

매개변수 섭동구조를 갖는 플랜트의 강인안정화 알고리즘

Robust Stabilization Algorithms of Plants Subject to Structured Parameter Perturbations

黃 有 燮* · 李 相 赫*
(Yu-Seup Hwang · Sang-Hyuk Lee)

요 약

본 논문에서는 단일입력 또는 단일출력 시스템의 강인안정화(robust stabilization)에 관한 알고리즘을 제시한다. Non-destabilizing 섭동 영역 조건하에서 플랜트 매개변수의 주어진 구조적인 변화 범위내에서 페루우프 시스템을 안정화 시키는 제어기 설계에 관한 접근방법을 제시하였으며 이에 대한 gradient 최적화 알고리즘이 주어진다. 이러한 알고리즘은 플랜트 매개변수 공간의 stability hypersphere를 반복적으로 확대하여 주어진 범위의 매개변수 행정(parameter excursions)에 맞도록 플랜트를 안정시키는 제어기를 설계하는데 사용될 수 있는 방법을 제시하였다.

Abstract- This paper is concerned with robust stabilization of single input or single output systems. Based on the region of non-destabilizing perturbations some approaches to design which allow the given range of structured perturbation of plant parameters and their gradient optimization algorithms are given. These algorithms iteratively enlarge the stability hypersphere in plant parameter space and can be used to design a controller to stabilize a plant subject to given ranges of parameter excursions.

1. 서 론

일반적으로 제어시스템 설계 문제는 동작도중 플랜트 매개변수의 섭동식별 오차(identification

error), plant dynamics의 비선형성, 제어기설계를 위한 모델의 간략화(simplification)등과 같은 여러가지 원인으로부터 일어나는 플랜트 모델의 불확실성에 직면한다. 이러한 불확실성은 실제 시스템의 어떠한 모델에 대하여서도 거의 피할 수 없으며 실제적인 관점으로부터 실행가능하며, 신뢰할 수 있는 제어 시스템 설계의 중요한 특징으로 고려되어야 한다.

최근에 많이 연구되는 강인 제어이론(robust

*正 會 員 : 慶南大 工大 電氣工學科 助教授
 **正 會 員 : 亞州大 工大 制御工學科 教授 · 工博
 接受日字 : 1988年 9月 15日
 1次修正 : 1989年 3月 18日

control theory)은 모델의 불확실성을 포함한 설계 원리(design philosophy)를 밝힐 것으로 기대된다. 강인 제어원리에서 가장 중요한 것중의 하나는 강인안정성(robust stability)으로서 제어시스템을 설계하는데는 강인안정성의 고려가 반드시 필요하다.

플랜트 모델의 불확실성 중의 하나인 플랜트의 매개변수 섭동을 취급하는데 있어 페루우프시스템의 안정화를 유지할 수 있는 플랜트 매개변수의 섭동범위를 추정하는것은 가장 중요한 문제이다.

Kharitonov¹⁾의 정리를 이용하여, Barmish⁴⁾, Bialas와 Garloff⁵⁾는 특성 다항식이 구간내의 모든계수 변화에 대해 strictly Hurwitz가 유지되는 특성 다항식의 설계 계수의 최대 구간을 구하기 위한 방법을 제안했다.

그러나, 이러한 방법은 단지 특수한 형태 즉, 비례 변수만을 취급한다. 최근 Biernacki⁶⁾등은 주어진 제어기에 대해 실 매개변수 공간에서 최대의 stability hypersphere를 구하는 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 플랜트가 섭동되는 매개변수 벡터를 포함하고 있는 선형시불변 제환 제어 시스템의 강인 안정화에 관한 알고리즘을 제시하면서 다음 각절의 경우에서 그 특징을 설명한다.

2절에서는 플랜트 매개변수 뿐만 아니라, 특성 다항식 계수의 tolerance를 최대화 하는 문제를 정식화 하고, 또한 안정영역 하에서 tolerance를 최대화할 강인제어기(fixed order에 대해)를 구한다.

3절에서는 non-destabilizing섭동의 특성을 기술하기 위해 사용된 안정판별(stability criterion)법이 소개된다.

4절에서는 두가지 문제- 즉, 4.1) 절에서는 계수 섭동 하에서 다항식의 안정도 문제를 다루며, 4.2) 절의 경우는 주어진 범위의 매개변수 섭동에 맞도록 플랜트를 안정화 시키는 제어기 알고리즘이 주어진다.

5절에서는 여러가지 예제를 언급하여 각각의 결과고찰을 하였다.

