가제어성의 정도는 보통 플랜트의 파라미터의 추정치에 의해 결정되는 Sylvester행렬식의 값에 의해 결정된다[3, 4] 따라서 참값에 가까운

*正 會 員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 博士課程
 **正 會 員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博
 接受日字 : 1989年 7月 10日
 1次修正 : 1989年 9月 19日
 2次修正 : 1989年 10月 12日

추정치일수록 가제어성이 더크게 된다.

추정된 플랜트의 가제어성 문제는 플랜트 파라미터의 초기치에 의해 발생 될 수[3, 4]도 있고, 플랜트를 모델링할 때 파라미터수가 과다하게 책정될 때[5]도 발생될 수 있는데 이에 대한 대책은 아래와 같이 몇가지로 분류할 수 있다. 다음과 같은 Diophantine 방정식이 주어졌다고 하자,

$$A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1}) = A^*(q^{-1})$$

여기서 q^{-1} 는 단위시간 지연연산자이고, $A(t, q^{-1})$ 와 $B(t, q^{-1})$ 는 각각 t 스텝에서의 플랜트 전달함수의 추정된 분모다항식, 분자다항식이고, $A^*(q^{-1})$ 는 원하는 페루우프 다항식이다. Anderson과 Johnstone[3, 4]은 문제가 되는 $A(t, q^{-1})$ 와 $B(t, q^{-1})$ 는 그대로 두고 임의의 $R(t, q^{-1}), S(t, q^{-1})$ 다항식(즉 임의의 제어기)를 사용하는 방법을 제시하고 있다. Elliott등[6]의 방법도 여기에 속한다. Lozano와 Goodwin[7]는 $A(t, q^{-1})$ 와 $B(t, q^{-1})$ 가 서로 소기 되면서 동시에 근접한 근들을 갖지 않도록 교정해주는 방법을 제시하고 있다. Giri등[8]은 비선형계환[8~11]을 이용하여 파라미터 추정 오차를 줄여줌으로써 추정된 플랜트의 가제어성 문제를 해결하고있다. 이들 방법과는 달리 Berger

[5]등은 원하는 페루우프 다항식 $A^*(q^{-1})$ 를 적절히 변화시켜 추정된 플랜트의 가제어성 문제에 대처하는 방법을 제시하였다.

Mo와 Bayoumi[1]는 제어기 파라미터의 계산시간을 줄이기 위하여 별도의 파라미터 추정기를 도입하여 제어기 파라미터를 추정해내는 방법을 제시하였다. 이 방법은 Clarke[2]도 언급한 바 있으나, 저자들은 특수한 형태의 신호를 보조파라미터 추정기에 사용하고 있으며, 제어기 파라미터를 얻는데 소요되는 시간이 대폭적으로 줄어들고, 전체 제어시스템의 안정도 증명이 용이하고, 일시적인 추정된 플랜트의 가제어성 문제에 대해서 강인함을 제시하였다. 또 $A(t, q^{-1})$ 와 $B(t, q^{-1})$ 가 일시적으로 공통인자를 갖는다고 하여도 유계된 제어기 파라미터가 구해지므로 일시적인 추정된 플랜트의 가제어성문제에 대처할 수 있다. 그러나 제어기 파라미터 추정치는 정상상태에서 계산치에 수렴하므로 과도상태에서는 제어시스템내의 신호들의 커지는 단점이 있다. 본 논문에서는 비모형화특성이나 외란이 존재하는 플랜트 간접극배치 적응제어시 발생하는 두가지 문제점 즉, 계산상의 부담과 추정된 플랜트의 가제어성문제에 대한 해결방안을 제시하였다. 제시한 제어알고리즘의 특징은 첫째 비

모형화특성과 외란에 대해 강인한 간접극배치 적응제어 알고리즘이라는 것이다. 저자들이 일기로는 이러한 논문은 별로 없는 것으로 알고있다. 둘째 제어기 파라미터를 계산해 내지 않고 추정해냄으로써 계산상의 부담을 줄였다는 것이다. 셋째 비선형계환을 이용하여 추정된 플랜트의 가제어성 문제를 해결하였으며 또 쉽게 얻을 수 있는 정보(정규화된 방정식 오차)를 이용한다는 점이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 주어진 제어문제의 정식화에 대해서 기술하고, 3절에서는 간접적응제어 알고리즘을 설명하였고, 4절에서는 전체제어시스템의 안정도를 증명하였다. 그리고 5절에서는 본 논문에서 제안한 제어알고리즘의 타당성을 입증하기 위한 Simulation결과를 제시하였다. 마지막으로 6절에서는 결론을 서술하였다.

2. 문제의 정식화

제어하고자하는 플랜트는 이산시간 선형시불변 시스템으로 다음과 같은 차분방정식으로 기술한다.

$$\begin{aligned} A(q^{-1})\zeta(t) &= u(t) \\ y(t) &= B(q^{-1})\zeta(t) + \eta(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $u(t), y(t)$ 는 각각 플랜트의 입력 및 출력이고, $\zeta(t)$ 는 부분상태, $\eta(t)$ 는 모델링오차이고, $A(q^{-1})$ 와 $B(q^{-1})$ 는 다음과 같은 단위시간 지연연산자 q^{-1} 의 다항식이다.

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n} \end{aligned}$$

(1)식의 플랜트에 대해서 다음과 같은 가정을 한다.

- 가정 A1 : 플랜트의 차수 n 은 안다.
- A2 : $A(q^{-1})$ 와 $B(q^{-1})$ 는 서로 소 이다.
- A3 : $\|\theta_1\| \leq \rho_1$ 이다. 여기서 $\theta_1^T = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]$ 이고 ρ_1 은 알고 있는 양의 스칼라이다.
- A4 : $|\eta(t)| \leq \mu m(t)$ 이다. 여기서 $\mu > 0$ 는 상수이고, $m(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$m(t) = \sigma m(t-1) + \max\{|u(t-1)| + |y(t-1)|, 1\} \quad (2)$$

여기서 $0 < \sigma < 1$ 은 임의로 선택하고, $m(0) > 0$ 이다.

(1)식의 플랜트는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$y(t) = \phi_1^T(t)\theta_1 + \eta_1(t) \quad (3a)$$

$$\text{여기서 } \eta_1(t) = A(q^{-1})\eta(t) \quad (3b)$$

$$\phi_1(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-n)]^T \quad (3c)$$

$$\theta_1 = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T$$

그러면 가정 A3와 A4, 그리고 (2)식으로부터

$$|\eta_1(t)| \leq \nu_1 \mu(t) \quad (3d)$$

여기서 $\nu_1 = 1 + \rho_1 \sigma^{-n} \sqrt{n}$ 이다.

본 논문에서 다루고자하는 제어문제는 다음과 같다.

모든 $\mu(0 \leq \mu \leq \mu_0, \mu_0$ 는 상수)에 대해서

- 1) 폐루우프 적용제어계통내의 신호들이 모두 유계이고
- 2) 폐루우프계통의 극들이 차후에 정의되는 의미에서 모두 임의로 지정되도록 하는 강인한 극배치형 간접적응제어기를 설계하라.

