

적응추정자에 대한 파라미터 수렴속도의 해석

Analysis of the Parameter Convergence Rate for an Adaptive Identifier

金 成 德*
(Sung-Duck Kim)

요 약

이 논문은 단일 입·출력 플랜트 모델을 추정하는 적응시스템의 파라미터 수렴특성을 기술한다. 파워 스펙트럼 해석을 이용하여, 적응제어시스템의 지수적인 안정도를 보장하기 위한 지속적인 여기 (persistent excitation: PE) 조건이 적응신호에 대한 자기 상관함수행렬의 정칙성 조건으로 변환될 수 있다는 것을 보인다. 파라미터 공칭값의 존재성은 이 조건으로 해석될 수 있으며, 파라미터의 수렴비율은 자기 상관함수를 검토하여 결정된다. 파라미터 유계성을 해석하는데에 PE 조건 대신 입력 스펙트럼의 충분조건 (sufficient richness: SR) 을 이용할 수도 있다. 자기 상관함수의 고유치는 항상 적응이득, 입력진폭 및 입력 스펙트럼의 위치나 수에 관계된다는 것을 증명할 수 있다. 각 경우에 파라미터 수렴속도의 변화 역시 규명된다.

Abstract-This paper describes the parameter convergence properties of an adaptive system to identify a single-input single-output plant model. It is demonstrated that, by using power spectrum analysis, the persistency of excitation (PE) condition in order to guarantee the exponential stability of the adaptive control system can be transformed into the positive definite behavior for the auto-correlation function matrix of adaptive signal. The existence of parameter nominal values can be analyzed by this condition and the convergence rates of parameters are determined by examining the auto-correlation function. We may use the sufficient richness (SR) of input spectrum instead of the PE condition to analyze the parameter boundedness. It can be shown that the eigen values of the auto-correlation function are always related with adaptive gain, input amplitude and positions or numbers of input spectra. In each case, the variation of parameter convergence rate can be also verified.

1. 서 론

제어시스템은 제어대상의 물리적 특성을 정확히

알고 있다고 가정하여 설계된다. 이 때 플랜트 특성은 수식모델로 표현되고, 이 모델을 토대로 하여 제어기의 파라미터들이 결정된다. 측정할 수 있는 신호들로부터 플랜트 모델을 구하는 방법인 시스템 추정 (system identification) 또는 파라미터 식별 (parameter estimation)은 제어시스템을 설계하는

*正 會 員 : 大田工業大學 電子工學科 助教授 · 工博
接受日字 : 1988年 11月 5日
1次修正 : 1988年 12月 27日

데 이용되는 기본적인 수단이다. 특히, 동작 중에 제어기와 플랜트의 파라미터들이 변화되는 경우에는, 실시간에 파라미터들을 조절하여 안정한 제어 특성을 얻는 것이 요구된다. 기준모델 적응제어 시스템이나 자기동조 제어를 설계하는 경우의 대부분은 플랜트의 모델이나 가조절 파라미터들을 식별하는 과정을 포함하고 있고, 이 경우 추정 알고리즘과 적응특성에 관한 많은 연구가 이루어졌다.^{1),2)}

적응추정(adaptive identification)이란 미지 플랜트의 파라미터들을 순차적으로 식별하는 온-라인 추정방법 중 하나이다. 이러한 해석은 Lion³⁾에 의해 최초로 시도되었으며, 그 후 여러 사람들에 의해 광범위하게 연구되었다.^{4),5)} 일반적으로 적응추정자(adaptive identifier)는 미지 플랜트의 차수가 알려지고, 선형 시불변 시스템이며 안정하다는 등 몇 가지 가정하에 설계된다. 이러한 가정들은 제어를 포함한 적응구조가 안정하여 추정파라미터들이 유계될 수 있도록 주어지는 전제조건이다.

전형적인 적응제어 시스템의 안정도는 강정실(strictly positive real : 이하 SPR이라 함) 조건과 지속적인 여기(persistent excitation : 이하 PE 이라 함) 조건으로 설명된다. 이 때 SPR은 Lyapunov 안정도 개념에서 적응칙을 선정하여 제어루우프가 안정하게 동작하기 위한 조건이며, PE는 추정파라미터들을 공칭값으로 수렴시키기 위해 요구되는 조건이다.

플랜트의 차수가 유한하고 미지 파라미터들이 상수라고 가정하여 설계된 적응추정자의 PE는 가조절 파라미터들의 입력인 적응신호에 대한 제약이다. 오프-라인 방법을 사용하는 일반적인 식별문제에서와는 달리 적응추정자에서는 온-라인 추정방법을 사용한다. 그러나, 비선형계환루우프의 적응신호가 PE이면 시변인 적응칙은 안정하고 추정파라미터는 공칭값에 수렴한다. 이 경우 적응신호는 적응추정자의 입력이 선형필터를 통해 변환된 신호이므로, PE는 입력신호에 대한 주파수 조건으로 설명된다. 이 성질이 입력신호의 주파수 충분성(sufficiently richness : 이하 SR이라 함)이다. 가조절 파라미터 수는 플랜트 차수에 의해 정해지고, 적응신호가 PE이기 위한 입력신호의 주파수 성분도 파라미터 수에 따라 결정된다. 이 경우 PE가 성립되는 스펙트럼 성분의 하한은 규명되었지만 연속시간 적응추정자의 PE조건과 입력의 SR관계는 구체적으로 밝혀지지 않았다.⁶⁾

적응추정자는 미지 파라미터들을 연속해서 추정해야 하기 때문에 가조절 파라미터의 수렴 속도는

안정도에 중요한 역할을 한다. 미지 플랜트의 상태를 추적하는 적응관측자에 대해서는 제어기의 구조를 개선하여 수렴비율을 증진시키는 몇몇 보고가 있었다.⁷⁾ 물론, 적응 파라미터의 수렴특성은 적응엘고리즘의 형태, 적응이득 및 입력신호의 진폭 등에 관계된다는 사실은 이미 밝혀졌다.⁸⁾ 그러나, 지금까지 수렴비율을 나타내는 척도가 정의된 일이 없으므로, 입력 스펙트럼의 위치나 수 등이 추정 파라미터의 수렴속도에 미치는 효과가 구체적으로 해석되지 않았다. 본 논문에서는, 적응신호 벡터의 PE 성질을 입력신호의 주파수 천이특성으로 설명하기 위해 문헌[9, 10]의 주파수 해석기법과 평균화 이론을 확장하고, 적응추정자의 신호변환과정 및 적응수렴특성을 해석한다. 이 경우 입력 스펙트럼과 적응신호의 PE조건 사이의 관계를 검토함으로써 적응이득, 입력진폭 및 입력 스펙트럼의 크기와 수가 수렴속도에 미치는 영향을 규명할 수 있다.

