

파워 스펙트럼 해석을 이용한 기준모델 적응제어시스템의 파라미터 수렴조건

Conditions for Parameter Convergence of Model Reference Adaptive Control System using Power Spectrum Analysis

金 成 德*
(Sung-Duck Kim)

요 약

본 논문에서는, 파워 스펙트럼 해석을 이용하여 기준모델 적응제어(Model Reference Adaptive Control: MRAC) 시스템에 대한 파라미터 수렴조건을 기술한다. 시간영역에서 주어지는 일반적인 PE (Persistent Excitation) 조건이 기준입력신호의 파워 스펙트럼으로 표현된 주파수영역의 자기상관함수 행렬의 정치성으로 변환된다. 상대차수가 1로 설계된 MRAC 시스템에 대하여, 입력 스펙트럼의 변화에 따른 파라미터 공칭값의 존재성과 유일성이 주파수영역의 PE 조건에 의해 해석될 수 있다. 만약, 입력신호가 $2n$ 개 이상의 스펙트럼을 가지면, 공칭값이 적응이득, 입력진폭 및 입력스펙트럼의 크기나 수에 관계없이 존재한다는 것을 밝힐 수 있다.

Abstract- Using Power Spectrum Analysis, conditions of parameter convergence for a Model Reference Adaptive Control (MRAC) system are described. The general Persistent Excitation (PE) condition given in time domain can be transformed to the positiveness of auto-correlation matrix which is represented in frequency domain by the spectra of reference input signal. For an MRAC system designed with relative degree one, the existence and the uniqueness of parameter nominal values due to the variation of input spectra can be analyzed by the PE condition in frequency domain. If the input signal has $2n$ spectra or more, it can be shown that the nominal values exist independent of adaptive gain, input amplitudes, and magnitudes or numbers of their spectra.

1. 서 론

적응제어 파라미터가 미지이거나 서서히 변하는 플랜트에 대한 제어기를 설계하는 경우에 이용되는 효과적인 방법이지만, 제어대상의 수식적 모델을 정확하게 알지 못하므로 제어목적 달성을

*正 會 員 : 大田工業大學 電子工學科 副教授 · 工博
接受日字 : 1989年 2月 1日
1次修正 : 1989年 3月 17日
2次修正 : 1989年 6月 12日

위한 엄격한 설계조건들이 주어진다. 이 때 플랜트 출력이 안정한 기준모델의 출력을 점근적으로 추적하도록 적당한 적응칙과 제어가 설계되어야 하고, 가조절 파라미터를 연속적으로 추정하여 플랜트를 포함한 적응제어기 루우프의 전달함수가 기준모델의 전달함수에 일치될 수 있는 조건을 만족하는 기준입력신호를 인가해야 한다. [1] 출력오차방정식의 전달관계가 모든 주파수에 대하여 SPR(strictly positive real)이면 적응제어 시스템은 대국적 점근안정하여 출력오차가 영에 수렴한다. 그렇지만, 기준모델 적응제어시스템에서는 가조절 파라미터가 공칭값(nominal value)에 수렴하여 모델일치(model matching)가 이루어지도록 신호특성에 대한 또 다른 조건이 요구된다. 이것이 적응회귀백터에 대한 PE(persistent excitation)조건이며 [2] 이 때 적응회귀백터는 기준입력이 선형 변환된 신호이므로 입력신호의 주파수 성분에 대한 SR(sufficient richness) 조건으로 설명되기도 한다. [3]

일반적으로 적응제어시스템은 SPR 및 PE 조건을 만족하는 제어가 설계되어야 한다. 이 때 SPR조건은 주파수영역 특성으로 주어지는 반면에, PE조건은 시간영역 특성으로 표현된다. 파라미터 적응방법을 이용하는 적응제어 시스템에서의 PE 조건은, 파라미터들을 추정하는 시스템식별 이론에서 흔히 사용되는 입력신호의 특성과 같은 동일한 개념을 갖는다. 다만, 적응제어에서는 가조절 파라미터들을 연속적으로 조절하여 공칭값에 수렴하도록 하는 지수적인 안정도를 보장하는 조건으로 사용된다. 이 경우 PE는 적응회귀신호들의 시변 Gramian행렬의 적분형태로 표현되므로써, 이 관계식을 만족하는 유한상수의 존재성을 시간영역에서 해석하지 않으면 안된다 [4]. 그러나 적응회귀신호는 미지 플랜트 주위의 제어 루우프 내에 존재하기 때문에 비선형·시변인 미지 변수들을 처리하기가 쉽지 않다. 일반적인 파라미터 식별문제에서와 같이 PE조건은 근본적인 성질은 기준 입력신호의 독립인 스펙트럼 수에 관계됨은 잘 알려진 사실이다. 적응제어에서는 시간영역에서 해석된 결과들로부터 파라미터가 공칭값에 수렴하기 위한 충분한 입력 주파수의 스펙트럼 수를 설명하고 있으나, 스펙트럼 변화에 대한 구체적인 성질은 PE조건을 주파수영역으로 변환하여 해석하므로써 규명할 수 있을 것이다.

기준모델 적응제어시스템은 모델일치를 전제로 설계되므로, 입력의 스펙트럼수가 가조절 파라미터의 수 이상으로 존재하는 경우에만 가조절 파라

미터가 공칭값에 수렴한다. 이 때 적응신호는 입력이 안정한 선형필터에 의한 변환된 신호로 이 관계를 주파수 전달관계로 기술할 수 있다. 문헌 [3]에서는 이 방법을 도입하여 적응제어에서의 파라미터가 공칭값에 수렴하기 위한 필요·충분조건을 검토하였다. 그 결과 PE조건이 성립되기 위한 입력 스펙트럼의 하한은 규명되었으나, 적응이득, 입력진폭 및 스펙트럼의 수나 크기에 따른 공칭값의 존재성 및 유일성은 해석되지 않았다. 따라서 본 논문에서는 적응제어 설계시 시간영역에서 주어진 PE조건을 주파수영역으로 변환하고, 자기상관함수 행렬의 관계를 이용하여 입력 스펙트럼의 '변화'에 대한 파라미터 수렴특성을 해석하고자 한다.