3. 간접적응제어알고리즘

이 절에서는 플랜트 파라미터 추정방법에 대해서 먼저 설명한 다음 제어기 파라미터의 추정방법 및 제어입력합성에 대해 차례로 서술한다.

3.1 플랜트 파라미터의 추정

플랜트 파라미터 θ_1 은 다음과 같은 사구간을 채용한 정규화된 최소자승알고리즘을 이용하여 추정된다.

$$\theta_1(t) = \theta_1(t-1) + \frac{\alpha_1 P_1(t) \bar{\phi}_1^T(t) D(\bar{e}_1(t), d_1(\mu_0))}{1 + \bar{\phi}_1^T(t) P_1(t-1) \bar{\phi}_1(t)} \quad (4a)$$

$$P_1(t) = P_1(t-1) - \frac{P_1(t-1) \bar{\phi}_1(t) \bar{\phi}_1^T(t) P_1(t-1) \lambda_1(t)}{1 + \bar{\phi}_1^T(t) P_1(t-1) \bar{\phi}_1(t) \lambda_1(t)} \quad (4b)$$

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} \frac{\alpha_1 D(\bar{e}_1(t), d_1(\mu_0))}{\bar{e}_1(t)(1 + \bar{\phi}_1^T(t) P_1(t-1) \bar{\phi}_1(t))} & \text{만일 } |\bar{e}_1(t)| > d_1(\mu_0) \text{ 이면} \\ 0 & \text{그 이외의 경우} \end{cases}$$

$$D(\bar{e}_1(t), d_1(\mu_0)) = \begin{cases} \bar{e}_1(t) - d_1(\mu_0), & \text{만일 } \bar{e}_1(t) > d_1(\mu_0) \text{ 이면} \\ \bar{e}_1(t) + d_1(\mu_0), & \text{만일 } \bar{e}_1(t) < -d_1(\mu_0) \text{ 이면} \end{cases}$$

$$d_1(\mu_0) = \mu_0 \nu_1 \sqrt{1 + \bar{\alpha}_1}$$

여기서 모든 스칼라 혹은 벡터 sequence $\{s(t)\}$ 에 대해서 $\bar{s}(t) = s(t)/m(t)$ 이고 $0 < \alpha < 1$ 과 $\mu_0 > 0$ 는

임의로 선택한다. 그리고

$$e_1(t) = y(t) - \phi_1^T(t)\theta_1(t-1) \quad (5)$$

(4a)식은 파라미터 추정치 $\theta_1(t)$ 가 유계되도록 하기 위해 정규화된 추정오차 $e_1(t)$ 가 $D(\bar{e}_1(t), d_1(\mu_0))$ 로 대체된 최소자승알고리즘이다. 정규화 기법은 강인성을 증진시키기 위해서 도입되었다.

3.2 제어기 파라미터의 추정

흔히 쓰이고 있는 극배치형 간접적응제어 알고리즘에서는 플랜트 파라미터의 추정치로부터 Diophantine방정식을 풀어 제어기 파라미터를 계산해낸다. Mo와 Bayoumi[1]는 별도의 파라미터 추정기를 써서 플랜트 파라미터로부터 제어기 파라미터를 추정해내는 방법을 제시하였다. 본논문에서도 별도의 파라미터 추정기를 도입하는데, 이 방법의 장점은 제어기 파라미터 계산시간을 줄일 수 있다는 점이다.

$A(q^{-1})$ 와 $B(q^{-1})$ 에 대한 추정치를 각각 $A(t, q^{-1})$, $B(t, q^{-1})$ 라 하자. 그리고 원하는 폐루우프 다항식 $A^*(q^{-1})$ 는 다음과 같은, 그 근들이 모두 단위원내에 존재하는, $2n$ 차 다항식이라고 하자.

$$A^*(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{2n} q^{-2n}$$

그러면 흔히 쓰이는 극배치형 간접적응 제어알고리즘에서는 매스텝마다 다음의 Diophantine방정식을 풀어 제어기 파라미터를 구한다.

$$A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1}) = A^*(q^{-1}) \quad (6)$$

제어기 파라미터를 별도의 추정기를 써서 구하기 위해서 다음과 같이 정의한다.

$$\zeta m(t) \triangleq A^*(q^{-1})v(t) \quad (7a)$$

$$\zeta(t) \triangleq [A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1})]v(t) \quad (7b)$$

여기서 $v(t)$ 는 유계 신호이고 $R(t, q^{-1})$ 와 $S(t, q^{-1})$ 는 각각 다음과 같다.

$$R(t, q^{-1}) = 1 + r_1(t)q^{-1} + \dots + r_n(t)q^{-n}$$

$$S(t, q^{-1}) = s_1(t)q^{-1} + \dots + s_n(t)q^{-n}$$

그러면 (7b)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\zeta(t) = \bar{\Phi}^T(t)\theta_2(t) + A(t, q^{-1})v(t) \quad (8a)$$

여기서

$$\bar{\Phi}^T(t) = [A(t, q^{-1})v(t-1), A(t, q^{-1})v(t-2), \dots, A(t, q^{-1})v(t-n), -B(t, q^{-1})v(t-1), \dots, -B(t, q^{-1})v(t-n)]$$

$$\theta_2^T(t) = [r_1(t), \dots, r_n(t), s_1(t), \dots, s_n(t)] \tag{8b}$$

$$\tag{8c}$$

따라서 제어기 파라미터는 다음과 같이 추정해 낼 수 있다.

$$\theta_2(t) = \theta_2(t-1) + P_2(t-1)\Phi(t-1)(\xi_m(t) - \tilde{\xi}(t)) \tag{9a}$$

$$P_2^{-1}(t-1) = P_2^{-1}(t-2) + \hat{\Phi}(t-1)\hat{\Phi}^T(t-1), \tag{9b}$$

$$P_2(-1)^{-1} > 0$$

regression 벡터 $\hat{\Phi}(t)$ 를 매스텝마다 수정해주기 용이하게 하기 위해서 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{\xi}_2(t) = \hat{\Phi}_2^T(t)\theta_2(t) + A(t, q^{-1})v(t) \tag{10a}$$

$$\hat{\Phi}_2^T(t) = [A(t-1, q^{-1})v(t-1), \dots, A(t-n, q^{-1})v(t-n), -B(t-1, q^{-1})v(t-1), \dots, -B(t-n, q^{-1})v(t-n)] \tag{10b}$$

최종적으로 제어기 파라미터 $\theta_2(t)$ 는 다음과 같이 추정된다.

$$\theta_2(t) = \theta_2(t-1) + P_2(t-1)\hat{\Phi}_2^T(t)(\xi_m(t) - \tilde{\xi}_2(t)) \tag{11a}$$

$$P_2^{-1}(t-1) = P_2^{-1}(t-2) + \hat{\Phi}_2(t-1)\hat{\Phi}_2^T(t-1), \tag{11b}$$

$$P_2^{-1}(-1) > 0$$

여기서 $\tilde{\xi}_2(t)$ 와 $\hat{\Phi}_2(t)$ 는 각각 (10a)와 (10b)식으로 주어진다.