2. 문제의 정식화(Problem Formulation)

단일입력 혹은, 출력 중에서 단일입력 문제만을 고려하여 그림1의 제환시스템을 고려하자.

그림1에서 플랜트 G(s)는 mxl의 유리수 행렬(rational matrix)로서 다음과 같이 표현된다.

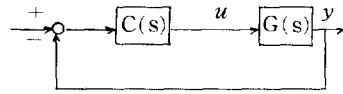


그림 1 제환 시스템

Fig. 1 Feedback system.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \hat{n}_1(s) \\ \hat{d}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{n}_m(s) \\ \hat{d}_m(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} n_1(s) \\ \vdots \\ \vdots \\ n_m(s) \end{bmatrix}$$

$$= n(s)d^{-1}(s) \tag{1}$$

여기서, d(s)는 G(s)의 모든 원소의 최소공분모(least common denominator)이며, 다음과 같이 가정한다.

$$d(s) = d_0s^q + \dots + d_0$$

$$n(s) = n_0s^q + \dots + n_0$$

여기서, d_i는 스칼라이고, n_i는 mx1상수 벡터이며 n(s)와 d(s)는 right coprime이다. 이때 제어기 C(s)를 다음 식과 같이 놓자.

$$C(s) = \frac{1}{d_c(s)}(n_{c1}(s), \dots, n_{cm}(s))$$

$$= d_c^{-1}(s)n_c^T(s) \tag{2}$$

식(2)에서 d_c(s)와 n_c(s)는 다음과 같으며

$$d_c(s) = d_{c0}s^p + \dots + d_{c0}$$

$$n_c(s) = n_{c0}s^p + \dots + n_{c0}$$

여기서, d_{c1}는 스칼라이고, n_{c1}는 mx1상수 벡터이며 d_c(s)와 n_c^T(s)는 left coprime이다.

페루우프 시스템의 특성 다항식을 다음과 같이 둔다.

$$b(s) = d_c(s)d(s) + n_c^T(s)n(s)$$

$$= b_0 + b_1s + \dots + b_n s^n \tag{3}$$

위의 특성 다항식 b(s)의 계수는 다음과 같은 식

3. Non-destabilizing 섭동 특성을 기술하기 위해 사용된 안정도 판별²⁾

식(3)의 실다항식을 가지고 다음과 같은 (2XN) 행렬 B_N 을 정의한다. 여기서 N은 $(n+2)/2$ 와 같던가 그보다 작은 최대 정수이다.

이때 n가 짝수 혹은 홀수일때 각각 다음과 같이 정의된다.

$$B_N := \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ b_0 & b_2 & \cdots & \cdot & b_n \end{pmatrix} \text{또는} \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_0 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

B_N 에서 출발하여, (2XK)행렬 B_k 는 $K=N-1, N-2, \dots, 1$ 에 대해 다음과 같이 구성한다.

$$B_k := \begin{pmatrix} v_1^{(k)} & v_2^{(k)} & \cdots & v_k^{(k)} \\ w_1^{(k)} & w_2^{(k)} & \cdots & w_k^{(k)} \end{pmatrix}, \quad K=N, N-1, \dots, 1 \quad (12)$$

여기서 F는 다음과 같은 반복연산으로 정의된다.

$$B_{k-1} = F(B_k) \quad (13)$$

$$v_i^{(k-1)} := \det \begin{pmatrix} v_1^{(k)} & v_{i+1}^{(k)} \\ w_1^{(k)} & w_{i+1}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad w_i^{(k-1)} := \det \begin{pmatrix} v_i^{(k)} & v_k^{(k)} \\ w_i^{(k)} & w_k^{(k)} \end{pmatrix} \quad (14)$$

이때 $K=N-1, \dots, 1$ 일 경우 $w_1^{(k)}=v_k^{(k)}$ 이며 $K=1$ 일 경우 행렬 B_1 는 2개의 동일 원소를 가지며 이 원소는 $\det B_2$ 이다. 또, 식(3)의 모든 계수가 0이 아니고 같은 부호를 갖는다고 가정하면 식(3)이 strictly Hurwitz이기 위한 필요충분조건은 $B_{N-1}, B_{N-2}, \dots, B_1$ 의 요소가 모두 양수인 것이다.

정리1

실다항식 (3)은 다음의 n개의 식이 모두 positive일때 strictly Hurwitz이다.