2장에서는 상대차수가 1인 플랜트 모델에 대한 기준모델 적응제어시스템을 구성하고 공칭 파라미터에 의한 적응오차모델을 도입한다. 3장에서는 설계된 적응제어시스템의 안정도를 검토하므로써 파라미터오차백터가 영으로 수렴하기 위한 필요조건을 설명하고, 적응칙을 평균화한 결과로부터 적응신호들 관계와 기준입력의 스펙트럼에 의한 자기상관함수 행렬과의 관계를 규명한다. 한편, 4장에서는 파라미터 공칭값을 결정하는 선형 대수방정식을 유도하여 스펙트럼 수에 따른 행 또는 열백터의 선형성을 해석한다. 이 결과들로부터 기준입력이 SR이면 자기상관함수 행렬은 정치이고 이 때 파라미터의 유일해가 결정됨을 보인다. 또한 이 공칭값은 입력진폭, 적응이득 및 스펙트럼의 크기 또는 수에 무관하게 결정된다는 사실을 밝힌다. 이 적응구조에 대한 PE조건은 적응신호와 이들의 필터링된 신호 사이의 시변 Gramian으로 주어지지만, 이 조건이 단순히 적응신호 자신의 Gramian으로 평가될 수 있다는 사실도 증명한다.

2. 기준모델 적응제어시스템의 설계

미지 플랜트를 단일 입·출력 선형 시불변시스템이라 하고 그림 1과 같은 기준모델 적응제어시스템을 구성한다. [1] 표현을 간단히 하기 위하여 {SPR}은 SPR인 전달함수의 집합이라 하고 {PE}는 각각 PE조건을 만족하는 신호들의 집합이라 한다.

플랜트 특성은 다음의 전달함수로 표현된다고 가정한다.

$$P(s) = k_p \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.1)$$

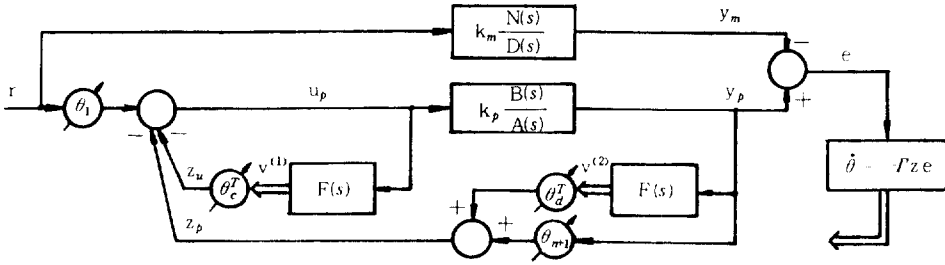


그림 1 기준모델 적응제어 시스템의 구조
 Fig. 1 The structure of a model reference adaptive control system.

여기서 $A(s)$, $B(s)$ 는 서로 소이며 차수가 각각 n, m 인 monic다항식이다. $B(s)$ 는 Hurwitz다항식이라 하고 고주파이득 k_p 는 상수라 한다. 이 때 적응제어기는 일반적으로 다음의 가정을 기초로 설계된다.

- (1) 플랜트의 차수 n 과 상대차수 $n^*(=n-m)$ 은 기지
- (2) $k_p > 0$
- (3) 기준입력 $r(t) \in \mathbf{R}$ 및 그 도함수 $\dot{r}(t)$ 는 유계

여기서 \mathbf{R} 은 실수계를 나타낸다. 기준모델은 플랜트 모델에 대한 가정을 토대로 다음과 같이 선정한다.

$$M(s) = k_m \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.2)$$

이 때 $k_m > 0$ 이고 $D(s)$, $N(s)$ 는 각각 n, m 차로 안정한 monic다항식이다.

적응목적은 플랜트 출력 $y_p(t) \in \mathbf{R}$ 이 기준모델의 출력 $y_m(t) \in \mathbf{R}$ 를 접근적으로 추적하는 보상기를 설계하는 것으로, 이 경우 플랜트를 포함한 적응 루우프의 전달특성이 기준모델의 특성과 일치되어야 한다. 따라서 제어문제는 모델일치가 만족되는 제어입력 $u_p \in \mathbf{R}$ 을 설계하는 것이다. 일반적으로 적응제어기는 n^* 에 따라 구조를 설계하는 방법이 달라진다. n^* 는 적응오차모델의 전달함수를 SPR로 유지시키므로써, 적응시스템의 대국적 안정도를 보장하도록 제어기와 기준모델을 선정하는데 사용된다. 본 연구에서는 서론에서 밝힌바와 같이 PE조건의 주파수영역 해석에 주안점을 두고 있기 때문에 $n^* = 1$ 인 경우로 제한한다. 이 때 $m = n - 1$ 이므로, $M(s)$ 는 임의의 SPR전달함수로 선택할 수 있다.

그림 1에서 선형보조필터를

$$F^T(s) = \frac{1}{N(s)} [1, s, \dots, s^{n-1}] \quad (2.3)$$

로 구성하고, 적응회귀신호(adaptive regressor signal : 이하 적응신호라 함)를 $z^T(t) = [r(t), v^{(1)T}(t), y_p(t), v^{(2)T}(t)] : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ 라 정의한다.

$$v^{(1)} = F(s) u_p \quad (2.4)$$

$$v^{(2)} = F(s) y_p \quad (2.5)$$

또한, 가조절 파라미터 벡터 $\theta^T(t) = [\theta_1, \theta_c^T, \theta_{a+1}, \theta_a^T] = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n}] : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ 이라 할 때 제어입력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_p = z^T \theta \quad (2.6)$$

한편, 플랜트를 포함한 제어기의 전체 전달함수 $W(\theta, s)$ 는

$$W(\theta, s) = \theta_1 P(s) [1 - W_1(\theta, s) - W_2(\theta, s) P(s)] \quad (2.7)$$

여기서 $W_1(\theta, s)$ 및 $W_2(\theta, s)$ 는 각각 u_p 와 $z_u(t)$ 및 y_p 와 $z_p(t)$ 사이의 전달관계를 나타낸다. 이 때 적응제어기는 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $W(\theta, s)$ 가 $M(s)$ 와 접근적으로 일치되도록 설계된다. 이 경우 일치된 파라미터 평형값을 공칭값 $\theta_* \in \mathbf{R}^{2n}$ 이라 한다. 가조절 파라미터와 공칭 파라미터 사이의 오차벡터를 $\phi(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ 이라 하면

$$\phi = \theta - \theta_* \quad (2.8)$$

출력 오차 $e(t) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$e = y_p - y_m \tag{2.9}$$

식 (2.8)를 식 (2.6)에 적용하면 다음과 같다.