3.3 제어칙

(4a)~(4b)식의 추정기로부터 얻어지는 플랜트 파라미터 추정치들은 항상 유계이고, 점차 시간이 흐를수록 따라 수렴한다. 이 추정치들을 이용하여 (11)식의 추정기로부터 제어기 파라미터를 추정해 내면 $A(t, q^{-1})$ 와 $B(t, q^{-1})$ 가 일시적으로 공통인자를 갖는다고 하여도 유계된 제어기 파라미터가 얻어진다는 장점이 있어 일시적인 추정된 플랜트의 가제어성 문제에 대처할 수 있다. 그러나 $A(t, q^{-1})$ 와 $B(t, q^{-1})$ 의 수렴치가 서로 공통인자를 갖거나 또는 서로 근접한 근들을 가질 가능성이 있으므로 이에 대한 대책이 필요하게 된다.

본 논문에서는 추정된 플랜트의 가제어성이 될 수 있는 한 크도록 해주기 위하여 비선형체환을 도입하였다. Kreisselmeier와 Smith[9], Kreisselmeier[11]들은 비선형체환을 도입하여 적응제어계통에 자기여기(self-excitation)능력을 부여하고 있다. Giri등[8]은 이 비선형체환을 추정된 플랜트의 가제어성을 크게 하는데 이용하고 있다. 본 논문

에서도 이와 동일한 목적으로 비선형체환을 도입하는데, 플랜트의 불확실성에 대처하기 위해 사구간을 채용한 파라미터추정기를 사용하므로 외란이나 비모형화특성이 없는 경우의 Giri등[8]과는 달리 추정된 플랜트의 가제어성을 충분히 크게 할 수는 없게 된다.

그러면 제어입력은 다음과 같이 합성한다.

$$R(t, q^{-1})u(t) = S(t, q^{-1})y(t) + A^*(q^{-1})y^*(t) + f(t) \tag{12a}$$

$$f(t) = \begin{cases} \alpha + \beta m(t), \text{ 만 일 } \{t=4nk, k=1, 2, \dots\} \text{ 이 고} \\ \{a(\tau) \neq 0 \text{ 이 되는 } \tau(t-6n+1 \leq \tau \leq t-2n) \text{ 이 존재}\} \\ 0, \text{ 그 이외의 경우} \end{cases} \tag{12b}$$

여기서 $a(t) = |D(\bar{e}_1(t), d_1(\mu_0))|$ 이다.

그리고 여기서 $y^*(t)$ 는 유계인 외부입력이고

$$|y^*(t)| \leq y^*, \forall t \tag{13}$$

이다. 또

$$\alpha = 8n\sqrt{n} \left(1 + \sum_{i=1}^{2n} |a_i^*| \right) y^* \tag{14}$$

이고 $\beta > 0$ 는 임의의 상수이다.

(12a)식의 제어기는 흔히 쓰는 극배치 적응제어기에 비선형체환 $f(t)$ 가 추가된 형태이다. $f(t)$ 의 발생여부는 참고문헌[8-11]의 경우와는 달리 $a(t)$ 값에 의해 결정되므로 손쉽게 얻어낼 수 있고, 별다른 사전정보[8]나, 새로운 물리량[11]을 정의해줄 필요가 없다. 정규화된 방정식오차 $e_1(t)$ 가 사구간내에 들어가면 더 이상 플랜트 파라미터의 수정이 이루어지지 않으므로 $f(t)$ 는 더 이상 가해지지 않게 된다. $f(t)$ 를 가하면 파라미터 오차를 줄일 수 있다는 것은 Proposition 5에서 설명된다.

4. 제어계통의 안정도

이 절에서는 전체 제어계통의 안정도를 증명하는데 먼저 파라미터 추정기의 특성들이 언급된다. 그 다음 어느 정도 시간이 흐르면 추정된 플랜트의 가제어성이 충분히 된다는 것을 설명하고, 최종적으로 전체 폐루프계통의 안정도를 보인다. 본 논문의 제어알고리즘에서도 두개의 파라미터 추정치가 쓰인다는 점에 착안하면, Giri[10]의 연구결과를 그대로 적용하여 쉽게 안정도를 증명

할 수 있다. 그러나 본 논문은 간접제어방정식이 고, Giri[10]은 직접제어 방식이므로 다루고 있는 주제는 전혀 다르다.

4.1 전체 페루우프계통의 특성

Proposition 1[10]

임의의 스칼라 μ_0 가 주어졌을 때 모든 $\mu(0 \leq \mu \leq \mu_0)$ 에 대해서 플랜트 파라미터 추정알고리즘 (4) 식은 다음과 같은 특성을 갖는다.

- 1) $\|\theta_1(t)\| \leq \rho'$
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\bar{e}_1(t), d_1(\mu_0)) = 0$
- 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta_1(t) - \theta_1(t-1)\| = 0$

Proposition 2[1]

유한한 구간 $N(\infty > N > 4n-1)$ 은 정수)에서 $v(t)$ 는 다음과 같은 형태의 신호라고 하자.

$$V(jN - t) = \begin{cases} 0 & \text{만일 } t=1, 2, \dots, 2n-1, 2n \\ & +1, \dots, 4n-1 \\ 1 & t=2n \\ \gamma & 4n \leq t \leq N \\ 0 & t \geq jN \end{cases}$$

여기서 $j > 0$ 는 정수이고, γ 는 임의의 실수이다. 그러면 (11)식의 파라미터 추정기로부터 얻어지는 제어기 파라미터 $\theta(t)$ 는 다음 Diophantine방정식의 해로 수렴한다.

$$\bar{A}(q^{-1})\bar{R}(q^{-1}) + \bar{B}(q^{-1})\bar{S}(q^{-1}) = A^*(q^{-1})$$

여기서 $\bar{A}(q^{-1}) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t, q^{-1})$, $\bar{B}(q^{-1}) = \lim_{t \rightarrow \infty} B(t, q^{-1})$ 이다.

Proposition 3

모든 $t \geq n$ 에 대해서 다음 식을 만족하는 양의 상수 Km_1 과 Km_3 가 존재한다.

$$\frac{m(t+1)}{m(t)} \leq \begin{cases} \text{만일 } \{t=4nk, k=1, 2, \dots\} \text{이고 } \{a(\tau) \neq 0 \\ (Km_1 + \mu Km_2 + \beta), \text{ 인 } \tau(t-6n+1 \leq \tau \leq t-2n) \text{이 존재}\} \\ (Km_1 + \mu Km_2) \text{ (그 이외의 경우)} \end{cases}$$

(증명) 부록 1참조.

Proposition 4

임의의 양의 상수 β 가 주어졌을 때, 만일 $0 \leq \mu \leq \mu(\beta)$, $t \geq T_0(\beta)$, $a(t) \neq 0$ 이라고 하면, w 를 임

의 $2n$ 차 단위벡터라고 할 때 최소한 하나의 $\tau(1 \leq \tau \leq 10n-1)$ 에 대해서

$$|w^T \bar{\phi}_1(t+\tau)| \geq \delta(\beta)$$

가 되는 상수 $\mu(\beta) > 0$, $\delta(\beta) > 0$ 가 존재한다.

(증명) 부록 2참조.