- i) $g_1(b) = b_0 b_1$
 $g_2(b) = b_0 b_n$ if n is odd.
- ii) $g_{n-2k+2}(b) = v_1^{(k)}$ $K=N-1, N-2, \dots, 2$
 $g_{n-2k+3}(b) = w_1^{(k)}$

iii) $g_n(b) = \det B_2$

또 식(3)의 계수는 다음식과 같은 독립변수의 ϵ 의 연속 함수로 가정한다.

$$\epsilon := [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r]^T \quad (15)$$

$$b_i = b_i(\epsilon)$$

위의 식들에서 임의의 점 ϵ 이 주어질때, 안정성 판별을 위해 모든 $g_1(\epsilon), g_2(\epsilon), \dots, g_n(\epsilon)$ 의 부호가 검토되어야 한다. 그러나, ϵ 의 값이 시스템의 안정영역에서 출발하여 연속적으로 변화하는 경우가 많으므로 이러한 상황에 관한 중요한 결과를 살펴보면 다음과 같다.

다항식 (3)이 순허수 공액근을 갖는다면 $K \geq 1$ 에 대해서 행렬 B_k 는 zero-matrix이다. 그러므로 $\det B_2$ 는 0이다.

다항식의 근은 계수들의 연속함수이기 때문에, 다항식의 모든 근이 좌반 평면에 위치한 점에서 출발하여 계수의 연속적인 섭동에 따른 근의 일부가 허수축상에 도달될때 안정도가 처음으로 상실되지 않는다. 따라서 허수축상에 한쌍의 공액근이 나타나기를 확인하여 안정도를 판별하면 된다.

정리2

$b_i(\epsilon)$ 의 ϵ 의 연속함수이며, 계수 $b_i(\epsilon)$ 을 갖는 다항식 (3)이 $\epsilon = \epsilon^0$ 에서 strictly Hurwitz이라면 $\epsilon^0 \in R_\epsilon$ 인 어떤 단순히 연결된 영역에서 식(3)은 R_ϵ 내의 임의의 점 ϵ 에서 $g_i(\epsilon) > 0$ 이고, 또한 $g_n(\epsilon) = \det B_2(\epsilon) > 0$ 일때 strictly Hurwitz이다.

정리2는 출발점이 feasible할때 최적화 과정에서 제약 조건의 수를 줄일 수있게 한다. 또한 정리2는 시스템의 안정성을 해치지 않고 주어진 점 ϵ^0 의 허용가능한 섭동의 최대범위를 특징지운다. 주어진 ϵ^0 에 대해 non-destabilizing 섭동영역 $S(\epsilon^0)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$S(\epsilon^0) = \begin{cases} \phi, \epsilon^0 \text{에서 (3)식이 strictly Hurwitz가 아닐때} \\ \text{정리2를 만족하는 최대 } R_\epsilon, \end{cases}$$

만일 안정영역이 존재한다면, $S(\epsilon^0)$ 는 경계가 $g_1(\epsilon) = 0$, and/or $g_n(\epsilon) = 0$ 로 정해지는 ϵ^0 를 포함하는 개구간이다.

또 시스템 매개변수의 섭동공간에서 안정도 영

역 S_ϵ 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$S_\epsilon \leq \{\epsilon \in R^r | g_i(\epsilon) > 0 ; i=1, 2, \dots, n\} \quad (16)$$

S_ϵ 은 다음과 같이 표시될 수 있는 모든 non-destabilizing 섭동 영역의 합집합이다.

$$S_\epsilon = \bigcup_{\epsilon^0} S(\epsilon^0)$$

일반적으로 안정영역이 존재한다면, $g_i(\epsilon)=0$ 및 $g_n(\epsilon)=0$ 의 경계를 갖는 유한개나, 무한개의 disjoint open and simply connected 영역으로 안정영역은 구성될 수 있다.

4. 플랜트 매개변수 섭동의 특성 다항식의 안정도

4.1 계수섭동하에서의 다항식의 안정도

문제 1.1)을 풀기 위하여 다음식과 같은 독립변수 벡터를 정의한다.

$$\epsilon = \{p_n, p_1, \dots, p_n, q_0, q_1, \dots, q_n\} \quad (17)$$

이 문제에 대하여 Kharitonov¹⁾는 S_b 가 일차원 convex²⁾임을 증명하였고 무한의 안정도 제약조건 (tolerance 영역내의 각 점에 대해)을 R_ϵ 의 정점 (vertex)들과 관련된 유한개의 안정도 제약조건으로 줄일 수 있게 하였다.