$$u_p = z^T \theta_* + v \tag{2.10}$$

이 때 $v = z^T \phi$ 이다. 식 (2.3)-(2.5) 및 (2.9), (2.10)의 관계를 다음과 같은 적응오차모델이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{1*} P W_*^{-1} - M P W_*^{-1} \\ 1 & 0 \\ \theta_{1*} F W_*^{-1} & F W_*^{-1} \\ \theta_{1*} P W_*^{-1} & P W_*^{-1} \\ \theta_{1*} F P W_*^{-1} & F P W_*^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

이 때

$$W_* = 1 - (W_{1*} + W_{2*} P) \tag{2.12}$$

$$W_{1*} = W_1(\theta_*, s) \tag{2.13}$$

$$W_{2*} = W_2(\theta_*, s) \tag{2.14}$$

식 (2.11)를 Kosut와 Friedlander의 일반적인 적응오차모델로 표현하고, 적응치를 전형적인 구배법을 이용하면[5]

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{er}(\theta_*, s) & H_{ev}(\theta_*, s) \\ H_{zr}(\theta_*, s) & H_{zv}(\theta_*, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$\dot{\theta} = -\Gamma z e, \Gamma = \Gamma^T > 0 \tag{2.16}$$

이 때 $H_{xy}(\theta_*, s)$ 는 x 와 y 사이의 전달연산자를 나타내고, Γ 는 적응이득 행렬이다. θ_* 가 유일하게 존재한다는 가정하에 설계된 적응시스템에서는 $H_{er}(\theta_*, s) = W(\theta_*, s) - M(s) = 0$ 이므로 공칭오차 $e_* = H_{er}(\theta_*, s)r$ 은 영이 되고, 이 결과로부터 $e = M/\theta_{1*} \epsilon \{SPR\}$ 이 된다. 이러한 해석적 특성은 Narendra와 Valavani에 의해 얻어진 결과와 동일하다[1]. 결국, $H_{ev}(\theta_*, s)$ 가 SPR이므로 식 (2.16)의 적응치를 사용하면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 출력오차는 점근적으로 영에 수렴하게 된다. 이 경우에 다음식

$$\int_s^{s+\delta} z z^T dt \geq aI, s \geq 0 \tag{2.17}$$

가 만족되는 유한상수 $\alpha, \delta > 0$ 이 존재하면 θ 은 θ_* 로 수렴하게 된다. 이 때 $z \in \{PE\}$ 이고 이 조건을 PE조건이라 한다.

복소공간에서 정의된 전달함수들과 이들 상호간의 관계들에 의하여 결정되는 신호들의 특성은 일반적으로 시간영역에서 해석되기 때문에, 식 (2.17)에 의하여 모델일치의 타당성을 평가하기가 매우 번거롭게 된다. 또한, z 는 적응루우프 내부에 존재하는 신호이므로, 시변 Gramian 행렬의 적분형태로 표현된 식 (2.17)의 조건을 만족하는 α 및 δ 를 구하는 것이 실제로는 곤란하다. 물론, 이 조건이 만족되는 기준입력신호의 주파수 성분 에 대한 한계는 주어졌지만, 이 식으로는 입력의 진폭과 스펙트럼의 크기 및 수가 θ_* 를 결정하는데 미치는 영향을 구체적으로 해석할 수 없다.

3. PE조건과 파워 스펙트럼 해석의 도입

적응제어시스템의 지수적 안정도를 보장하기 위한 몇가지 조건과 스펙트럼에 의한 특성을 설명하기 위하여, 식 (2.16)에서 $\Gamma = \gamma I$ 라 놓고 e 및 z 의 평형치 e_* 및 z_* 가 존재한다고 하면 적응오차모델은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e = e_* + H_{ev}(\theta_*, s)v \tag{3.1}$$

$$z = z_* + H_{zv}(\theta_*, s)v \tag{3.2}$$

$$\dot{\phi} = -\gamma z e \tag{3.3}$$

이 때 정상상태에서 $\theta = \theta_*$ 라 가정하면 $e_* = 0$ 이다. 적당한 차원의 행렬 $\{A, b, c\}$ 를 사용하여 식 (3.1)를 최소실현 상태방정식으로 쓰면

$$\dot{\epsilon} = A\epsilon + b z^T \phi \tag{3.4}$$

$$e = c^T \epsilon \tag{3.5}$$

여기서

$$H_{ev}(\theta_*, s) = c^T (sI - A)^{-1} b \in \{SPR\} \tag{3.6}$$

이며, $\epsilon(t) \in R^n$ 는 상태벡터이다.

$H_{ev}(\theta_*, s)$ 는 SPR이므로 Kalman-Yacubovich lemma에 의해 다음식을 만족하는 $P, Q > 0$ 이 존재한다.

$$AP^T + PA = -Q \quad (3.7)$$

이 때 오차시스템에 대한 시험 Lyapunov함수를

$$V(\varepsilon, \phi) = \varepsilon^T P \varepsilon + \phi^T \Gamma^{-1} \phi \quad (3.8)$$

라 놓고, $\dot{V}(\varepsilon, \phi)$ 를 구하면

$$\dot{V}(\varepsilon, \phi) = -\varepsilon^T Q \varepsilon \leq 0 \quad (3.9)$$

결국, $V(\varepsilon, \phi) \geq 0$ 이고 $\dot{V}(\varepsilon, \phi) \leq 0$ 이므로 ε 및 ϕ 는 유계된다. 한편, 식 (3.2)에서 $H_{z\phi}(\theta_*, s)$ 는 안정하므로 유계인 r 에 대하여 $\|z - z_*\| \in L_2$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\varepsilon \in L_2$ 이고 $\phi \in L_\infty$ 이므로 ε 및 ϕ 는 평등연속(uniformly continuous)이다. 식 (3.9)에서 ε 이 평등연속이므로 $\dot{V}(\varepsilon, \phi) \dot{=} -\varepsilon^T Q \varepsilon$ 도 평등연속이다. 결국,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = 0 \quad (3.11)$$

$\|z\| \in L_\infty$ 이고 $\varepsilon \in L_2$ 이므로 식 (3.7)에 의하여

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi} = 0 \quad (3.12)$$

를 얻을 수 있다. 이 결과들을 식 (3.7)에 적용하면 다음관계가 성립되는 스칼라 V^* 가 존재한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\varepsilon, \phi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^T \Gamma^{-1} \phi = V^* \geq 0 \quad (3.13)$$

이 때 $\|\phi\|$ 는 $(\gamma V^*)^{1/2}$ 에 수렴한다는 것을 알 수 있지만 $t \rightarrow \infty$ 일 때 V^* 값을 결정할 수 없기 때문에 ϕ 의 수렴값에 대한 어떤 결론도 내릴 수 없다.