Proposition 5

1) 모든 $\mu(0 \leq \mu \leq \mu_0)$ 에 대해서

$$a(t) = 0, \quad \forall t \geq T_c$$

가 되는 유한한 정수 $T_c > T_0(\beta)$ 가 존재한다. 따라서

$$f(t) = 0, \quad \forall t \geq T_c$$

가 된다.

2) $t \rightarrow \infty$ 됨에 따라

$$\delta(\beta) \|\bar{\theta}_1(t)\| \leq d(\beta)$$

여기서 $d(\beta) = d_1(\mu_0) + \mu$ 이고, $\bar{\theta}_1(t)$ 는 파라미터 오차이다.

(증명) 부록 3참조.

Proposition 5로 부터 알 수 있는 것은 어느 정도의 시간이 흐르면 비선형회환은 더 이상 가해지지 않는다는 것이다. $f(t)$ 가 0이 되면 제어알고리즘은 표준극배치 간접적응제어 알고리즘이 된다.

플랜트 파라미터 오차는 $d(\beta)$ 와 $\delta(\beta)$ 에 의해서 결정됨을 알 수 있다.

$d(\beta)$ 는 플랜트의 불확실성의 크기에 의해 정해지는 상수이므로, $\delta(\beta)$ 의 크기를 즉 비선형회환의 크기를 증가시키면 파라미터오차를 줄일 수 있다. 그러나 Proposition 4와 (2.19), (2.20), (2.21)식으로부터 알 수 있는 바와 같이 어느 정도 이상 β 를 크게 해도 큰 차이는 없게 되고, 제어입력이 커지는 좋지않은 결과를 초래하게 된다.

플랜트에 외란이나 비모형화 특성이 존재할 경우 추정된 플랜트의 가제어성을 어느 정도 높일 수 있으나, 이상적인 플랜트인 경우에서 처럼 충분한 정도의 가제어성을 기대할 수는 없다.

4.2 전체제어 계통의 안정도

Proposition 1, 2와 5의 결과로부터 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 2.

(1)식의 플랜트, (4)식, (11)식의 파라미터 추정기들, 그리고 (12)식의 제어치으로 구성된 페루우프 적응제어계를 생각하자. 그러면 모든 $\mu(0 \leq \mu \leq \mu_0)$ 와 임의의 초기조건에 대해서, 전체 페루우프 계통내의 신호들이 모두 유계되고, 다음의 관

계를 만족하는 상수 $K > 0$ 와 유한한 정수 $T \geq T_1(\beta)$ 가 존재한다.

$$\frac{|A^*(q^{-1})(y(t) - B(t, q^{-1})y^*(t))|}{m(t)} \leq K\mu_0,$$

$$\frac{|A^*(q^{-1})(u(t) - A(t, q^{-1})y^*(t))|}{m(t)} \leq K\mu_0, \forall t \geq T$$

(증명)

(3)식과 (5)식으로부터

$$A(t, q^{-1})y(t) - B(t, q^{-1})u(t) = e_1(t) + \phi_1^T(t)(\theta_1(t-1) - \theta_1(t)) \quad (15)$$

(12) 식의 제어칙으로부터

$$R(t, q^{-1})u(t) - S(t, q^{-1})y(t) = A^*(q^{-1})y^*(t) + f(t) \quad (16)$$

(15)식과 (16)식으로부터

$$A^*(q^{-1})u(t) = \zeta_1(t) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) = & S(t, q^{-1})e_1(t) + S(t, q^{-1})\phi_1^T(t)(\theta_1(t-1) - \theta_1(t)) + A(t, q^{-1})A^*(q^{-1})y^*(t) \\ & + A(t, q^{-1})f(t) + [A(t, q^{-1})S(t, q^{-1}) - S(t, q^{-1})A(t, q^{-1})]y(t) + [S(t, q^{-1})B(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1})]u(t) \\ & + [A^*(q^{-1}) - \{A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1})\}]y(t) \end{aligned} \quad (18)$$

$$A^*(q^{-1})y(t) = \zeta_2(t) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2(t) = & R(t, q^{-1})e_1(t) + R(t, q^{-1})\phi_1^T(t)(\theta_1(t-1) - \theta_1(t)) \\ & + B(t, q^{-1})A^*(q^{-1})y^*(t) + B(t, q^{-1})f(t) + [R(t, q^{-1})B(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})R(t, q^{-1})]u(t) \\ & + [A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - R(t, q^{-1})A(t, q^{-1})]y(t) + [A^*(q^{-1}) - \{A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1})\}]y(t) \end{aligned} \quad (20)$$

Proposition 1 1), 3)으로부터

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ |S(t, q^{-1})\phi_1^T(t)(\theta_1(t-1) - \theta_1(t))| / m(t) \} = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ | [A(t, q^{-1})S(t, q^{-1}) - S(t, q^{-1})A(t, q^{-1})] y(t) | / m(t) \} = 0 \quad (22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ | [S(t, q^{-1})B(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1})] u(t) | / m(t) \} = 0 \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ | [R(t, q^{-1})B(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})R(t, q^{-1})] u(t) | / m(t) \} = 0 \quad (24)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ | [A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - R(t, q^{-1})A(t, q^{-1})] y(t) | / m(t) \} = 0 \quad (25)$$

$\sum_{i=1}^{2n} q_i(t)q^{-i} = A^*(q^{-1}) - \{A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1})\}$ 라고 하면

$$\begin{aligned} & | [A^*(q^{-1}) - \{A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1})\}] u(t) | \\ & + | [A^*(q^{-1}) - \{A(t, q^{-1})R(t, q^{-1}) - B(t, q^{-1})S(t, q^{-1})\}] y(t) | \\ & \leq \sum_{i=1}^{2n} |q_i(t)| (|u(t-i)| + |y(t-i)|) \\ & \leq \sigma^{-2n} m(t) \delta_1(t) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $\delta_1(t)$ 는 양함수로서 $t \rightarrow \infty$ 됨에 따라 0으로 수렴한다. (26)식의 마지막 부등식은 Proposition 2로부터 얻어진다.

$\bar{e}_1(t) = e_1(t)/m(t)$ 식과 (2)식으로부터 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{|R(t, q^{-1})e_1(t)|}{m(t)} \leq K_0\mu_0 + \delta_2(t) \quad (27)$$

$$\frac{|S(t, q^{-1})e_1(t)|}{m(t)} \leq K_0\mu_0 + \delta_2(t) \quad (28)$$

여기서 $K_0 = (1 + 2\sqrt{n})\rho_2\sigma^{-n}d_1(\mu_0)/\mu_0$ 이고, $\delta_2(t)$ 는 $t \rightarrow \infty$ 됨에 따라 0으로 수렴하는 양함수이다.