더구나, 그는 이것이 4개의 정점만으로 축소될 수 있음을 보였다.

정리2에 따라 4개의 정점에서의 2개의 제약조건을 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$j_1'(\epsilon) > 0, g_n'(\epsilon) > 0, j=1, 2, 3, 4, \quad (18)$$

사실상 첫번째의 4개의 제약조건 $g_1^{(1)}(\epsilon), g_1^{(2)}(\epsilon), g_1^{(3)}(\epsilon), g_1^{(4)}(\epsilon)$ 은 식 (19)와 같은 하나의 제약조건에 의해 대치될 수 있다.

$$b_0(\epsilon) \times \bar{b}_0(\epsilon) > 0 \quad (19)$$

또한 다음의 선형 제약 조건이 고려되어야 한다.

$$\epsilon_i > 0, i=1, 2, \dots, r=2n+2 \quad (20)$$

$i=0, 1, \dots, n$ 에 대해 p_i 와 q_i 의 최대화는 다변수 변화를 최적화하는 문제이다. 여기서 다음과 같은 tolerance cost function을 사용하면,

$$f(\epsilon) = \sqrt{\sum_{i=1}^r \epsilon_i^2} \quad (22)$$

위 문제는 다음과 같은 비선형 프로그래밍 문제로 정식화된다. 식 (18) 및 (20)을 만족하는 ϵ 의 영역내에서 $f(\epsilon)$ 을 최소화하는 ϵ 및 $f(\epsilon)$ 을 구하는 비선형 프로그래밍 문제로 취급할 수 있다.

정리2에 따라서 출발점은 반드시 feasible해야 하며 여기서 논의된 방법에 의한 최적화는 특성 다항식의 근이 결정되어야 하므로 기존 해석적 방법에 의해서 S_ϵ 를 구하는 복잡한 과정을 피하고, 컴퓨터를 이용해서 쉽게 구할 수 있는 접근 방식의 한 방법이다.

4.2 시스템 매개변수 섭동하에서 특성 다항식의 안정도

4.2.1 고정변수를 갖는 제어기의 경우

문제 1,2)를 풀기 위하여 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon = \{v_0, v_1, \dots, v_p, w_0, w_1, \dots, w_p\} \quad (22)$$

Kharitonov¹⁾에 의해 다항식 $h_j(s, \epsilon)$ 의 차수 m 의 Hurwitz 행렬식은 $d_{m,j}(\epsilon)$ 으로 정의하고⁵⁾, 여기서 $1 \leq m \leq n, j=1, 2, 3, 4$ 이다. 일변수 섭동 (one-variable perturbation)에 대해 최대 허용가능한 섭동 ϵ_{max} 는 다음식과 같이 표현된다.⁵⁾

$$\epsilon_{max} = \min \{j z_{nj}, \tau_0, j=1, 2, 3, 4\} \quad (23)$$

여기서 z_{nj} 는 $d_{m,j}$ 의 최소 nonnegative roots이며, $P_n > 0$ 이면 $\tau_0 := \frac{b_n}{P_n}$, $P_n = 0$ 이면 $\tau_0 = \infty$ 로 둔다.

또 식(21)을 이용하여, 다음과 같은 등가 정식화를 할 수 있다.

$$\min_{\epsilon} f(\epsilon) \quad (24)$$

such that $d_{m,j}(\epsilon) \geq 0, 1 \leq m \leq n, j=1, 2, 3, 4$
 $\epsilon \geq 0$

정리2에 따라서 식(24)는 다음식과 같이 줄일 수

있다.

$$\min_{\epsilon} f(\epsilon) \tag{25}$$

such that $b_0(\epsilon)\bar{b}(\epsilon) \geq 0$

$$g_n^{(j)}(\epsilon) \geq 0, j=1, 2, 3, 4$$

$$\epsilon \geq 0$$

다변수 섭동에 대해서 이 식은 식(21)에 논의된 다변수 섭동을 최적화하는 문제가 될 수 있다.