일반적으로 식 (3.4), (3.5) 및 (3.3)은 선형시변시스템으로 식 (2.17)를 만족하는 $\alpha, \delta > 0$ 이 존재하는 경우에만 지수적으로 안정하다. 그러나, 시변 적응루우프의 z 에 의해 α 및 δ 를 구하기 곤란하므로 식 (2.17)를 주파수영역에서 직접 해석하므로써 이 조건에 대한 성립여부를 용이하게 판단할 수 있다. 입력신호는 전달함수에 의해 동일한 스펙트럼을 가진 신호들로 변환되고 주파수 전달함수는 각 스펙트럼 밀도의 크기만을 결정한다.

일반적으로 기준입력신호는 정상신호로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$r = \sum_{i=1}^k \bar{a}_i e^{j\omega_i t} \quad (3.14)$$

여기서 모든 ω_i 는 서로 1차독립이라 하고, \bar{a}_i 는 각 스펙트럼 ω_i 에 대응하는 진폭으로 실수 또는 허수이다. 이 때, 식 (2.15)와 (3.2)의 관계로 부터

$$z_* = H_{zr}(\theta_*, s)r \quad (3.15)$$

$z_*: \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ 이 정상신호라 할 때, 자기상관함수 행렬 $R_z(0) \in \mathbf{C}^{2n \times 2n}$ 은 z_* 의 평균치로써 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} R_z(0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} z_* z_*^T dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_z(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$R_z(0) = E\{z_* z_*^T\} \quad (3.17)$$

이 때 C 는 복소수제를 나타낸다. 자기상관함수 행렬 $R_z(0)$ 은 일반적으로 파워스펙트럼 밀도 $S_z(\omega)$ 와 Fourier 변환쌍을 이루며, 이 경우 $R_z(0)$ 은 $z_* z_*^T$ 의 시간적인 평균값이 통계적 평균과 같다고 할 때 식 (3.17)과 같은 확률적 기대값(probability expectation)으로 표현할 수 있다.

스펙트럼 변환관계를 이용하면 자기상관함수 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$R_z(0) = \sum_{i=1}^k \beta_i \bar{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \quad (3.18)$$

여기서 $\beta_i = \bar{a}_i \bar{a}_i$ 이고 \bar{a}_i 및 $\bar{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i)$ 의 공액 복소수이다. 식 (2.12)에 의해 $H_{zr}(\theta_*, s)$ 는 안정한 전달함수이므로 식 (3.14)로 주어지는 입력이 유계이면 z_* 는 유계된다. 따라서 정상신호가 안정한 전달함수에 의해 선형변환된 신호도 정상이 되어 식 (3.18)과 같은 자기상관함수 행렬과 같이 구해진다. 만약, z 가 PE이면 z_* 도 PE이므로 식 (2.17)를 만족하는 $\alpha, \delta > 0$ 이 존재하고, 이 때 이 조건은 다음식으로 대체될 수 있다[3].

$$R_z(0) > 0 \quad (3.19)$$

$\|z - z_*\| \in L_2$ 이므로 평형점 $\varepsilon = 0$ 및 $\phi = 0$ 에 대하여 오차모델을 선형화시키면 다음과 같이 된다.

$$\dot{\varepsilon} = a\varepsilon + bz_*^T \quad (3.20)$$

$$\dot{\phi} = -\gamma z_*^T c^T \varepsilon \quad (3.21)$$

이 때 식 (3.20)에 대한 해를 $\varepsilon(t, \phi)$ 라 하면

$$\varepsilon(t, \phi) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} b z_*^T(\tau) \phi(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

만약, ϕ 의 평균값 ϕ_{av} 가 존재한다고 하면 식 (3.22)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varepsilon(t, \phi_{av}) = \left[\int_0^t e^{A(t-\tau)} b z_*^T(\tau) d\tau \right] \phi_{av} \quad (3.23)$$

한편, 식 (3.21)을 평균화하면

$$\dot{\phi}_{av} = -\gamma f_{av}(\phi_{av}) \quad (3.24)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} f_{av}(\phi_{av}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} z_*^T(t) c^T \varepsilon(t, \phi_{av}) dt \\ &= \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} z_*^T(t) c^T \left[\int_0^t e^{A(t-\tau)} b z_*^T(\tau) d\tau \right] dt \right] \phi_{av} \end{aligned} \quad (3.25)$$

이 식에서

$$z_{*,f}^T = c^T \int_0^t e^{A(t-\tau)} b z_*^T(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

라 놓으면, $c^T (sI - A)^{-1} b = H_{ev}(\theta_*, s) \in \{SPR\}$ 이므로 $z_{*,f}$ 는 정상신호가 된다. 따라서 식 (3.25)에 식 (3.26)을 대입하면

$$\begin{aligned} f_{av}(\phi_{av}) &= \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} z_*^T(t) z_{*,f}^T(t) dt \right] \phi_{av} \\ &= \hat{R}_z(0) \phi_{av} \end{aligned} \quad (3.28)$$

결국, 식 (3.24)는 다음과 같이 된다.

$$\dot{\phi}_{av} = -\gamma \hat{R}_z(0) \phi_{av} \quad (3.28)$$

여기서 $\hat{R}_z(0)$ 은 식 (3.18)과는 달리 z_* 와 $z_{*,f}$ 사이의 상호상관함수 행렬을 나타낸다. 이 때 $z_* = H_{zr}(\theta_*, s)r$ 이고 $z_{*,f} = H_{zr}(\theta_*, s)z_*$ 이므로 $\hat{R}_z(0)$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{R}_z(0) = E \{ H_{zr}(\theta_*, s) r H_{ev}(\theta_*, s) H_{zr}^T(\theta_*, s) r \} \quad (3.29)$$

선형필터에 대한 자기상관함수 정리를 이용하면 $\hat{R}_z(0)$ 은

$$\begin{aligned} \hat{R}_z(0) &= \sum_{i=1}^k \beta_i \bar{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i) H_{ev}(\theta_*, j\omega_i) \\ &H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \end{aligned} \quad (3.30)$$

이다. 일반적으로 식 (3.18)에서는 ω_i 의 각 스펙트럼에 대하여 $\bar{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \in C^{2n \times 2n}$ 은 Hermite행렬이지만, 기준입력이 연속성 신호라면 $R_z(0)$ 은 실대칭 준정치행렬이 된다. 이 때 식 (3.30)은 $H_{ev}(\theta_*, j\omega_i)$ 의 개입으로 인하여 r 이 연속성 정상신호라 하더라도 대칭행렬은 아니지만 준정치성은 유지된다.