그리고 Proposition 5에 의해

$$f(t) = 0, \forall t \geq T_1(\beta) \quad (29)$$

이고, $y^*(t)$ 는 유계되므로 모든 t 에 대해서 다음 식을 만족하는 양의 상수 K_p 이 존재한다.

$$|A(t, q^{-1})A^*(q^{-1})y^*(t)| + |B(t, q^{-1})A^*(q^{-1})y^*(t)| \leq K_p \quad (30)$$

(21) - (30)식을 조합하면 (17), (19)식으로부터 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\{ |\zeta_1(t)| + |\zeta_2(t)| \}}{m(t)} \leq 2k_0\mu_0 \\ & + \varepsilon\sigma^{-2n}\delta_1(t) + \frac{K_p}{m(t)} + \delta_3(t) \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 $\delta_3(t)$ 는 $t \rightarrow \infty$ 에 따라 0으로 수렴하는 양함수이다.

$h^*(t)$ 를 전달함수가 $1/A^*(z^{-1})$ 인 계통의 임펄스 응답이라고 하자. 그러면 (17)식과 (19)식으로부터

$$|u(t)| + |y(t)| \leq \sum_{i=0}^t |h^*(t-i)| \{ |\zeta_1(i)| + |\zeta_2(i)| \} \quad (32)$$

$1/A^*(z-1)$ 의 극들은 모두 단위원내에 존재하므로 $|h(t)| \leq K_h \rho^t$ 가 되는 상수 $0 < K_h < \infty, 0 \leq \rho < 1$ 가 존재한다. 따라서 (2)식과 (31), (32)식으로부터

$$m(t+1) \leq \sigma m(t) + \sum_{i=0}^t K_h \rho^{t-i} (2K_0 \mu_0 + \epsilon \sigma^{-2n} \delta_1(i) + \delta_3(i)) m(i) + \frac{K_p K_h}{(1-\rho)} + 1 \quad (33)$$

이제 $m'(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$m'(t+1) \triangleq \sigma m'(t) + \sum_{i=0}^t K_h \rho^{t-i} (2K_0 \mu_0 + \epsilon \sigma^{-2n} \delta_1(i) + \delta_3(i)) m'(i) + \frac{K_p K_h}{(1-\rho)} + 1 \quad (34)$$

$$m'(0) \leq m(0)$$

그러면 모든 t 에 대해서 $m'(t) \geq m(t)$, 즉 $m'(t)$ 는 $m(t)$ 에 대한 상한이 된다. 그리고 (34)식으로부터 $m'(t)$ 는 다음과 같은 차분방정식을 만족함을 알 수 있다.

$$m'(t+1) - [\sigma + \rho + k_h(2K_0 \mu_0 + \epsilon \sigma^{-2n} \delta_1(t) + \delta_3(t))] m'(t) + \rho \sigma m'(t-1) = 1 - \rho + K_p K_h \quad (35)$$

$m(t)$ 가 유계된다는 것을 증명하려면 (35)식이 안정하다는 것을 보이면 된다. 즉 다음 차분방정식이 지수적으로 안정하다는 것을 보이면 된다.

$$m''(t+1) - [\sigma + \rho + 2K_0 \mu_0 K_h] m''(t) + \rho \sigma m''(t-1) = 0 \quad (36)$$

Jury판별법을 이용하면 만일 μ_0 가 다음의 부등식을 만족하면 (36)식은 지수적으로 안정함을 알 수 있다.

$$2K_0 \mu_0 K_h < (1-\rho)(1-\sigma) \quad (37)$$

따라서 (37)식을 만족하는 스칼라 $\mu_0 > 0$ 가 항상 존재하고, $m(t)$ 및 폐루우프계통내의 신호들이 모두 유계된다. 그리고 (17)과 (19)식으로부터

$$\begin{aligned} \frac{|A^*(q^{-1})(y(t) - A(t, q^{-1})y^*(t))|}{m(t)} &\leq K_0 \mu_0 + \epsilon \sigma^{-2n} \delta_1(t) \\ \frac{|A^*(q^{-1})(u(t) - A(t, q^{-1})y^*(t))|}{m(t)} &\leq K_0 \mu_0 + \epsilon \sigma^{-2n} \delta_1(t) \end{aligned}$$

이고, 여기서 $\delta_1(t)$ 는 $t \rightarrow \infty$ 됨에 따라 0으로 수렴하는 양함수이므로 위식들의 우변항은 결국 $K_0 \mu_0$

가 된다.

5. Simulation결과

이 절에서는 본 논문에서 제시한 제어알고리즘의 타당성을 컴퓨터 Simulation결과를 통하여 알아보기로 한다. 제어하고자 하는 플랜트는 다음과 같다.

$$(1 - 0.6q^{-1} - 0.55q^{-2})y(t) = q^{-1}(1 + 1.3q^{-1})u(t) + \eta_1(t)$$

이 플랜트는 1.1에 불안정한 극을 갖는 비최소위상계이다.

비모형화 특성이나 외란을 나타내는 $\eta_1(t)$ 는

$$\eta_1(t) = 0.001v_1 m(t)$$

이고, 정규신호 $m(t)$ 는

$$m(t) = 0.9m(t-1) + \max\{|u(t-1)|, |y(t-1)|, 1\}$$

이고, 초기치는 1.0으로 하였다. 원하는 폐루우프다항식은 $A^*(q^{-1}) = (1 - 0.5q^{-1})^2$ 이다. 플랜트 파라미터 추정기의 사구간을 정하는데 필요한 상수 μ_0 와 α_1 은 각각 0.002, 1로 하였다. 제어기 파라미터 추정기에 인가되는 신호 $v(t)$ 의 크기 γ 는 0.1이다. 비선형제화 $f(t)$ 는 상수 β 는 0.5로 하였다.

그림 1은 외부입력, 그림 2는 제어입력을 나타낸다. 그림 3은 $y(t)$ 와 $B(t, q^{-1})y^*(t)$ 와의 차이를 나타내는데, 초기적응단계(0-600step)에서는 계통내의 신호들이 매우 커지는 단점이 있으나 제어목적이 원만히 달성됨을 알 수 있다.