4.2.2 비고정 변수를 갖는 제어기의 경우

문제 2.1)을 풀기 위하여, zero-order 제어기 즉 $c(s)=[k_1, k_2, \dots, k_n]$ 인 일변수섭동을 고려하자. 만일 제어기 미지의 변수 K 의 부호가 알려져 있다면, Kharitonov¹⁾에 의한 4개의 특성 다항식을 구성할 수 있으며 다음과 같이 정식화된다.

$$\epsilon_{\max} = \max_{\epsilon, k} \min_j \tau_n, j(k), \tau_0(k) j=1, 2, 3, 4 \tag{26}$$

4절 4.1)에 의해서 식 (26)에 대한 등가 정식화를 얻는다.

$$\min_{\epsilon, x} f(\epsilon) \tag{27}$$

such that $b_0(\epsilon, k), \bar{b}_0(\epsilon, k) > 0$

$$g_n^{(j)}(\epsilon, k) < 0, j=1, 2, 3, 4$$

$$\epsilon \geq 0$$

차수 m 의 제어기를 갖는 다변수 섭동에 대해 이 문제는 다음과 같이 정식화 될 수 있다.

$$\min_{\epsilon, x} f(\epsilon) \tag{28}$$

such that $b_0(\epsilon, x) > 0$

$$g_n^{(j)}(\epsilon, x) > 0, j=1, 2, 3, 4, \epsilon \geq 0$$

일반적으로 제어기 변수부호(sign of controller

variable)의 전 조합(2^{2m+2} 의 경우)에 대해 이러한 최적화 방법을 사용해야 하나, 이것은 한개의 프로그래밍 내에서 자동적으로 구할 수 있다.

제어 알고리즘 1.

고정 변수를 갖는 제어기의 경우 강인 제어기를 구하기 위한 제어기의 형태나 차수는 임의이나, 여기서는 n 차 시스템을 고려하자. 이때 시스템은 가제어와 가관측한 것으로 가정한다.

step 0 : $b(s)$ 가 Hurwitz인 b^0 를 선택한다.

step 1 : $x = A^{-1}b_0$ 를 계산한다.

step 2 : $\max_x f(\epsilon)$

such that $b_0(\epsilon, x)\bar{b}_0(\epsilon, x) > 0$

$$g_n^{(j)}(\epsilon, x) > 0, j=1, 2, 3, 4$$

$$\epsilon \geq 0$$

step3 : $f(\epsilon)$ 이 최소이면 정지하고 제어기를 구한다. 그렇지 않으면, $\Delta f(x^i)^T$ 와 $x^{i+1} = x^i + \lambda^* \Delta f(x^i)^T$ 를 계산한다. 여기서, λ^* 는 다음식을

$$\phi(\lambda) = \min_{\lambda \in (0, \infty)} f\{x^i + \lambda \Delta f(x^i)^T\}$$

만족하는 값이다. step 2로 간다.

Note : Ax 가 Hurwitz되게 하는 x 가 존재한다면 Ax 와 $(A + \Delta A)x$ 를 동시에 Hurwitz되게 하는 x 는 항상 존재한다. 문제 2.2)를 풀기 위해 v_i 와 w_i 는 동일한 것으로 가정한다. 이때 $i=0, 1, \dots, n$,이고 b 와 \hat{b} 는 다음과 같다.

$$d_i(b) > 0, d_i(\hat{b}) > 0, i=1, \dots, n \tag{29}$$

Procedure 1 : 시스템 행렬 A 가 주어지면 식 (29)는 식 (30)과 식 (31)로 된다.

$$d_i(x) > 0 \tag{30}$$

$$d_i(\Delta a, x) > 0 \tag{31}$$

식 (30)과 식 (31)에서 C 와 \hat{C} 은 각각 Hurwitz 영역에서의 b 와 \hat{b} 에 대한 안정화 제어기이다. 강인 제어기 문제 2.2)를 풀기위한 안정 제어기는 다음 식과 같이 정의될 수 있다.

$$Cr = C \cap \hat{C} \tag{32}$$

Procedure 2 : $\Delta a \in R^{p+1}$ 을 시스템 매개변수 섭동 공간에서의 좌표라 하자. $\|\Delta a\|_2=0$ 는 변화가 없는 원점이기 때문에 x^* 에 대한 안정 영역은 원점을 통과하여야 한다. 식(32)으로부터 $d_i(\Delta a, x)$ 는 주어진 좌표 Δa 에 대해 식 (7)의 안정 영역에 경계를 만든다.

Procedure 3 : $r_i(X)$, $i=1, \dots, n$ 을 구한다. 여기서 $r_i(x)$ 는 $d_i(\Delta a, x)$ 와 원점 사이의 최단 거리이다.

Procedure 4 : Cr에서 $\max \|\Delta a\|_2$ 를 구한다.

$$r^* = \max_X \min_{i=1, \dots, n} r_i(x) \quad (33)$$

such that $d_i(x) > 0$

$$\Delta a \geq 0$$

r^* 계산 도중에 x^* 를 얻는다.