2. 적응추정자의 파워 스펙트럼 해석

2.1 적응추정자의 구조

미지 플랜트를 단일 입·출력 선형 시불변 시스템이라 하고, 그림 2-1과 같은 적응추정자를 구성한다. 표현을 간단히 하기 위하여, $\{S\}$ 는 안정한 전달함수의 집합, $\{SPR\}$ 은 SPR인 전달함수의 집합이라 하고, $\{PE\}$ 및 $\{SR\}$ 은 PE 및 SR인 신호들의 집합이라 한다.

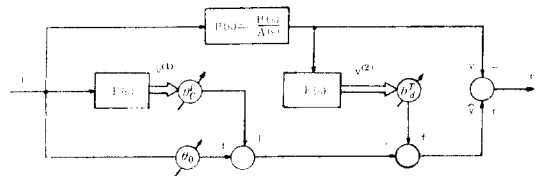


그림 2-1 적응추정자.

Fig. 2-1 An adaptive identifier.

추정될 미지 플랜트의 전달함수는

$$P(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{2-1}$$

여기서, $A(s)$ 와 $B(s)$ 는 서로 소이며, $A(s)$ 는 monic Hurwitz 다항식으로 $\deg[A(s)] = n$ 이다. 이 때 $\deg[A(s)]$ 는 $A(s)$ 의 상한차수이다. 또한 $\deg[B(s)] = m (\leq n)$ 으로 추정할 미지 파라미터는 $\ell = n + m + 1$ 개이다.

한편, 선형 보조필터는 다음과 같이 구성한다.

$$F(s) = \frac{1}{N(s)} [1, s, \dots, s^{n-1}]^T \quad (2-2)$$

여기서 $N(s)$ 는 n 차의 안정한 monic 다항식이다. 이 경우 필터의 출력신호 $v^{(1)}(t) \in \mathbb{R}^n$ 및 $v^{(2)}(t) \in \mathbb{R}^n$ 은

$$v^{(1)} = F(s)r \quad (2-3)$$

$$v^{(2)} = F(s)P(s)r \quad (2-4)$$

이 때 \mathbb{R}^n 은 n 차의 실수계를 나타내며, $r(t) \in \mathbb{R}$ 은 기준입력이다.

그림 2-1의 적응구조에서는 플랜트의 미지 파라미터들을 직접 추정하지 않고, 가조절 파라미터 $\theta(t) \in \mathbb{R}^l$ 을 추정한다. 이 때 $\theta = [\theta_0, \theta_1^T, \theta_n^T]^T = [\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}, \dots, \theta_{2n}]^T$ 이다. 적응신호를 $z^{(1)} = [r, v^{(1)T}, v^{(2)T}]^T \in \mathbb{R}^l$ 이라 하면 추정출력 $\hat{y}(t)$ 는

$$\hat{y} = z^T \theta \quad (2-5)$$

이 때 입력과 적응신호 사이에 다음 관계가 성립된다.

$$z = Q(s)r \quad (2-6)$$

여기서 $Q(s) \in \mathbb{C}^l$ 은

$$Q^T(s) = [1, F^T(s), F^T(s)P(s)] \quad (2-7)$$

이다. \mathbb{C}^l 은 l 차원 복소수계를 나타낸다. 이 때 출력오차 $e(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$e = \hat{y} - y \quad (2-8)$$

이 때 $y(t) \in \mathbb{R}$ 은 플랜트의 출력이다.

적용목적은, 플랜트 출력과 선형필터를 포함한 적응루우프 출력 사이의 오차를 점근적으로 영에 수렴시켜서 가조절 파라미터 θ 를 식별하고, 이 θ 를 사용하여 플랜트의 수식모델을 구하는 것이다. 적응제어 시스템은 전체 제어루우프가 안정하여 출력오차와 가조절 파라미터가 유계될 수 있도록 설계되어야 한다. 따라서 적응제어기는 이 신호들이 평형될 것이라는 가정으로부터 구성방법이 결정된다. 특히, 적응추정자는 신호들의 평형점이 공칭값과 같아야 하기 때문에, 이 경우 여러가지 설계조건들이 주어지게 마련이다.

적용신호들의 수렴특성은, 입력, 적응신호 및 출력오차와 파라미터 오차벡터 관계를 적당히 표현한 수식모델에 대한 안정도를 검토함으로써 해석된다. 이러한 모델은 Narendra 연구진들이 제시했던 오차방정식 형태"보다 대부분의 적응구조에 적용할 수

있는 Kosut와 Friedlander의 일반화 적응오차 모델 형태를 사용하는 것이 편리하다.^{8),11)} 그림 2-1에서, e , z 및 θ 의 공칭값을 e^* , z^* , 및 θ^* 라 표기하면 다음의 적응오차 모델이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^* \\ z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ev}(\theta^*, s) \\ H_{zv}(\theta^*, s) \end{bmatrix} \nu \\ &= \begin{bmatrix} Q^T(s) \theta^* & 1 \\ Q(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \nu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-9)$$

이 식에서 $H_{ev}(\theta^*, s)$: $e \rightarrow \nu$ 는 e 와 ν 사이의 사상관계를 나타내는 전달연산자이다. 이때 가조절 파라미터 오차벡터를 $\phi = \theta - \theta^*$ 라 하면 적응신호 오차벡터 $\nu(t)$ 는

$$\nu = z^T \phi \quad (2-10)$$

이다.