그림 3은 제어입력, 그리고 그림 3과 그림 4는 각각 플랜트 파라미터 추정치와 제어기 파라미터 추정치를 나타낸다. 플랜트 파라미터들은 비모형

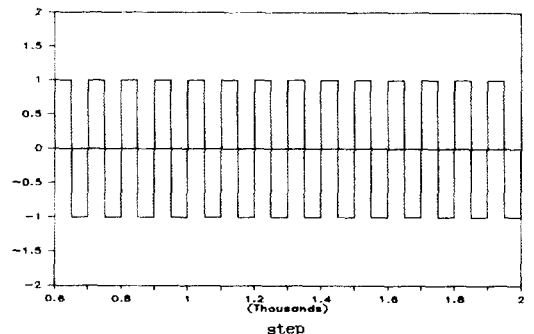


그림 1. 외부입력
Fig. 1 The external input

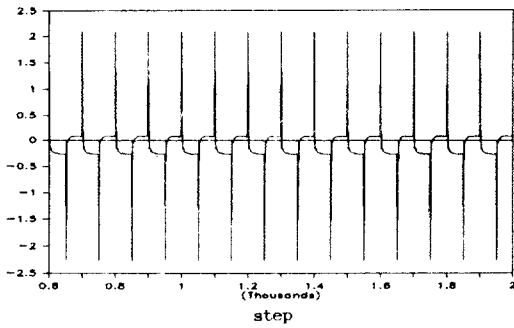


그림 2 제어입력
Fig. 2 The control input

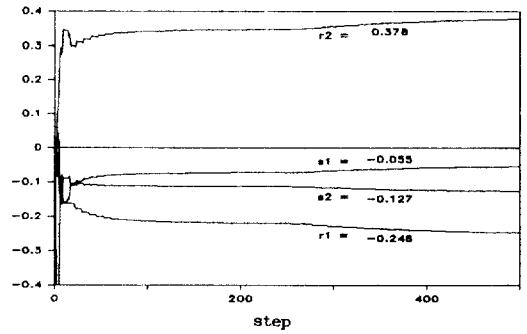


그림 5 플랜트 파라미터 추정치
Fig. 5 The plant parameter estimates

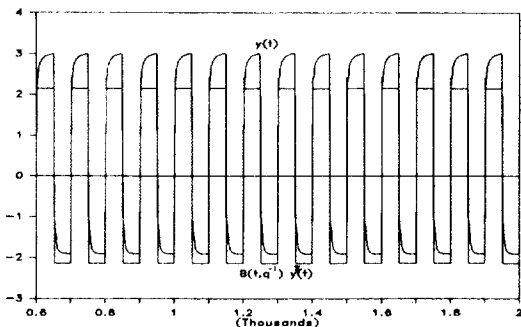


그림 3 추종오차
Fig. 3 The tracking error

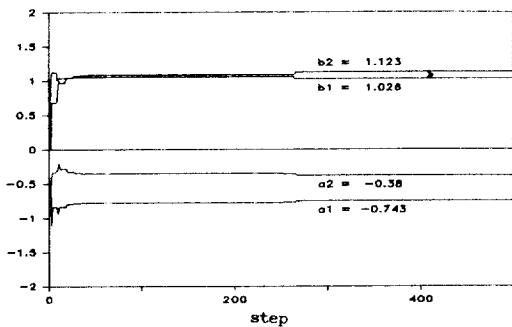


그림 4 플랜트 파라미터 추정치
Fig. 4 The plant parameter estimates

화 오차 때문에 정확하게 추정되지 않지만, 제어기 파라미터들은 Diophantine방정식을 풀어 얻어지는 값에 수렴한다.

비선형제환은 추정된 플랜트의 가제어성을 될 수 있는 한 크게 해주기 위해서 도입되었는데, 예제의 경우 8회 사용되었다. 추정된 플랜트의 가제

어성이 어느 정도인가는 플랜트 파라미터 추정치로 구성되는 Sylvester행렬의 행렬식의 절대치의 크기로 판정하는데, 주어진 플랜트의 행렬식의 값은 1.92이므로 이에 근사한 행렬식을 갖는 추정된 플랜트는 가제어성이 높다고 할 수 있다. β 의 크기를 0.5에서 10^4 까지 변화시키면 Sylvester행렬의 행렬식의 값은 1.7165에서 1.7618까지 증가한다. 추정된 플랜트의 가제어성이 이와 같이 더 좋아지는 것은 비선형제환의 효과이지만, β 를 10^4 이상 더 크게 해도 가제어성은 더 이상 커지지 않는다. 따라서 비선형제환의 크기는 계통내의 신호들이 불필요하게 커지지 않도록 적절히 선정되어야 한다.

6. 결 론

본 논문에서는 임의의 영점을 갖는 이산시간계통에 비모형화특성이나 외란이 존재할 경우의 극배치 적응제어기 설계문제를 다루었다. 전체 제어 알고리즘은 두개의 파라미터 추정기와 비선형제환이 도입된 제어칙으로 구성된다. 플랜트 파라미터는 플랜트의 불확실성을 감안하여 사구간과 정규화기법을 채용한최소자승 알고리즘을 써서 추정된다. 제어기 파라미터도 별도의 파라미터 추정기로부터 얻어지는데, Diophantine방정식을 풀어 제어기 파라미터를 구하는 것보다 빠르고, 일시적인 추정된 플랜트의 가제어성 문제에 대처할 수 있는 잇점들이 있다. 비선형제환은 추정된 플랜트의 가제어성이 될 수 있는 한 크게해주기 위해서 도입되었고 어느 정도의 시간이 흐르면 더 이상 가해지지 않는다. 그 이후에는 전체 제어알고리즘은 표준 극배치 제어알고리즘이 된다. 본 논문의 제어알고리즘을 사용할 경우 과도상태에서 계통내의 신호들이 과다하게 커지는데 이는 앞으로의 연구 과제이다.

부 록 1

Proposition 3의 증명

$t \geq n$ 이라고 하자, (2)식과 (12a)식으로부터

$$|u(t)| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n |r_i(t)| + |S_i(t)| \right\} \sigma^{t-n} m(t) + |A^*(q^{-1})y^*(t)| + f(t)$$

Proposition 1과 $m(t) \geq 1$ 이라는 사실로부터 다음 식을 만족하는 상수 $K' > 0$ 이 존재한다.

$$|u(t)| \leq K' m(t) + f(t) =: K' m(t) + \alpha + \beta m(t) \tag{1.1}$$

(3)식으로부터

$$|y(t)| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|) \right\} \sigma^{t-n} m(t) + |\eta_1(t)| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|) \right\} \sigma^{t-n} m(t) + \nu_1 \mu m(t) \leq (K'_2 + K m_2 \mu) m(t) \tag{1.2}$$

여기서 $K'_2, K m_2 > 0$ 는 상수들이다. (1.1)식과 (1.2)식으로부터

$$m(t+1) \leq \sigma m(t) + K_1 m(t) + f(t) + (K_2 + K m_2) m(t) + 1$$

따라서 만일 t 가 $\{t = 4nk, k = 1, 2, \dots\}$ 이고 $\{a(\tau) \neq 0\}$ 되는 $\tau(t - 6n + 1 \leq \tau \leq t - 2n)$ 이 존재할 조건을 만족한다면 뒷 식으로부터

$$m(t+1) \leq (K m_1(t) + \beta + K m_2 \mu) m(t)$$

그리고 그 이외의 경우에는

$$m(t+1) \leq (K m_1 + K m_2 \mu) m(t)$$

부 록 2

Proposition 4의 증명 (1)식을 (12a)식에 대입하면

$$[R(t, q^{-1})A(q^{-1}) - S(t, q^{-1})B(q^{-1})]\zeta(t) = f(t) + A^*(q^{-1})y^*(t) + S(t, q^{-1})\eta(t), \quad t \geq n \tag{2.1}$$

상태벡터 $X(t)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$X(t) = [1, q^{-1}, \dots, q^{-4n+1}]^T \zeta(t-1)$$

그러면 (2.1)식으로부터 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$X(t+1) = G(t)X(t) + g(f(t) + A^*(q^{-1})y^*(t) + S(t, q^{-1})\eta(t)) \tag{2.2}$$

여기서

$$G(t) = \begin{bmatrix} -\gamma_1(t) & \dots & -\gamma_{2n}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

이고, $\gamma_i(t)$ 는 (2.2)식의 우변항의 q^{-i} 의 계수들이다.