4. 파라미터 공칭값의 존재성과 유일성 해석

평균화 시스템 식 (3.28)은 식 (3.21)에 있어서 ϕ 의 시간적 변화율이 $z_* e$ 의 시간적 변화율보다 상대적으로 적은 경우에만 만족되는 것으로, 이 방법은 γ 가 작아 적응동작이 느린 시스템의 과도 특성을 해석하는데 적합하다. 일반적으로 $\psi(\gamma): R_+ \rightarrow R_+$ 가 연속이고 $\psi(0)$ 가 영이며 절대 증가함수일 때 파라미터의 θ 와 θ_* 의 관계는 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \|\theta - \theta_*\| \leq \psi(\gamma)$ 가 만족하게 된다. 또한 ϕ_{av} 의 수렴속도는 $\hat{R}_z(0)$ 의 최소고유치에 따라 결정된다. 이 때 식 (3.30)의 상관함수 행렬은 입력의 스펙트럼 수에 상관없이 준정치행렬로 그 고유수치가 항상 안정 영역에 위치한다. 그렇지만 스펙트럼 수가 파라미터 수보다 적으면 $\hat{R}_z(0)$ 의 계수(rank)는 k 이므로 원점에 $2n - k - 1$ 개의 고유치가 존재하게 된다. 만약, 원점의 고유치가 1개가 넘으면 ϕ_{av} 의 초기값이 유계되더라도 ϕ_{av} 는 발산하게 된다. 이 성질은 공칭값 θ_* 가 존재한다는 가정으로 부터 얻어진 것으로 해석상 무의미하다.

한편, 식 (3.28)에 의해서는 ϕ_{av} 의 안정도와 수렴속도 특성을 설명할 수 있으나 공칭값이 유일하게 존재하는지를 직접확인하기는 곤란하다. 실제로 $H_{ev}(\theta_*, s)$ 가 SPR이 되고 z 가 PE인 경우에 θ 는 θ_* 에 지수적으로 수렴하는 것이 여러 연구자들에 의해 보고 되었다. [3][5] 적응신호의 PE조건은 제어구조의 각 부분에 영향을 주는 입력주파수

성분에 따라 결정되므로 입력스펙트럼의 성질로 PE조건을 설명할 수 있다. 즉, 식 (2.17)의 조건이 만족하려면 입력신호의 스펙트럼이 적어도 $2n$ 개이면 충분하다. 이와 같은 주파수 성분의 제약은 적응제어시스템이 안정하여 θ_* 가 설계된대로 유일하게 존재하는데 요구되는 필요조건이다. 따라서, 이러한 조건에 관련된 스펙트럼의 성질이 정확하게 밝혀지는 것이 요구된다.

기준입력의 진폭과 스펙트럼의 크기 및 수의 변화에 대한 θ_* 의 존재성과 유일성에 관한 문제는 정확하게 해석된 바 없다. 이 문제는 파워 스펙트럼 해석을 사용해서 Sastry연구진이 제시하였던 설계방법[3]과 민[6]등에 의해 확장된 적응추정차 설계 등에서 일부 해결되었다. 그렇지만 기준모델 적응제어 구조에 대해서는 SPR조건이 반드시 성립되어야 할 뿐만 아니라 식 (3.28)에서와 같은 간단한 연산으로 스펙트럼 영향을 해석하기 곤란한. 따라서, θ_* 의 유일성을 밝히는 또 다른 이론적인 해결책이 필요하다.

$$e_* = -\gamma z H_{ev}(\theta_*, s) z^T \phi \tag{4.1}$$

식 (3.2)에서 $H_{zv}(\theta_*, s)v = \dot{z}$ 할 때 식 (4.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\theta} = -\gamma z_* H_{ev}(\theta_*, s) z_*^T \phi + 0(\dot{z}) \tag{4.2}$$

여기서 $0(\dot{z})$ 는 $\|z - z_*\| \in L_2$ 에 의해 무시될 수 있는 항이다. 따라서 식 (4.2)를 z_* 에 대해 선형화하고, $\phi = \theta - \theta_*$ 관계를 사용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\theta} = -\gamma z_* H_{ev}(\theta_*, s) z_*^T \theta + \gamma z_* H_{ev}(\theta_*, s) u_* \tag{4.3}$$

여기서 $u_* = z_*^T \theta_*$ 로 다음과 같은 관계로 표현된다.

$$u_* = P^{-1}(s)M(s)r \tag{4.4}$$

따라서 식 (4.3)에 대한 평균화시스템은

$$\dot{\theta}_{av} = -\hat{R}_z(0)\theta_{av} + \gamma \hat{R}_{zu}(0) \tag{4.5}$$

이 때 $z_* = H_{zr}(\theta_*, s)r$ 이므로 $\hat{R}_z(0)$ 은 식 (3.30)과 같고 $\hat{R}_{zu}(0)$ 은

$$\hat{R}_{zu}(0) = \sum_{i=1}^k \beta_i H_{zr}(\theta_*, j\omega_i) H_{av}(\theta_*, j\omega_i) P^{-1}(j\omega_i) M(j\omega_i) \tag{4.6}$$

이다. 입력신호가 유계이면 $\dot{\theta}_{av}$ 는 영이 되므로 식 (4.5)는 다음과 같다.

$$\hat{R}_z(0)\theta_{av} = \hat{R}_{zu}(0) \tag{4.7}$$

입력신호가 연속성 정상신호이면 $\hat{R}_z(0)$ 은 실수 비대칭행렬이므로 모든 고유치는 반드시 실수가 아니나 준정치행렬이다. 식 (4.7)에서 알 수 있듯이 θ_{av} 의 존재성은 $\hat{R}_z^{-1}(0)$ 의 존재성으로 설명되므로 결국 $\hat{R}_z(0)$ 의 계수성질을 규명해야 한다.

적응오차모델의 전달함수가 SPR이고 입력신호가 $2n$ 개 이상의 스펙트럼을 갖는 경우에는 식 (4.7)의 $\hat{R}_z^{-1}(0)$ 이 존재하게 되고, 이 때 유일해 θ_{av} 는 다음식으로 결정된다.

$$\theta_{av} = \hat{R}_z^{-1}(0)\hat{R}_{zu}(0) \tag{4.8}$$

여기서 $\hat{R}_z^{-1}(0)$ 은 $\hat{R}_z(0)$ 이 정칙행렬일 때 정의될 수 있으므로 결국 $\hat{R}_z(0)$ 의 계수는 $2n$ 이어야 한다. 따라서 $\hat{R}_z(0)$ 의 행 또는 열벡터들이 1차 독립이어야 한다. 그렇지만 식 (3.30)으로 표현된 행렬은, $H_{ev}(\theta_*, j\omega_i)$ 때문에 계수를 연산하기가 쉽지 않다. 이러한 문제점은 간단한 선형변환기법을 사용하면 해결할 수 있다.