식 (2-9)에서 $H_{ev}(\theta^*, s)$ 는 SPR이므로 다음의 적응칙

$$\dot{\theta} = -\gamma e z, \quad \gamma > 0 \quad (2-11)$$

을 사용할 때 이 시스템은 대국적 점근 안정하다. 즉, $z \in L_\infty$ 및 $e^* = 0$ 이므로 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\dot{\phi}$, $e \rightarrow 0$ 이다. 한편, 다음식

$$\beta I \geq \int_s^{s+\sigma} z z^T dt \geq \alpha I \quad (2-12)$$

를 만족하는 유한상수 α, β 및 $\delta > 0$ 가 존재하면 $z \in \text{PE}$ 이고, ϕ , $\dot{\phi}$ 및 e 는 지수적으로 영에 수렴한다.

2.2 파워 스펙트럼 해석법의 도입

파라미터 적응방법을 사용하는 적응제어 시스템의 PE조건은 식 (2-12)로 주어지지만, 이 식으로 파라미터를 공칭값에 수렴시키기 위한 입력 스펙트럼의 조건을 설명하기 곤란하다. 식 (2-5)를 식 (2-8)에 대입한 결과를 식 (2-11)에 적용하면

$$\dot{\theta} = -\gamma z z^T \theta + \gamma z y \quad (2-13)$$

입력 r 이 유계되고 $P(s) \in \text{IS}$ 이므로 y 및 z 는 유계이며, θ 의 초기치가 유한하면 비제차 선형미분 방정식인 식 (2-13)의 안정도는 $\gamma z z^T$ 의 성질에 의해 결정된다. 유계인 z 에 대하여 $z z^T$ 의 최소 고유치는 영이며, 모든 t 에 대하여 다음 관계가 성립된다.

$$\text{trace}[z z^T] > 0 \quad (2-14)$$

따라서, $zz^T \geq 0$ 이므로 식(2-13)은 안정하고, $t \rightarrow \infty$ 일 때 θ 는 유한값으로 수렴한다. 이 때 $z \in \{PE\}$ 이면 θ 의 유한값은 공칭값과 일치하게 된다.

식(2-6)에 의하여 적응신호는 입력의 선형변환 신호임을 알 수 있고, 따라서 식(2-12)의 PE 조건은 입력의 주파수 특성으로 기술될 수 있다. 다시 말해서, r 의 스펙트럼이 인과성 선형필터 $Q(s)$ 를 통해 z 로 변화되므로, z 에 관계된 조건들은 r 의 성질로 바꾸어 쓸 수 있다. 일반적으로 신호들의 주파수 응답은 Fourier변환 함수로 표현될 수 있기 때문에, 이 조건에 대해서도 파워 스펙트럼 해석법을 이용할 수 있다.

적응신호의 PE조건을 검토하기 위하여 다음의 정의들을 사용한다.²⁾ 함수 $x(t) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ 및 $y(t) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^m$ 에 대하여, 다음식

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} x(t)x^T(t+\tau) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2-15)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} x(t)y^T(t+\tau) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2-16)$$

가 s 에서 유한하면, 이 x 는 자기 상관함수 $R_x(\tau) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 을, x 및 y 는 상호상관함수 $R_{xy}(\tau) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 을 갖는다고 한다. $\tau = 0$ 일 때 $R_x(0)$ 및 $R_{xy}(0)$ 은 각각 원점에서의 자기 상관함수 및 상호상관함수이다.

이 경우 $S_x(\omega)$ 와 $S_{xy}(\omega)$ 는 파워 스펙트럼 밀도이다. 입력신호는 인과성 선형필터에 의해 동일한 주파수 성분을 가진 적응신호로 변환된다. 주파수 스펙트럼 라인이 $\omega_i, i=1, 2, \dots, k$ 에 집중되어 있으며 그 각각의 진폭을 α_i 라 할 때, 일반적인 신호 $x(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e^{j\omega_i t} \quad (2-17)$$

실제로 발생시킬 수 있는 신호는 연속성 정상신호이므로, α_i 는 실수 또는 순허수이며 스펙트럼은 $S_x(\omega)$ 축에 대칭으로 분포한다. 이 때 스펙트럼의 위치가 서로 다르면 이 신호들은 직교하고 이들의 상호 상관함수는 영이 된다. 따라서 식(2-17)의 $R_x(0)$ 및 $S_x(\omega)$ 는

$$R_x(0) = \sum_{i=1}^k \beta_i \quad (2-18)$$

$$S_x(\omega) = 2\pi \sum_{i=1}^k \beta_i \delta(\omega - \omega_i) \quad (2-19)$$

여기서 $\beta_i = \alpha_i \cdot \bar{\alpha}_i$ 이고, $\bar{\alpha}_i$ 는 α_i 의 공액복소수를 나타낸다.

적응신호는 입력이 $Q(s)$ 에 의해 변환된 신호이므로, 이 PE성질을 설명하기 위하여 선형필터에 의해 변환되는 스펙트럼 특성을 규명할 필요가 있다. k 개의 독립된 스펙트럼을 가진 신호 $x: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ 을 필터 $H(s) \in \mathbf{C}^m$ 에 인가할 때, 그 출력 $y: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^m$ 에 대한 $R_y(0)$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$R_y(0) = \sum_{i=1}^k \beta_i \bar{H}(j\omega_i) H^T(j\omega_i) \quad (2-20)$$

여기서 $\bar{H}(j\omega_i)$ 는 $H(j\omega_i)$ 의 공액복소수이다. 한편, 동일한 신호 x 를 $H_1(s): x \rightarrow y$ 및 $H_2(s): x \rightarrow z$ 에 인가할 때 y 와 z 사이의 상호 상관함수 $R_{yz}(0)$ 은

$$R_{yz}(0) = \sum_{i=1}^k \beta_i \bar{H}_1(j\omega_i) H_2(j\omega_i) \quad (2-21)$$

이 때 $H_1(s), H_2(s) \in \mathbf{C}$ 이다.