(1)식과 (3)식으로부터

$$\phi^T(t) = [-B(q^{-1}), \dots, -q^{n+1}B(q^{-1}), A(q^{-1}), \dots, q^{-n+1}A(q^{-1})]\zeta(t-1) + [-1, \dots, -q^{-n+1}, 0, \dots, 0]\eta(t-1)$$

여기서 $A(q^{-1})$ 와 $B(q^{-1})$ 는 서로 소이므로 $2n$ 개의 다항식들 $\{B(q^{-1}), \dots, -q^{n+1}B(q^{-1}), A(q^{-1}), \dots, q^{-n+1}A(q^{-1})\}$ 는 실수에 대해서 서로 선형독립이다. 따라서 다음 식을 만족하는 full rank의 $2n \times 4n$ 행렬 H 가 존재한다.

$$\phi_1(t) = HX(t) + N_1(t) \tag{2.3}$$

여기서 $N^T(t) = [-1, \dots, -q^{-n+1}, 0, \dots, 0]\eta(t-1)$ (2.4)

(1)식과 (2)식으로부터

$$\|X(t)\| \leq K_x m(t)$$

가 되는 상수 K_x 가 존재한다. 따라서 (2.3)식, (2.4)식으로부터 $2n$ 차의 임의의 단위벡터 w 에 대해서 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$|w^T \bar{\phi}_1(t)| \geq |w^T H \bar{x}(t)| - |w^T N_1(t)| \geq [\sigma \min(H)] |V^T \bar{x}(t)| - \|\bar{N}_1(t)\| \tag{2.5}$$

여기서 $\bar{N}_1(t) = N_1(t)/m(t)$, $\bar{X}(t) = X(t)/m(t)$ 이고, $\sigma \min(H) > 0$ 는 H 의 가장 작은 singular value이며 $V^T = W^T H / \|W^T H\|$ 는 $4n$ 차의 단위벡터이다. (2.4)식과 (2)식, 그리고 가장 A4로부터 다음과 같은 관계가 성립한다.

$\|\bar{N}_1(t)\| \leq K_1 \mu$, $K_1 > 0$ 은 상수 이 식과 (2.5)식으로부터

$$|W^T \phi_1(t)| \geq [\sigma \min(H)] V^T \bar{X}(t) - K_1 \mu$$

따라서 만일 상수들 $\mu_x(\beta)$, $\delta_x(\beta)$, $T_x(\beta)$ 가 주어졌을 때, $X(t)$ 에 대해서

Proposition 4가 성립한다면, $\mu_1(\beta) < \sigma[\min(H)]\delta_x(\beta)/K_1$, $\delta_1(\beta) = [\sigma \min(H)]\delta_x(\beta) - K_1\mu_1(\beta) > 0$, $T_1(\beta) = T_x(\beta)$ 라고 할 때, $\phi_1(t)$ 에 대해서 Proposition 4가 성립한다.

(2.2)식으로부터

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2n-1}^{4n-1} \gamma_{4n-i-1}(t) X(t+k+i) \\ &= M(t)(F(t+k) + A^*(q^{-1})Y^*(t+k) + N(t+k+1)) \\ &+ \sum_{i=2n-1}^{4n-1} \gamma_{4n-i-1}(t) \left\{ \sum_{j=0}^i G(t)^{i-j} [G(t+k+j) - G(t)] X(t+j+k) \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

여시저 $\gamma_0(t) = 1$, $-2n+1 < k \leq 6n-1$ 이고

$$M(t) = [g, G(t)g, \dots, G(t)^{4n-1}g] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{2n}(t) & \dots & \gamma_1(t) & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \gamma_{2n}(t) & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \gamma_1(t) & & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$F(t+k)^T = [f(t+k), \dots, f(t+k+4n-1)] \quad (2.8)$$

$$Y^*(t+k)^T = [y^*(t+k), \dots, y^*(t+k+4n-1)] \quad (2.9)$$

$$N(t+k+1) = [S(t+k, q^{-1})\eta(t+k+1), \dots, S(t+k+4n-1, q^{-1})\eta(t+k+4n-1)] \quad (2.10)$$

Proposition 1 1)로부터

$$|\gamma_i(t)| \leq K_r, 1 \leq i \leq 2n, \forall t$$

이 되는 상수 K_r 가 존재한다. 그리고 Proposition 1 1)과 3)으로부터

$$\begin{aligned} & \|G(t)\| < \infty \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \|G(t+k+j) - G(t)\| = 0 \end{aligned}$$

따라서, (2.5)식과 (2)식으로부터

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=2n-1}^{4n-1} \gamma_{4n-i-1}(t) \left\{ \sum_{j=0}^i G(t)^{i-j} [G(t+k+j) - G(t)] X(t+k+i) \right\} \right\| \leq \delta_1(t) \max_{-2n+1 < \tau < 10n-2} \|X(t+\tau)\| \\ & \leq \delta_1(t) K_x m(t+10n-2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

여기서 $\delta_1(t)$ 는 $t \rightarrow \infty$ 됨에 따라 $\delta_1(t) \rightarrow 0$ 이 되는 양함수이다. (2.6)식에 임의의 $4n$ 차 단위벡터 V 를 앞에서 곱하면

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=2n-1}^{4n-1} \gamma_{4n-i-1}(t) V^T X(t+k+i) \right| \geq \\ & |V^T M(t) F(t+k)| \\ & - |V^T M(t) A^*(q^{-1}) Y^*(t+k)| \\ & - |V^T M(t) N(t+k+1)| \\ & - K_x \delta_1(t) m(t+10n-2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2)식을 이용하면 다음 관계식을 만족하는 상수 $K_1 > 0$ 이 존재함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=2n-1}^{4n-1} \gamma_{4n-i-1}(t) V^T X(t+k+i) \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=2n-1}^{4n-1} K_r m(t+k+i) \right| V^T X(t+k+i+1) \\ & \leq (2n+1) K_r K_1 m(t+10n-1) \\ & \max_{1 < \tau < 10n-1} |V^T \bar{X}(t+\tau)| \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.7)식의 삼각행렬 $M(t)$ 의 대각요소들은 모두 1이므로, 이 행렬의 고유치들은 모두 1이다. $l(2n \leq l \leq 6n-1)$ 을 $t+l$ 이 $4n$ 의 정수배가 되는 정수라고 하자. 그러면, $-4n+l+1 \leq k \leq l$ 에 대해서 (12b)식을 이용하면

$$F^T(t+k) = [0, \dots, 0, 1_{l-k+1}, 0, \dots, 0] (\beta m(t+1) + \alpha)$$

따라서 최소한 하나의 $k(-4n+l+1 \leq k \leq l)$ 에 대해서

$$|V^T M(t) F(t+k)| \geq \frac{\beta}{2\sqrt{n}} m(t+1) + \frac{\alpha}{2\sqrt{n}} \quad (2.14)$$

또한 $|y^*(t)| \leq y^*$ 이므로 (14)식으로부터

$$|V^T M(t) A^*(q^{-1}) Y^*(t+k)| \leq \frac{\alpha}{2\sqrt{n}} \quad (2.15)$$

(2.10)식, 가정 A4, Proposition 1 1)로부터 다음의 부등식을 만족하는 상수 K_2 가 존재한다.