Procedure 5 : $\|\Delta a\|_2 < r^*$ 이면, 그때 동일한 x^* 를 갖는 설계된 시스템과 섭동된 시스템은 동시에 모든 종류의 시스템 매개 변수 섭동에 대해 안정하다.

l 을 제어기 차수라 하자.

$$(A + \Delta A)x = \hat{b} \text{으로부터} \\ \|\Delta A\|_F = (l+1)\|\Delta a\|_2 \quad (34)$$

$$\|\Delta A\|_F < (b+1)r^* \quad (35)$$

이러면, 이때 $(A + \Delta A)x$ 는 Hurwitz영역내에 존재한다.

제어 알고리즘 2

비고정 변수를 갖는 제어기의 경우 강인 제어기를 구하기 위한 제어기의 형태나 차수는 임의이나, 여기서는 p 차 시스템과, $(p-1)$ 차 제어기를 고려하면 $b(s)$ 에서의 차수 n 은 $2p-1$ 이다.

step0 : $b(s)$ 가 Hurwitz인 b^0 를 선택한다.

step1 : $K=1$ 로 놓는다.

step2 : $x = A^{-1}b^0$ 를 계산한다.

step3 : $j=1$ 로 놓는다.

step4 : 다음 식을 계산한다.

$$r_j = \min_{\Delta a} \left(\sum_{i=1}^{2p+2} \Delta a_i \right)^{1/2}$$

such that $d_j(\hat{b}) = 0$

step5 : $j=j+1$

step6 : $j > n$ 이면 step7로 가고 그렇지 않으면 step4로 간다.

step7 : 다음 식을 계산한다.

$$R_k^* = \max_x r_k(x)$$

such that $r_k(x) - r_m(x) \leq 0$, $m=1, \dots, n$, and $m \neq k$

$d_i(b) > 0$, $i=1, \dots, n$

step8 : $r_k(x)$ 가 최대이면 step9로 가고

그렇지 않으면, $r_k(x^i)^T$ 와 $x^{i+1} = x^i + \lambda^* \Delta r_k(x^i)^T$ 를 계산하고 step4로 간다.

step9 : $K=K+1$

step10 : $K > n$ 이면 step11로 가고, 그렇지 않으면 step2로 간다.

step11 : 다음 식을 계산한다.

$$R^* = \max_{K=1, \dots, n} (R_k^*)$$

5. 컴퓨터 시뮬레이션에 의한 결과 고찰

5.1 예제1의 결과 고찰

4차의 불안정한 스칼라 플랜트 전달함수를 다음 식과 같이 주어졌다고 하자.

$$G(s) = \frac{n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}$$

여기서 n_i 와 d_i 는 다음과 같이 놓자.

$$\begin{aligned} n_4 &= 1 \pm 0.45, & n_3 &= 4 \pm 0.35, & n_2 &= 7 \pm 0.45, & n_1 &= \\ & & & & & & & 3 \pm 0.35, & n_0 &= 5 \pm 0.15 \\ d_4 &= 1 \pm 0.45, & d_3 &= -5 \pm 0.35, & d_2 &= 8 \pm 0.45, & d_1 &= \\ & & & & & & & -6 \pm 0.35, & d_0 &= -4 \pm 0.15 \end{aligned}$$

이때 주어진 허용 가능한 범위로 부터 플랜트 매개변수 섭동의 norm은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\|\epsilon'\|_2 = 1.15974$$

설계된 플랜트에 대해 다음과 같은 1차 안정화 제어기를 얻었다.

$$x = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.03 \\ 0.11 \\ 0.07 \end{pmatrix}$$

페루우프 다항식의 대응하는 근은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -0.1294 \pm j0.4640 \\ -0.8462 \pm j1.7818 \\ -1.5753 \end{bmatrix}$$

4절 (4.2.1)에 제시된 방법에 의해서 얻어진 hypersphere반경은 다음과 같다.

$$R^* = \|\mathcal{A}\epsilon\|_2 = 1.16716 > \|\epsilon'\|_2$$

결과에서 보면 플랜트 매개변수 섭동 영역내에서 안정한 제어를 얻었다는 사실을 확인할 수 있으며 얻어진 모든 값은 Harwell Subroutine Library의 VF02AD(used for nonlinear programming in main program)를 사용했다. 이 프로그래밍은 다변수의 등식 및 부등식 형태의 일반적인 제약조건 하에서 임의의 스칼라함수의 최소치를 구하는 비선형 프로그래밍이다.