식(2-20)에서 $\bar{H}(j\omega_i) H^T(j\omega_i)$ 는 모든 i 에 대하여 Hermite 행렬이고, $R_y(0)$ 또한 Hermite 행렬이다. 이 경우 $R_y(0) \in \mathbf{C}^{m \times m}$ 이므로, 입력 스펙트럼 수 k 와 m 값에 따라 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$(1). k < m \rightarrow \rho[R_y(0)] = k, R_y(0) \geq 0 \quad (2-22)$$

$$(2). k \geq m \rightarrow \rho[R_y(0)] = m, R_y(0) > 0 \quad (2-23)$$

여기서 $\rho[R_y(0)]$ 은 $R_y(0)$ 의 계수(rank)를 나타낸다.

2.3 PE조건과 파라미터의 공칭값

적응신호는 입력이 선형변환된 신호로 스펙트럼의 위치는 변하지 않고 크기만 달라진다. 따라서, 2.2 절의 결과들을 이용하면 적응추정자의 PE 조건도 자기상관함수의 성질로 표현된다는 것을 알게 된다. 이 때 식(2-12)는 다음과 같은 정리로 대치할 수 있다.

정리 1. PE와 자기 상관함수의 관계

적응신호 $z: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^l$ 이 자기 상관함수 $R_z(0)$ 을 가질 때, $R_z(0) > 0$ 을 만족하는 경우에만 $z \in \{PE\}$ 이다. 이 때 $R_z(0)$ 은

$$R_z(0) = \sum_{i=1}^k \beta_i Q(j\omega_i) Q^T(j\omega_i) \quad (2-24)$$

이다.

증명 : 이 정리는 식(2-22) 및 (2-23)을 확장하면 쉽게 증명된다.¹⁾ 이 결과는 식(2-12)의 PE 조건이

나 입력의 SR조건에 스펙트럼 해석법을 적용하여 얻은 것이다. 따라서, 공칭모델을 추정하는 경우의 PE조건은 적응신호의 자기 상관함수에 대한 정치성으로 설명된다.

일반적으로 적응추정자의 가조절 파라미터가 유계될 것인가 하는 문제는 적응오차 모델의 전달함수가 SPR이라는 가정하에 다루어진다. 식 (2-9)에서 보면 정리 1의 관계를 적용할 수 있고 이 경우 평형점은 공칭값이 된다. 즉, 평균화 해석법에 의해 식 (2-13)은^{9),10)}

$$\dot{\theta}_{av} = -\gamma R_z(0) \theta_{av} + \gamma R_{zy}(0) \quad (2-25)$$

여기서 $R_{zy}(0)$ 은 신호 zy 의 상관함수로

$$R_{zy}(0) = \sum_{l=1}^k \beta_l \bar{Q}(j\omega_l) P(j\omega_l) \quad (2-26)$$

이다.

이 적응시스템은 안정하게 설계되었으므로 $\dot{\theta}_{av}$ 는 0이 된다. 결국 다음 식을 얻는다.

$$R_z(0) \theta_{av} = R_{zy}(0) \quad (2-27)$$

유계된 신호의 자기 상관함수는 입력 스펙트럼에 상관없이 항상 준정치행렬이다. 이 때 z 가 PE가 아니면 $R_z(0)$ 은 비정치행렬이 되어 $R_z^{-1}(0)$ 은 존재하지 않고, 따라서 θ_{av} 의 유일해는 결정되지 않는다. 그렇지만, 입력 스펙트럼이 정리 1을 만족하는 신호일 경우에는, $R_z(0)$ 은 정치행렬이 되어 $R_z^{-1}(0)$ 이 존재한다. 결국 θ_{av} 는

$$\theta_{av} = R_z^{-1}(0) R_{zy}(0) \quad (2-28)$$

로 구해진다. 이 때 $\theta_{av} = \theta_*$ 이며, 이 값은 입력 스펙트럼이 PE를 만족하기만 하면 그 위치나 수에 관계없이 유일하게 존재한다.

3. 입력 스펙트럼과 파라미터 수렴특성

적용시스템의 파라미터 수렴특성은 식 (2-13)의 γ_{zz^T} 성질에 따라 변화된다. 2-3절에서 해석한 것과 마찬가지로, 적응신호가 PE가 되어 $R_z(0)$ 이 정치행렬일 경우에만 θ_* 는 유일하게 존재하고 공칭값에 수렴하게 된다. 일반적으로 zz^T 의 고유치는 영인 최소 고유치를 제외한 나머지 고유치들은 양의 실수이므로, 이들에 의해 수렴속도가 결정된다. 물론, 적응 파라미터의 수렴속도는 적응칙의 형태, 적응이득 및 입력신호의 진폭과 스펙트럼성분에 관계된다는 사실은 알려졌지만, 이들 요소들이 수렴비율에

적용추정자에 대한 파라미터 수렴속도의 해석

미치는 효과를 구체적으로 해석하지 못했다. 수렴속도를 나타내는 척도를 일률적으로 규정하기는 곤란하지만, 파워 스펙트럼 해석으로 얻어진 $R_z(0)$ 와 적응이득 등이 식 (2-25)에 미치는 영향을 잘 살펴보면, 수렴비율에 관한 상대적인 평가가 가능하게 된다.

평균화 시스템 식 (2-25)의 파라미터 수렴특성은 $\gamma R_z(0)$ 의 감쇄성질로 해석될 수 있다. 이 경우에 파라미터는 $\gamma R_z(0)$ 의 고유치에 의해 수렴특성이 결정되기 때문에 적응이득, 입력신호의 진폭과 스펙트럼의 위치나 수에 따른 $\gamma R_z(0)$ 의 고유치 변화를 규명하므로써 수렴비율을 해석할 수 있다. 식 (2-13)에서 유계된 신호 z 에 대한 $\text{trace}[zz^T]$ 는 항상 양의 실수이지만, PE가 아닌 z 에 대해서도 모든 시각 t 에 있어서 다음 식이 성립된다.

$$\lambda_{min}[zz^T] = 0 \quad (3-1)$$

여기서 λ_{min} 은 최소 고유치를 나타낸다. 그렇지만, 평균화 시스템 식 (2-25)에 대해서는 $z \in \{PE\}$ 인 경우에

$$\lambda_{min}[R_z(0)] > 0 \quad (3-2)$$

가 만족된다. 이와같은 해석적인 차이점으로 해서 $\text{trace}[zz^T]$ 나 zz^T 의 고유치 특성으로는 수렴속도를 설명하기 곤란하다. 그러나 식 (2-25)에서 보면, $\gamma R_z(0)$ 의 고유치의 변화를 예측할 수 있으므로, 이 성질을 이용하면 수렴비율도 해석할 수 있다.