$$|V^T M(t) N(t)| \leq \|N(t)\| \leq K_2 \mu m(t+k+4n-1) \quad (2.16)$$

(2.12)식은 (2.13), (2.16)식을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & (2n+1) K_r K_1 m(t+10n-1) \max_{1 \leq \tau \leq 10n-1} |V^T \bar{X}(t+\tau)| \\ & \leq \frac{\beta}{2\sqrt{n}} m(t+1) - K_2 \mu m(t+k+4n-1) \\ & - K_x \delta_1(t) m(t+10n-2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

그리고 Proposition 3으로부터

$$m(t+1) \geq \frac{m(t+k+4n-1)}{(Km_1+Km_2\mu+\beta)(Km_1+Km_2\mu)^{4n-2}},$$

$$m(t+k+4n-1) \geq \frac{m(t+10n-1)}{(Km_1+Km_2\mu)^{8n-1}},$$

이므로 (2)식을 이용하면 (2.17)식으로부터 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\max_{1 < \tau < 10n-1} |V^T \bar{X}(t+\tau)| \geq h(\beta, \mu) - K_x \sigma^{-1} \delta_1(t) \tag{2.18}$$

여기서

$$h(\beta, \mu) = \frac{1}{(2n+1)K_r K''_i (Km_1+Km_2\mu)^{8n-1}} \left[\frac{\beta}{2\sqrt{n}(Km_1+Km_2\mu+\beta)(Km_1+Km_2\mu)^{4n-2}} - K_2\mu \right]$$

$h(\beta, \mu)$ 는 연속함수이고, 모든 $\beta > 0$ 에 대해서 $h(\beta, 0) > 0$ 이므로 모든 $\lambda_1 (0 < \lambda_1 < 1)$ 에 대해서 다음의 관계를 만족하는 $\mu_x(\beta) > 0$ 가 존재한다.

$$h(\beta, \mu) > h(\beta, 0) > 0, \forall 0 \leq \mu \leq \mu_x(\beta)$$

또한 $t \rightarrow \infty$ 됨에 따라 $\delta_1(t) \rightarrow 0$ 이므로, (2.17)식과 (2.18)식을 이용하면 모든 $\lambda_2 (0 < \lambda_2 < 1)$ 에 대해서

$$\max_{1 < \tau < 10n-1} |V^T \bar{X}(t+\tau)| \geq \lambda_1 \lambda_2 h(\beta, 0) = \delta_x(\beta), \forall t \geq Tox(\beta)$$

가 되는 유한한 정수 $Tox(\beta) > 0$ 가 존재하게 된다.

부 록 3

Proposition 5의 증명 위와 같은 정수 T_c 가 존재하지 않는다고 가정하자. 그러면

$$a(t_j) \neq 0, \forall j$$

가 되는 subsequence $t_1 < t_2 < \dots$ 가 존재한다. 그러나 이것은 Proposition 1 2) 식

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\bar{e}_1(t), d_1(\mu_0)) = 0$$

에 모순이다. 따라서 T_c 가 존재한다. 결국,

$$f(t) = 0, \forall t \geq T_c$$

가 된다.

2) (3d)식과 (5)식, 그리고 Proposition 1 2)로부터

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\bar{\phi}_1(t+\tau+1)^T \bar{\theta}_1(t+\tau), d(\beta)) = 0, \forall \tau \geq 0$$

여기서 $d(\beta) = d_1(\mu_0) + \nu_1 \mu$ 이고, $\bar{\theta}_1(t+\tau) = \theta_1(t+\tau) - \theta_1$ 이다. 그리고 모든 $\tau (0 \leq \tau \leq 10n-2)$ 에 대해서 t 가 ∞ 로 감에 따라

$$\|\bar{\phi}_1(t+\tau+1)^T (\bar{\theta}_1(t+\tau) - \bar{\theta}_1(t))\| \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\bar{\phi}_1(t+\tau+1)^T \theta_1(t), d(\beta)) = 0$$

된다. 즉 $t \rightarrow \infty$ 됨에 따라 0으로 수렴하고 다음식을 만족하는 양함수 $\delta_2(t)$ 가 존재한다.

$$|\bar{\phi}_1(t+\tau+1)^T \bar{\theta}_1(t)| \leq d(\beta) + \delta_2(t), \forall 0 \leq \tau \leq 10n-2, t \geq 0 \tag{3.1}$$

Proposition 3에 의해 최소한 하나의 $\tau (0 \leq \tau \leq 10n-2)$ 와 모든 $t_j \geq Tn(\beta)$ 에 대해서

$$|\bar{\phi}_1(t_j+\tau+1)^T \bar{\theta}_1(t_j)| \geq \delta(\beta) \|\bar{\theta}_1(t_j)\| \tag{3.2}$$

(3.1)식과 (3.2)식을 조합하면 다음과 같이 된다.

$$\|\bar{\theta}_1(t_j)\| \leq \frac{d(\beta) + \delta(t_j)}{\delta(\beta)}, \forall t_j \geq To(\beta)$$

참 고 문 헌

- [1] L. Mo and M.M. Bayoumi, "A Novel Approach to the Explicit Pole Placement Self-Tuning Controller Design," IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-34, pp. 359-363, 1989.
- [2] C.J. Harris and S.A. Billings, Self-Tuning and Adaptive Control: Theory and Applications, Peter Peregrinus Ltd. pp. 144-165, 1981.
- [3] B.D.O. Anderson and R.M. Johnstone, "Global Adaptive Pole Positioning," IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-30, pp. 11-12, 1985.
- [4] R.M. Johnstone and B.D.O. Anderson, "Global Adaptive Pole Placement: Detailed Analysis of a First-Order System," IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-28, pp. 852-853, 1983.
- [5] C.S. Berger, "Robust Pole-Placement Algorithm for Adaptive Control," Pro. IEEE, vol. 135, Pt.D, No. 6, pp. 493-498, 1988.
- [6] H. Elliott, R. Cristi and M. Das, "Global Stability of Adaptive Pole Placement Algorithms," IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-30, pp. 348-356, 1985.
- [7] R. Lozano-Leal and G.C. Goodwin, "A Globally Convergent Adaptive Pole

Placement Algorithm without a Persistency of Excitation Requirement," IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-30, pp. 795-798, 1985.

- [8] F. Giri, J.M. Dion, M. Msaad and L. Dugard, "A Globally Convergent Pole Placement Indirect Adaptive Controller," Proc. 26th IEEE Conf. Decision Contr. Los Angeles, CA, pp. 1-6, 1987.
- [9] G. Kreisselmeier and M.C. Smith, "Stable Adaptive Regulation of Arbitrary nth-Order

Plants." IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-31, pp. 299-305, 1985.

- [10] F. Giri, J.M. Dion, L. Dugard and M. Msaad, "Robust Pole Placement Direct Adaptive Control," Proc. 26th IEEE Conf. Decision Contr, Los Angeles, CA, pp. 372-377, 1987.
- [11] G. Kreisselmeier, "An Indirect Adaptive Controller with a Self Excitation Capability," IEEE Trans. Contr., vol. AC-34, pp. 524-528, 1989.