식 (3.30)의 $\hat{R}_z(0)$ 은 적당히 변환하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{R}_z(0) = S_k(\theta_*, j\omega) Q_k(\theta_*, j\omega) S_k^T(\theta_*, j\omega) \tag{4.9}$$

여기서 $S_k(\theta_*, j\omega) \in C^{2n \times k}$ 및 $Q_k(\theta_*, j\omega) \in C^{k \times k}$ 는

$$S_k(\theta_*, j\omega) = [H_{zr}(\theta_*, j\omega_1), H_{zr}(\theta_*, j\omega_2), \dots, H_{zr}(\theta_*, j\omega_k)] \tag{4.10}$$

$$Q_k(\theta_*, j\omega) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 H_{ev}(\theta_*, j\omega_1) & 0 \\ 0 & \beta_2 H_{ev}(\theta_*, j\omega_2) \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ \dots \dots \\ 0 \dots \beta_k H_{ev}(\theta_*, j\omega_k) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

또한 식 (4.6)을 같은 형식으로 고쳐쓰면

$$\hat{R}_{zz}(0) = \overline{S}_k(\theta_*, j\omega) Q_k(\theta_*, j\omega) g_k(\theta_*, j\omega) \quad (4.12)$$

이 때 $g_k(\theta_*, j\omega) \in C^{k \times 1}$ 은 다음과 같다.

$$g_k^T(\theta_*, j\omega) = [P^{-1}(j\omega_1)M(j\omega_1), P^{-1}(j\omega_2)M(j\omega_2), \dots, P^{-1}(j\omega_k)M(j\omega_k)] \quad (4.13)$$

식 (4.9) 및 (4.12)를 식 (4.7)에 대입하면

$$\overline{S}_k Q_k S_k^T \theta_{av} = \overline{S}_k Q_k g_k \quad (4.4)$$

k 값에 상관없이 $Q_k^T S_k^T = Q_k S_k \neq 0$ 인 복소행렬을 식 (4.14) 양변의 앞에 곱해도 그 값은 변하지 않는다. 즉, 독립인 스펙트럼을 나타내는 모든 k 에 대하여

$$Q_k S_k^T \overline{S}_k Q_k S_k^T \theta_{av} = Q_k S_k^T \overline{S}_k Q_k g_k \quad (4.15)$$

여기서 $S_k^T \overline{S}_k$ 는 항상 Hermite행렬로 정칙이고 $|Q_k| \neq 0$ 이므로, $Q_k S_k^T \overline{S}_k Q_k \in R^{k \times k}$ 도 정칙이므로 $[Q_k S_k^T \overline{S}_k Q_k]^{-1}$ 가 존재한다. 따라서 식 (4.15)는

$$S_k^T \theta_{av} = g_k \quad (4.16)$$

S_k 의 행벡터는 복소공간에서 1차독립이고 θ_{av} 는 $2n$ 벡터이므로 S_k 의 계수는 k 값에 따라 결정된다. 그러므로 독립인 스펙트럼 k 에 의해 식 (4.16)의 θ_{av} 의 값이 유일한지를 밝힐 수 있다. 일반적으로 $k=2n$ 이면 S_k 는 복수정방행렬이 되므로 행 또는 열벡터의 계수에 의한 θ_{av} 의 성질을 검토할 수 있다. 그렇지만, $k \geq 2n$ 와 같은 일반적인 경우에는 복소행렬의 계수를 S_k 에 대한 Grammian행렬을 구성하여 판정한다. 이 때 Grammian행렬은 스펙트럼 수에 상관없이 항상 정방행렬이다. 따라서, 식 (4.16)의 양변에 \overline{S}_k 를 앞에 곱하면 다음식이 얻어진다.

$$\overline{S}_k S_k^T \theta_{av} = \overline{S}_k g_k \quad (4.17)$$

이와 같이 Grammian행렬을 구성하는 이유는, 식 (4.17)에 의해 평가되는 θ_{av} 의 특성이 식 (4.16)의 성질과 같고, 각 스펙트럼에 의한 $\overline{S}_k S_k^T$ 가 Hermite행렬로 그 고유치가 실수이므로, 식 (3.28)에 대한 안정도 증명이 간단해진다는 점

이다. 또한, 시변 Grammian행렬의 적분으로 주어지는 PE조건 식 (2.17)의 관계를 쉽게 해석할 수 있는 장점이 있다.

식 (4.14)와 (4.17)을 비교해 보면 각기 다른 스펙트럼에 대해 Q_k 의 대각요소가 서로 다르기 때문에 $\overline{S}_k S_k^T$ 와 $\overline{S}_k Q_k S_k^T$ 의 계수는 같다. 다시 말해서, 식 (4.17)은 식 (4.14)에서 Q_k 를 자연스럽게 소거한 결과가 된다. 따라서, 두 식의 성질이 동등하게 유지된다. 결국, 식 (4.17)의 해 θ_{av} 는 $\overline{S}_k S_k^T$ 의 특성에 따라 결정된다는 것을 알 수 있고, 따라서 식 (4.17)에 관한 다음 정리가 얻어진다.

정리1. 기준입력신호가 식 (3.14)와 같이 주어지는 경우에

- (a) 모든 k 에 대하여 $\overline{S}_k S_k^T$ 는 Hermite행렬이다.
- (b) 입력이 연속성 신호로 $[0, \pm\omega_1, \pm\omega_2, \dots, \pm\omega_r]$ 의 스펙트럼을 갖고 $k=2\gamma+1$ 이라 할 때 $\overline{S}_k S_k^T$ 는 실대칭 준정치행렬이다.
- (c) (1) $k < m$ 이면 $\rho[\overline{S}_k S_k^T] = m$ 이고 $\overline{S}_k S_k^T \geq 0$ 이다.
- (2) $k \geq m$ 이면 $\rho[\overline{S}_k S_k^T] = m$ 이고 $\overline{S}_k S_k^T > 0$ 이다. 이 때 θ_{av} 는 유일해로 다음과 같이 구해진다.

$$\theta_{av} = [\overline{S}_k S_k^T]^{-1} \overline{S}_k g_k \quad (4.18)$$

단, $m=2n$ 이고, $\rho[\overline{S}_k S_k^T]$ 는 $\overline{S}_k S_k^T$ 의 계수를 나타낸다.