3.1 적응이득과 수렴속도

입력신호가 k 개의 스펙트럼을 가진 경우에 적응신호의 상관함수는 식 (2-24)로 주어진다. $z \in \{PE\}$ 라 하고, $R_z(0)$ 의 고유치를 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, k$ 라 하자. 실제의 신호는 연속성 정상신호이므로 모든 λ_i 는 양의 실수가 된다. 이 때 식 (2-25)의 $\gamma R_z(0)$ 에 대한 고유치 특성은 다음 정리로 설명된다.

정리 2. 적응이득과 고유치 관계

정상입력 식 (2-17)을 인가한 경우에 $\gamma R_z(0)$ 의 고유치는 적응이득에 비례하며, 가조절 파라미터의 수렴비율도 적응이득에 비례한다.

증명: 시변 미분방정식인 적응칙의 수렴속도는 γ_{zz^T} 의 고유치에 영향을 받으므로, $\gamma R_z(0)$ 의 고유치에 관계됨을 알 수 있다. 일반적으로 유계신호 z 에 대한 $R_z(0)$ 의 고유치는 적응이득과는 무관하다. 이 때 $R_z(0)$ 의 고유치를 λ_i 라 하였으므로 $\gamma R_z(0)$ 의 고유치는 $\gamma \lambda_i, i=1, 2, \dots, k$ 가 된다. 그러므로 γR_z

(0)의 고유치는 $R_z(0)$ 고유치의 γ 배가 되고, 수렴 속도는 고유치의 위치에 관계되므로 역시 빠르게 된다.

일반적으로 파라미터 수렴속도를 적응이득으로 조절할 수 있다는 사실은 이미 밝혀진 것으로 새로운 결과는 아니지만, 정리 2는 수렴비율에 대한 상대적인 척도를 규정할 수 있음을 보여준다. 이와같이 해석적인 기준을 설정하는 이유는 이후 입력신호의 변화에 대한 수렴특성을 밝히는데 유용하게 이용되기 때문이다.

3.2 입력진폭과 수렴속도

적응이득과 입력의 주파수 성분을 일정히 하여 진폭만을 증가시키면 적응 파라미터의 수렴속도는 빠르게 된다. 다음 정리는 진폭에 의한 고유치 변화를 나타낸다.

정리 3. 입력진폭과 고유치 관계

정상입력 식(2-17)을 인가한 경우에 적응신호의 자기 상관함수 및 고유치를 각각 $R_z(0)$, λ_i 라 하고, 같은 시스템에 대하여 적응이득과 입력 스펙트럼은 동일하고 진폭이 $\hat{\alpha}_i$ 인 입력 \hat{r} 을 인가했을 때 자기 상관함수를 $\hat{R}_z(0)$ 이라 하자. 이 때 $\hat{R}_z(0)$ 의 고유치를 $\hat{\lambda}_i$ 라 하고, $\alpha_i = \alpha$, $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}$ 라 하면, 진폭변화에 의한 고유치는 다음관계를 만족한다.

$$\hat{\lambda}_i = (\hat{\alpha}/\alpha) \lambda_i, \quad i=1, 2, \dots, k \tag{3-3}$$

증명: 입력 r 및 \hat{r} 을 인가했을 때 자기 상관함수는

$$R_z(0) = \sum_{i=1}^k \beta_i \bar{Q}(j\omega_i) Q^T(j\omega_i) \tag{3-4}$$

$$\hat{R}_z(0) = \sum_{i=1}^k \hat{\beta}_i \bar{Q}(j\omega_i) Q^T(j\omega_i) \tag{3-5}$$

이다. 이 때 $\alpha_i = \alpha$, $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}$ 라 하면 $\beta_i = \beta$, $\hat{\beta}_i = \hat{\beta}$ 라 할 수 있으며, 식(3-4) 및 식(3-5)의 관계로부터 다음식을 얻는다.

$$\hat{R}_z(0) = (\hat{\beta}/\beta) R_z(0) \tag{3-6}$$

이 경우 $\beta = |\alpha|^2$, $\hat{\beta} = |\hat{\alpha}|^2$ 이므로 각 고유치에 대해

$$\hat{\lambda}_i = (\hat{\alpha}/\alpha) \lambda_i, \quad i=1, 2, \dots, k \tag{3-7}$$

가 성립된다.

이 정리는 적응추정자의 가조절 파라미터 수렴특성을 설명하는 중요한 결과이다. 일반적으로 자기 상관함수의 고유치는 입력진폭과 주파수에 관계되고, 동일한 스펙트럼을 가진 신호에 대해서는 진폭

의 자승에 비례한다는 것을 알 수 있다. 따라서, 파라미터의 수렴비율도 진폭의 자승에 비례한다.

3.3 스펙트럼 위치와 수렴속도

적응이득과 입력의 진폭을 고정시키고 스펙트럼의 위치를 변경시키는 경우에도 $R_z(0)$ 의 고유치는 변화되며, 따라서 수렴특성도 변한다. 자기 상관함수 행렬 $R_z(0)$ 의 고유치는 다음식을 만족한다.

$$\text{trace}[R_z(0)] = \sum_{i=1}^k \lambda_i \tag{3-8}$$

$Q(s)$ 는 재 1항을 제외하고는 strictly proper 전달함수로 구성된다. 따라서 주파수 ω 가 증가하면, $\bar{Q}(j\omega_i)Q^T(j\omega_i)$ 의 주대각 요소는 감소한다. $R_z(0)$ 의 고유치 합이 식(3-8)로 주어지므로 $\hat{\omega}_i (> \omega_i)$ 에 대한 자기 상관함수를 $\hat{R}_z(0)$ 이라 할 때,

$$\text{trace}[\hat{R}_z(0)] < \text{trace}[R_z(0)] \tag{3-9}$$

가 만족된다.