5.2 예제2의 결과 고찰

4차의 1입력 2출력 불안정 플랜트 전달함수를 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 - 3s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s^4 - 5s^3 + 8s^2 \\ -6s + 4 \\ s^4 + 3s^3 + s \\ + 4s + 2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{d_i(s)} \begin{bmatrix} n_{41}s^4 + \dots + n_{01} \\ n_{42}s^4 + \dots + n_{02} \end{bmatrix}$$

여기서,

$$\begin{aligned} d_i - \Delta d_i &\leq d_i \leq d_i + \Delta d_i \\ n_{i1} - \Delta n_{i1} &\leq n_{i1} \leq n_{i1} + \Delta n_{i1} & i=1, \dots, 4 \\ n_{i2} - \Delta n_{i2} &\leq n_{i2} \leq n_{i2} + \Delta n_{i2} \end{aligned}$$

설계된 플랜트에 대하여 얻어진 초기 0차 안정화 제어기는 다음과 같고,

$$x = \begin{bmatrix} -0.7375 \\ 0.2034 \\ 1.5160 \end{bmatrix}$$

페루우프 다항식의 대응하는 근은 아래와 같다.

매개 변수 섭동 구조를 갖는 플랜트의 강인 안정화 알고리즘

$$\begin{bmatrix} -0.3513 \pm j0.4935 \\ -0.6956 \pm j1.9042 \end{bmatrix}$$

4절 (4.2.2)의 경우의 방법에 의해 얻어진 hypersphere반경은 다음과 같다.

$$R^* = \|\mathcal{A}\epsilon\|_2 = 0.57823$$

알고리즘 2에 의해 얻어진 강인 제어기는 다음과 같으며,

$$x^* = \begin{bmatrix} -0.69615 \\ 0.19599 \\ 1.53879 \end{bmatrix}$$

페루우프 다항식의 대응하는 근은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -0.4141 \pm j0.5234 \\ -0.6662 \pm j1.7347 \end{bmatrix}$$

또한, 알고리즘2에 의해 얻어진 hypersphere반경은 다음과 같다.

$$R^* = 0.61038$$

x와 x*에서 얻어진 결과를 각각 살펴보면 $\|\mathcal{A}a\|_2 < 0.57823$, $\|\mathcal{A}a\|_2 < 0.61038$ 이고 여기서 $\|\mathcal{A}a\|_2 = [\sum_{i=0}^4 \Delta d_i + \Delta m_{i1}^2 + \Delta m_{i2}^2]^{1/2}$ 이다.

그러므로 X와 X*는 각각 플랜트 변수의 $\|\mathcal{A}a\|_2 < 0.57823$, $\|\mathcal{A}a\|_2 < 0.61038$ 내의 모든 섭동상태하에서 페루우프 시스템을 안정화시킨다.

5.3 예제 3의 결과 고찰

4차의 1입력 2출력 불안정 플랜트 전달함수를 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$G(s) = \frac{1}{d_4s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0} \begin{bmatrix} n_{41}s^4 + n_{31}s^3 \\ + n_{21}s^2 \\ + n_{11}s + n_{01} \\ n_{42}s^4 + n_{32}s^3 \\ + n_{22}s^2 \\ + n_{12}s + n_{02} \end{bmatrix}$$

여기서, d_i 와 n_i 는 다음과 같이 둔다.

$$\begin{aligned} d_4 &= 1 \pm 0.25, \quad d_3 = 2 \pm 0.25, \quad d_2 = -3 \pm 0.25, \quad d_1 = 2 \pm 0.25, \quad d_0 = 1 \pm 0.25 \\ n_{41} &= 1 \pm 0.2, \quad n_{31} = -5 \pm 0.2, \quad n_{21} = 8 \pm 0.2, \quad n_{11} = -6 \pm 0.2 \\ n_{01} &= -4 \pm 0.2 \\ n_{42} &= 1 \pm 0.1, \quad n_{32} = 4 \pm 0.1, \quad n_{22} = 2 \pm 0.1, \quad n_{12} = 3 \pm 0.1, \quad n_{02} = 5 \pm 0.1 \end{aligned}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -0.10055 \\ 3.712622 \\ 3.95993 \\ -2.67278 \\ 2.85187 \\ 6.55114 \end{pmatrix}$$

이때 플랜트 매개 변수 섭동의 norm은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\|\epsilon'\|_2 = 0.75$$