증명. (a) 어떤 복소행렬 $A \in C^{n \times n}$ 에 대하여 $A = A^T$ 가 성립되면 이 행렬 A 는 Hermite행렬이므로 $\overline{S}_k S_k^T$ 에 대하여

$$\overline{S}_k \overline{S}_k^T = S_k \overline{S}_k^T = (\overline{S}_k S_k^T)^T \quad (4.19)$$

이다. 따라서, $\overline{S}_k S_k^T$ 는 Hermite행렬이다.

(b) $\overline{S}_k S_k^T$ 를 다시 쓰면

$$\overline{S}_k S_k^T = \sum_{i=1}^k \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i) \overline{H}_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \quad (4.20)$$

스펙트럼 $k=2\gamma+1$ 에 대하여

$$\overline{S}_k S_k^T = \overline{H}_{er}(\theta_*, 0) H_{zr}^T(\theta_*, 0)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{\gamma} \overline{H}_{er}(\theta_*, j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \\
 & + \sum_{i=1}^{\gamma} \overline{H}_{er}(\theta_*, -j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, -j\omega_i) \\
 = & \overline{H}_{zr}(\theta_*, 0) H_{zr}^T(\theta_*, 0) \\
 & + \sum_{i=1}^{\gamma} [\overline{H}_{er}(\theta_*, j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \\
 & + \overline{H}_{zr}(\theta_*, -j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, -j\omega_i)] \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

이 때

$$H(j\omega_i) = \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \quad (4.22)$$

라 하면 식 (4.21)은 다음과 같이 표현된다.

$$\overline{S}_k S_k^T = H(0) + \sum_{i=1}^k [H(j\omega_i) + \overline{H}(j\omega_i)] \quad (4.23)$$

결국, $H(0)$ 및 $H(j\omega_i) + \overline{H}(j\omega_i)$ 는 실대칭행렬이므로 $\overline{S}_k S_k^T$ 도 준정치행렬이 된다. $\overline{S}_k S_k^T$ 의 정치성관계는 문헌[3]의 lemma3.3을 이용하면 쉽게 구해진다.

(c) 스펙트럼이 k 이면 식 (4.17)의 $\overline{S}_k S_k^T$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\overline{S}_k S_k^T = \sum_{i=1}^{\gamma} \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \quad (4.24)$$

이 때

$$H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) = [h_1(j\omega_i), h_2(j\omega_i), \dots, h_m(j\omega_i)] \quad (4.25)$$

라 하면 식 (4.24)는

$$\begin{aligned}
 \overline{S}_k S_k^T = & [\overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_1) h_1(j\omega_1), \overline{H}_{zr}(\theta_*, \\
 & j\omega_1) h_2(j\omega_1), \dots, \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_1) \\
 & h_m(j\omega_1)] + [\overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_1) h_1(j\omega_2), \\
 & \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_2) h_2(j\omega_2), \dots, \\
 & \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_2) h_m(j\omega_2)] \\
 & + \dots \\
 & + [\overline{H}_{er}(\theta_*, j\omega_k) h_1(j\omega_k), \overline{H}_{zr}(\theta_*, \\
 & j\omega_k) h_2(j\omega_k), \dots, \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_k) \\
 & h_m(j\omega_k)] \\
 = & [X_{11}(j\omega_1), X_{12}(j\omega_2), \dots, X_{21}(j\omega_k)] \\
 & + [X_{21}(j\omega_2), X_{22}(j\omega_2), \dots, X_{2m}(j\omega_2)] \\
 & + \dots + [X_{k1}(j\omega_k), X_{k2}(j\omega_k), \dots, X_{km} \\
 & (j\omega_k), \dots, X_{km}(j\omega_k)] \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

한편 $\overline{S}_k g_k$ 에 대해서는

$$\begin{aligned}
 \overline{S}_k g_k = & [\overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_1) P^{-1}(j\omega_1) M(j\omega_1), \\
 & \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_2) P^{-1}(j\omega_2) M(j\omega_2), \\
 & \dots, \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_k) P^{-1}(j\omega_k) M(j\omega_k)] \\
 = & [X_{1m+1}(j\omega_1), X_{2m+1}(j\omega_2), \\
 & \dots, X_{km+1}(j\omega_k)] \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

식 (4.26) 및 (4.27)의 전개과정을 살펴보면 열벡터 $h_i(j\omega_i)$ ($i=1, 2, \dots, m, l=1, 2, \dots, k$) 및 $P^{-1}(j\omega_i) M(j\omega_i)$ 은 가 각각 다른 값들이므로 l ($\leq k$)번째 행렬의 $X_{li}(j\omega_i)$ 들은 1차 종속으로 모든 l 에 대하여 다음 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned}
 & [h_2(j\omega_1), h_3(j\omega_1), \dots, h_m(j\omega_1)] X_{l1}(j\omega_1) \\
 = & [X_{l2}(j\omega_1), X_{l3}(j\omega_1), \dots, X_{lm}(j\omega_1)] h_1(j\omega_1) \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

또한 독립인 스펙트럼에 대하여 식 (4.26) 행렬의 i 번째 요소 $[X_{1i}(j\omega_i), X_{2i}(j\omega_i), \dots, X_{ki}(j\omega_i)]$ 의 각 열벡터는 1차 독립이다. 따라서 식 (4.26) 및 (4.27)에 의하여 식 (4.17)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^k [\overline{X}_{i1}(j\omega_i), X_{i2}(j\omega_i), \dots, X_{im}(j\omega_i)] \theta_{av} \\
 = & \sum_{i=1}^k \overline{X}_{im+1}(j\omega_i) \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

이 때 식 (4.29)에서 대한 열벡터를 분리해 쓰면

$$[X_1(j\omega), X_2(j\omega), \dots, X_m(j\omega)] \theta_{av} = X_{m+1}(j\omega) \quad (4.30)$$

식 (4.30)은 비제차 선형대수방정식으로 이 방정식의 해 θ_{av} 는 다음과 같은 확장행렬의 계수성질로 존재성 및 유일성을 밝힐 수 있다.

$$W = [X_1(j\omega), X_2(j\omega), \dots, X_m(j\omega), X_{m+1}(j\omega)] \quad (4.31)$$

행렬 W 는 $m \times (m+1)$ 차 복소행렬로 $\rho[W] = \rho[\overline{S}_k S_k^T] = m$ 인 경우에만 유일해 θ_{av} 가 존재한다. 식 (4.31)의 열벡터들에 대한 선형성을 검토하기 위하여

로 평가되고, 동일한 구조에 대하여 다음식과 등가이다.

$$\int_s^{s+\delta} z \cdot z^* dt \geq aI \tag{4.43}$$

여기서, a, a', δ 및 δ' 는 유한상수이며 z_r 는 식 (3.26)에 z_* 대신 z 을 대입한 것이다.