식(3-9)의 관계로는 $R_z(0)$ 의 모든 고유치 각각에 대한 변화를 알지 못한다. 일반적으로 파라미터 한 개를 추정하는 경우에는 $R_z(0)$ 의 고유치가 한 개이므로, 식(3-9)에 의하면 주파수 대역이 증가될 때 수렴속도는 느려진다. 그렇지만, $R_z(0)$ 의 고유치가 2개 이상이면 각 고유치에 대한 변화를 정확히 계산할 수 없으므로, ω 가 증가한다고 해서 수렴비율이 감소된다고는 단정할 수 없다. 따라서 이 경우에는 수렴속도에 대한 일반적인 특성을 얻을 수 없다.

3.4 스펙트럼수와 수렴속도

적응이득 및 입력진폭을 일정히 하고 스펙트럼의 수를 증가시키면 역시 자기 상관함수의 고유치는 변화되고, 수렴속도 또한 변하게 된다. 이 경우에는 다음의 정리를 얻는다.

정리 4. 스펙트럼수와 고유치 관계

입력 스펙트럼의 수를 증가시키면 자기 상관함수의 모든 고유치는 커지고 파라미터 수렴속도도 증가된다.

증명: k 개의 스펙트럼을 가진 입력신호를 인가할 때 자기 상관함수를 $R_z(0)$ 이라 하고 이 신호 이외에 추가로 같은 진폭의 l 개 스펙트럼을 가진 신호를 인가하는 경우에 자기 상관함수를 $\hat{R}_z(0)$ 이라 하면,

$$\begin{aligned} \bar{R}_z(0) &= \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i \bar{Q}(j\omega_i) Q^T(j\omega_i) \\ &= R_z(0) + \tilde{R}_z(0) \end{aligned} \quad (3-10)$$

여기서 $\tilde{R}_z(0)$ 은

$$\tilde{R}_z(0) = \sum_{i=k+1}^l \beta_i \bar{Q}(j\omega_i) Q^T(j\omega_i) \quad (3-11)$$

일반적으로 자기 상관함수는 준정치 행렬이므로 $\tilde{R}_z(0)$ 도 준정치 행렬이다. 따라서 식 (3-10)의 고유치는 다음 관계를 만족한다.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{j=k+1}^l \tilde{\lambda}_j \quad (3-12)$$

결국, l 개의 스펙트럼을 추가로 인가하면 고유치 합은 증가되어 파라미터 수렴속도가 빠르게 됨을 알 수 있다.

정리 4의 증명과정에서, 스펙트럼 수가 증가할때 고유치의 합이 증가되는 현상은 예측할 수 있으나, 식 (3-9)의 결과와 같이 수렴비율에 대한 판정이 곤란해질지 모른다. 그렇지만, $l=k$ 로 하여 동일한 스펙트럼을 인가하면 입력은,

$$\hat{r} = 2 \sum_{i=1}^k \alpha_i e^{j\omega_i t} \quad (3-13)$$

가 된다. 따라서, 입력진폭이 2배가 되므로 정리 2의 결과를 적용할 수 있다.

정리 2, 3 및 4는 지금까지 정성적 해석법으로 추론해 오던 수렴속도해석 결과들 보다 구체적인 특성을 나타내고 있다. 따라서, 파라미터 적응방법을 이용하는 적응제어 시스템을 설계하는 대부분의 경우에 있어서, 파라미터의 적응성 개선에 대한 정보를 제공해 줄 것이다.

4. 수치 예에 의한 검토

앞에서 설명한 바와 같이 적응추정자의 가조절 파라미터는 적응이득, 입력진폭 및 스펙트럼의 위치와 수에 따라 수렴특성이 변화된다. 이 장에서는 이들 요소들에 의하여 변화되는 적응파라미터들의 수렴속도에 관한 결과들을 간단한 예를 통하여 검토한다.

추정될 플랜트의 전달함수는

$$P(s) = \frac{3}{s+2} \quad (4-1)$$

이라 하고, 선형필터의 전달함수는

$$F(s) = \frac{1}{s+3} \quad (4-2)$$

하였다. 이 때 가조절 파라미터는 $\theta \in \mathbb{R}^2$ 이고, $z \in$

적응추정자에 대한 파라미터 수렴속도의 해석

이PE인 다음과 같은 입력을 사용하였다.

$$r = a_m \sin \omega t \quad (4-3)$$

그림 4-1은 적응칙 식 (2-11)을 사용할 때의 파라미터 추정특성과 이 적응칙을 평균치로 변환한 식 (2-25)에 의한 추정특성을 비교한 것이다. 이 결과에서 알 수 있듯이, 적응 파라미터의 수렴과정을 자기 상관함수에 의한 평균화 시스템으로 해석할 수 있으며, 따라서 수렴속도 역시 $\gamma R_z(0)$ 의 고유치 특성으로 설명할 수 있다는 것을 알게 된다.

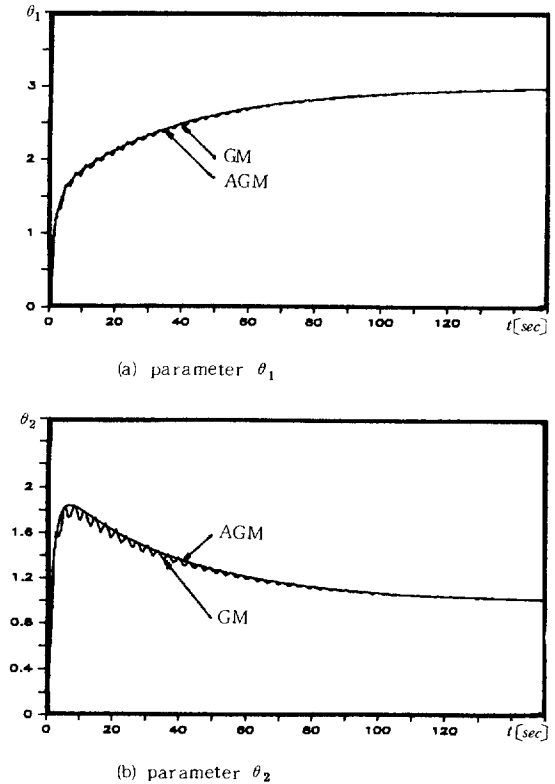


그림 4-1 구배법(GM) 및 평균치 구배법(AGM)을 사용할 때의 파라미터 추정특성.