극점배치에 의해 얻어진 초기 1차 안정화 제어기는 다음과 같다.

$$x = \begin{pmatrix} 1.44871 \\ 4.07202 \\ 3.16788 \\ -4.75700 \\ 1.38284 \\ 5.37415 \end{pmatrix}$$

페루우프 다항식에 대응되는 근은 다음과 같으며,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

4절 (4.2.1)의 경우의 방법에 의해 얻어진 hypersphere반경은 다음과 같다.

$$R^* = \|\Delta\epsilon\|_2 = 0.18661$$

얻어진 결과에서 보면 $R^* = \|\Delta\epsilon\|_2$ 가 $\|\epsilon'\|_2$ 보다 작다는 것을 알 수 있다. 이 사실은 모든 페루우프 시스템에서 플랜트 매개변수의 얻어진 섭동영역이 모두 안정영역이 아니라는 사실을 알 수 있고 그러므로 gradient optimization에 의한 더 큰 반경의 안정한 hypersphere를 갖는 다른 제어기를 찾을 수 있다.

알고리즘 2에 의해 얻어진 1차 강인 제어기는 다음과 같고,

페루우프 다항식의 대응하는 근은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} -0.878 \pm j0.7241 \\ -0.2371 \pm j1.1058 \\ -1.0587 \end{pmatrix}$$

얻어진 hypersphere반경은 다음과 같다.

$$R^* = 0.88224 > \|\epsilon'\|_2$$

그러므로 x^* 는 주어진 매개변수의 섭동영역에서 모든 페루우프 시스템을 안정화 시키게 된다.

6. 결 론

본 논문에서는 플랜트 매개변수 벡터의 섭동을 갖는 선형 시불변 시스템을 안정화시키는 문제를 고려하였다. 설계된 플랜트 매개변수를 중심으로 한 최대안정 hypersphere를 구하기 위한 방법을 제시하였으며, 플랜트 매개변수 공간에서 안정 hypersphere 반경을 최대로 하는 강인제어기를 구하기 위해 gradient 최적화 방법에 의한 알고리즘을 구하였다.

본 논문의 결과를 적용하면 실제 매개변수들의 선형, 혹은 비선형함수인 플랜트 매개변수를 갖는 여러가지 제어기 문제들을 실제 매개변수의 함수를 새로운 매개변수로 정의함으로써 얻어진 결과와 같이 수학적 모델로 만들어져서 실제 매개변수들의 섭동에 관한 문제들을 다루는데 적용할 수 있다. 그러나, 플랜트 매개변수의 구조적인 섭동 상태하에서 다변 입출력 페루우프 시스템의 안정도 margin을 계산하는 문제가 언급되고 있으며^{9,10} 특히 주파수영역에서 활발히 연구되고 있지만, 일반적인 경우에 있어서의 정확한 안정도 margin을 구하는 문제는 아직까지도 해결되지 않은 연구과제로 남아있다.

참 고 문 헌

- 1) V.I. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations," *Upravnen.*, vol. 14, no. 11, pp. 2066-2088, Nov 1978.
- 2) R.M. Biernacki, "Sensitivities of stability constraints and their applications," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, no. 7, pp. 639-642, July 1986.
- 3) J.P. Guiver and N.K. Bose. "Strictly Hurwitz property invariance of quartics under coefficient perturbation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-28, no. 1, pp. 106-107, Jan 1983.
- 4) B.R. Barmish, "Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, no 10, pp. 935-936, Oct 1984.
- 5) S. Bialas and J. Garloff, "Stability of polynomials under coefficient perturbation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, no. 3, pp. 310-312, Mar 1985.
- 6) R.M. Biernacki, Humor Hwang, S.P. Bhattacharyya, "Robust stability with structured Real parameter perturbations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, no. 6, pp. 495-506, Jun 1987.
- 7) J.W. Bandler, "Optimization of design tolerances using nonlinear programming," *Journal of Optimization theory and Applications.*, vol. 14, pp. 99-114, Jul 1974.
- 8) J. Doyle, "Analysis of feedback systems with structured uncertainties," *IEE. proc.*, vol. 129, part. D. No. 6, pp. 240-252, Nov 1982.
- 9) D.H. Owens, "Robust stability of multivariable feedback system with respect to linear and nonlinear feedback perturbations," *IEEE. Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, no. 1, pp. 254-256, Feb 1982.
- 10) M. Saeki, "A method of robust stability analysis with highly structured uncertainties," *IEEE. Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, no. 10, pp. 935-940, Oct 1986.