증명. 식 (4.7)은 식 (4.14) 및 (4.17)로 나타낼 수 있다. 만약 $k \geq 2n$ 이면 정리1에 의하여 $\overline{S}_k \overline{S}_k^T$ 이 정칙이므로 $[\overline{S}_k \overline{S}_k^T]^{-1}$ 가 존재한다. 또한 Q_k 도 정칙이므로 $\overline{S}_k Q_k \overline{S}_k^T$ 가 정칙이고 따라서 $[\overline{S}_k Q_k \overline{S}_k^T]^{-1}$ 도 존재한다. 결국, 식 (4.8)의 유일해 θ_* 가 구해질 수 있으므로 식 (4.8)은 등가임을 알 수 있다.

한편, 식 (4.16)의 양변에 $\overline{S}_k Q$ 를 앞에 곱하더라도 등가관계는 변하지 않으므로

$$\overline{S}_k Q S_k^T \theta_* = \overline{S}_k Q g_k \tag{4.44}$$

여기서

$$Q = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_k \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

식 (4.44)에서

$$\begin{aligned} \overline{S}_k Q S_k^T &= \sum_{i=1}^k \beta_i \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i) H_{zr}^T(\theta_*, j\omega_i) \\ &= E\{zz^T} \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_k Q g_k &= \sum_{i=1}^k \beta_i \overline{H}_{zr}(\theta_*, j\omega_i) P^{-1}(j\omega_i) M(j\omega_i) \\ &= E\{zu} \end{aligned} \tag{4.47}$$

결국, 식 (4.44)는

$$R_z(0)\theta_* = R_{zu}(0) \tag{4.48}$$

가 된다. 정리1에 의해 $k \geq 2n$ 이면 $R_z(0) > 0$ 이고, 이 때 $R_z^{-1}(0)$ 이 존재하므로 식 (4.39)를 얻는다. 따라서, 식 (4.18)과 (4.39)의 성질이 같으므로 식 (4.8), (4.18) 및 (4.39)는 등가이다.

(b) 식 (3.28)에 대한 PE조건은 $\|z - z_*\| \in L_2$ 이

므로 식 (4.42)와 같은 형태로 주어진다. 물론, θ_* 의 존재성은 $\hat{R}_z(0)$, $\overline{S}_k S_k^T$ 또는 $R_z(0)$ 으로 평가되므로 식 (4.42)를 만족하는 $a', \delta' > 0$ 이 존재하려면

$$\hat{R}_z(0) > 0 \tag{4.49}$$

이어야 한다. 이 때 $\hat{R}_z(0)$ 의정치성은 (a)에서 설명한 것과 같이 $R_z(0)$ 와 등가이므로 식 (4.49)는 다음식과 등가이다.

$$\hat{R}_z(0) > 0 \tag{4.50}$$

결국, 식 (4.50)과 $\|z - z_*\| \in L_2$ 관계를 이용하면 PE조건은 식 (4.43)으로 주어짐을 알 수 있다.

정리1에서는 스펙트럼의 천이특성과 가조절 파라미터의 공칭값의 존재성에 관하여 해석하였지만, 정리2에서는 공칭값이 식 (4.39)로 결정되고, 이 경우에 θ_* 의 존재성과 유일성이 식 (4.43)의 PE조건으로 평가될 수 있다는 사실을 보였다. 결국, 그림1의 적응구조에 대한 파라미터 수렴성은 z 의 시변 Grammian 행렬에 대한 성질로 설명되지만, 이 조건은 입력스펙트럼의 수에 의해 변화되는 $R_z(0)$ 의 정치성으로 해석할 수 있다. 만약, $k < 2n$ 의 입력을 인가하는 경우에는 R_z^{-1} 가 존재하지 않으며 θ_* 에 대한 존재에 대한 어떤 결론을 내릴 수 없다. 그렇지만, $k \geq 2n$ 이면 정리1 및 2의 결과에서와 같이 유일해 θ_* 가 존재하기 위한 필요·충분조건이 식 (4.43) 및 (4.50)으로 주어진다. 이를 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 기준모델 적응제어시스템의 파라미터 수렴특성을 해석하는 방법의 하나로 파워 스펙트럼 개념을 사용한 주파수영역 해석을 도입하였다. 상대차수가 1인 적응구조의 적응오차모델을 구성하여 이 모델의 안정도 특성을 검토하였다. 파라미터 오차벡터가 지수적으로 영에 수렴하기 위해 요구되는 PE조건이 기준입력 신호의 스펙트럼에 의한 자기 상관함수 행렬의 정치성으로 변환될 수 있음을 보이고, 이 관계로부터 파라미터 공칭값의 존재성과 유일성이 입력 스펙트럼 수에 의해 결정된다는 사실을 증명하였다. 또한, 입력 스펙트럼이 $2n$ 개 이상이면 적응신호는 PE조건을 만족하고, 이 경우 공칭값이 적응이득, 입력진폭,

스펙트럼 크기 및 수에 관계없이 유일하게 구해진다는 사실도 밝혔다. 한편, PE조건이 식 (4.42) 대신 일반적인 형태의 식 (4.43)으로 기술될 수 있음을 증명하였다.

본 연구는 1988년도 문교부 학술연구조성비에 의해 이루어졌습니다.

참 고 문 헌

- [1] K.S. Narendra and L.S. Valavani, "Stable adaptive controller design-direct control," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-23, pp. 570-583, 1978.
- [2] B.D.O. Anderson and C.R. Johnson, "Exponential convergence of adaptive identification and control algorithms," Automatica, vol. 18, pp. 1-14, 1982.
- [3] S. Boyd and S.S. Sastry, "Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control," Automatica, vol. 22, pp. 629-639, 1986.
- [4] B.D.O. Anderson et al., Stability of adaptive systems: passivity and averaging analysis. Cambridge, MA, MIT Press, 1986.
- [5] R.L. Kosut and B. Friedlander, "Robust adaptive control: condition for global stability," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-30, pp. 610-624, 1985.
- [6] 민병태 · 양해원, "파워 스펙트럼 해석법을 이용한 적응추정자의 파라미터 수렴특성," 대한전기학회 논문집, 제37권, pp. 740-748, 1988.