Fig. 4-1 Parameter identification properties when using a gradient method(GM) and an averaging gradient method(AGM).

표 4-1은 적응이득, 입력진폭과 주파수 성분의 크기가 변화될 때 파라미터 수렴비율을 조사하기 위한 $\gamma R_z(0)$ 의 고유치들을 나타낸다. 3.1절과 3.2절에서 해석한 결과와 같이, $\gamma R_z(0)$ 의 고유치는 적응이득에는 비례하고, 입력진폭에는 자승에 비례한다.

이 사실은 입력진폭을 2배로 할 때의 고유치가 적응이득을 4배로 하는 경우의 값과 동일하고, 그 수렴특성도 일치된다는 것을 의미한다.

표 4-1 적응이득과 입력신호의 변화에 대한 특성.

Table 4-1 Properties for the variation of adaptive gain and input signal.

γ	α_m	ω	λ_1	λ_2	비 고
1	2	1	0.027	0.533	그림 4-2
4	2	1	0.108	2.132	
9	2	1	0.243	4.797	
1	2	1	0.027	0.533	그림 4-2
1	4	1	0.108	2.132	
1	6	1	0.243	4.797	
1	2	1	0.027	0.533	그림 4-3
1	2	2	0.047	0.279	
1	2	3	0.040	0.148	

$r=2\sin t$ 에 대해, 적응이득을 4, 9배 한 경우와 입력진폭을 각각 2, 3배 한 경우의 수렴특성이 그림 4-2이다. 적응이득이나 입력진폭을 증가시키면 $\gamma R_z(0)$ 의 고유치가 커지므로 수렴속도 역시 빠르게 된다는 것을 알 수 있다. 이는 해석결과와 일치된다. 이 때 그림 4-2(c)는 $\text{trace}[\gamma z z^T]$ 특성으로 모든 시각 t에 대하여 양의 실수이므로, 적응시스템이 안정한 것을 알 수 있다.

한편, 그림 4-3은 스펙트럼 위치만 변경시키는 경우의 수렴특성이다. 주파수를 증가시키면 $\text{trace}[\gamma z z^T]$ 와 $\text{trace}[\gamma R_z(0)]$ 는 감소되지만 각 고유치에 대한 증감비율을 해석할 수 없다. 그렇지만 주파수가 증가될수록 정상상태에 도달하는 시간은 짧아짐을 알 수 있다.

적응이득 등 다른 변수들은 고정시키고 스펙트럼 수를 증가시키는 경우의 수렴속도를 고찰하기 위하여 $\gamma=1$, $\alpha_m=2$ 로 하고 다음의 입력을 인가하였다.

$$r = 2 \sum_{k=1}^n \sin(kt) \quad (4-4)$$

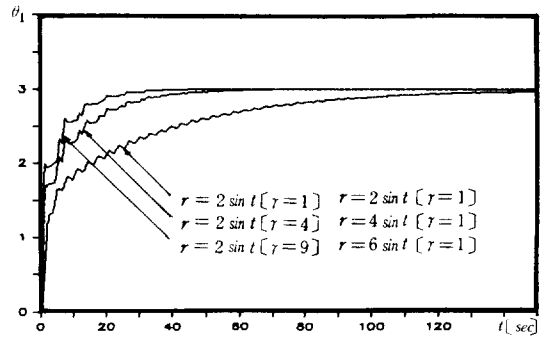
이 때 $n=1, 2, 3$ 에 대한 $\gamma R_z(0)$ 의 고유치는 다음과 같다.

$$n=1: \lambda = 0.027, 0.522$$

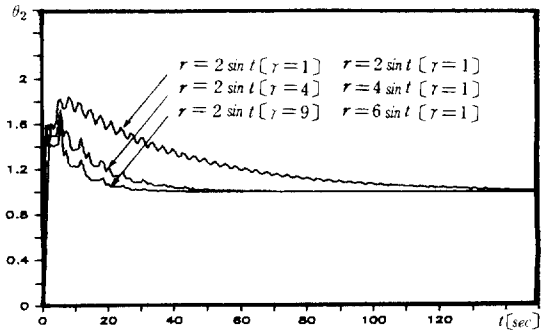
$$n=2: \lambda = 0.077, 0.810$$

$$n=3: \lambda = 0.125, 0.950$$

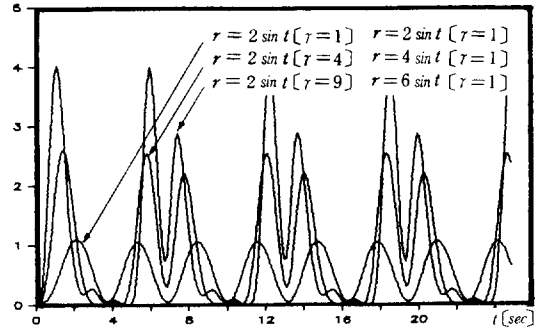
따라서 스펙트럼 수가 증가될수록 모든 고유치는



(a) parameter θ_1



(b) parameter θ_2

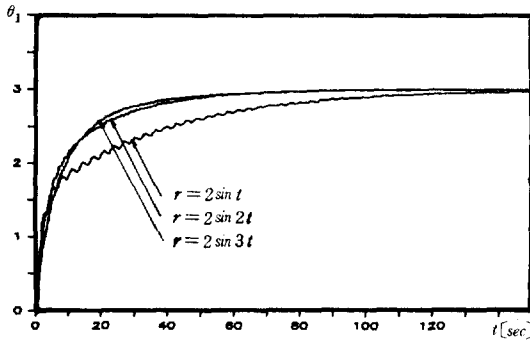


(c) trace $[\gamma z z^T]$

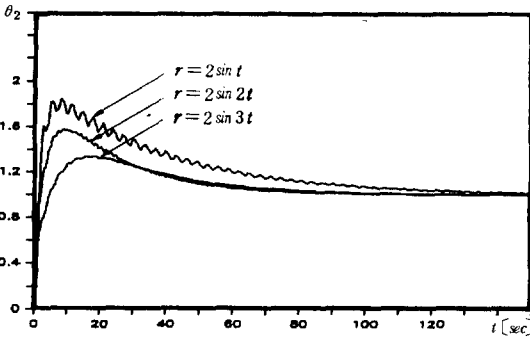
그림 4-2 적응이득과 진폭변화의 경우에 파라미터 수렴특성과 $\text{trace}[\gamma z z^T]$.

Fig. 4-2 Parameter convergence properties in the case of the variation of adaptive gain and amplitude and $\text{trace}[\gamma z z^T]$.

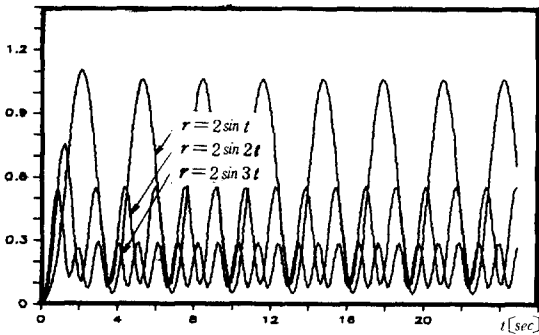
증가되어 수렴속도가 개선된다. 그림 4-4는 이 특성을 나타낸다.



(a) parameter θ_1



(b) parameter θ_2



(c) trace $[\gamma z z^T]$

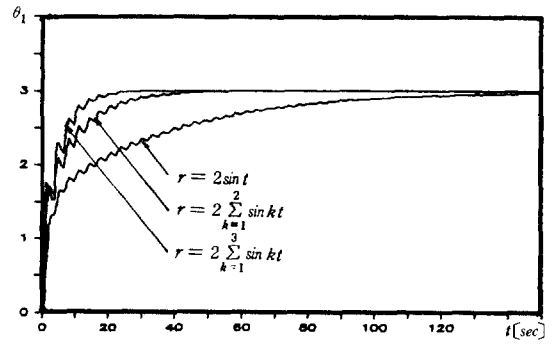
그림 4-3 주파수 변화에 대한 파라미터 수렴특성과 trace $[\gamma z z^T]$.

Fig. 4-3 Parameter convergence properties for the variation of frequency and trace $[\gamma z z^T]$.

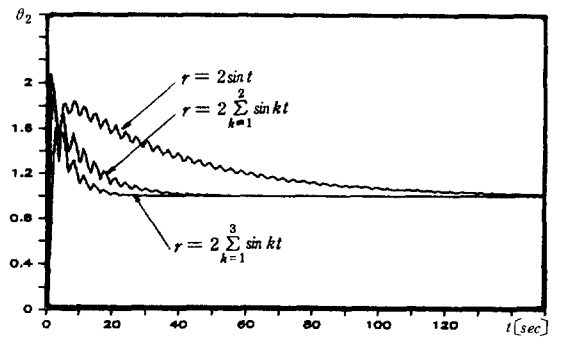
5. 결 론

본 논문에서는, 적응추정자 설계에 파워 스펙트

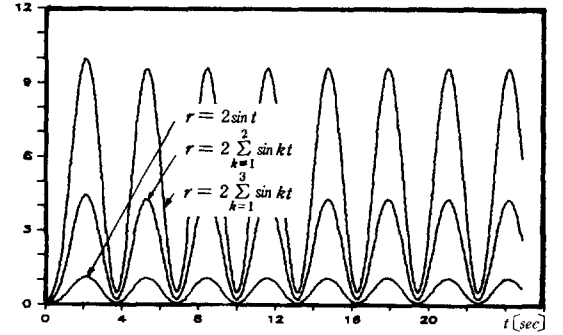
적응추정자에 대한 파라미터 수렴속도의 해석



(a) parameter θ_1



(b) parameter θ_2



(c) trace $[\gamma z z^T]$

그림 4-4 스펙트럼의 수를 증가시키는 경우의 파라미터 수렴특성과 trace $[\gamma z z^T]$.

Fig. 4-4 Parameter convergence properties when increasing the number of spectra and trace $[\gamma z z^T]$.

럼 개념을 도입하고, 추정파라미터 수렴특성을 해석하였다. 적응제어 시스템에 주어지던 일반적인 PE조건은 적응신호에 대한 자기 상관함수 행렬의

정치성 조건으로 변환된다. 정치성 조건을 사용함으로써 파라미터 공칭값의 존재성을 해석할 수 있으며 자기 상관함수의 고유치에 의해 수렴속도가 결정된다는 사실을 증명하였다. 적응신호의 PE 조건은 입력 스펙트럼의 SR조건으로 설명된다. 이 때 적응이득, 입력진폭과 입력신호의 스펙트럼의 위치와 수를 변화시키는 경우, 자기 상관함수의 고유치가 변화되는 특성을 조사하므로써 적응이득과 입력특성이 파라미터 수렴비율에 미치는 효과를 정확히 해석할 수 있었다.

(본 논문은 문교부 학술연구조성비 지원으로 연구되었습니다.)

참 고 문 헌

- 1) K.S. Narendra and L.S. Valavani, "Stable adaptive controller design-direct control," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-23, pp.570-583, 1978.
- 2) K.J. Astrom and B. Wittenmark, "Self-tuning controllers based on pole zero assignment," Proc. of IEE, vol. 127, pp.120-130, 1980.
- 3) P.M. Lion, "Rapid identification of linear and non-linear systems," AIAA J. vol. 5, pp.1835-1842, 1967.
- 4) G. Kreisselmeier, "Adaptive observer with exponential rate of convergence," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-22, pp.2-8, 1977.
- 5) G.C. Goodwin and K.S. Sin, Adaptive filtering, prediction and control, Englewood Cliffs, Nt. Prentice-Hall, 1984.
- 6) K. Ichikawa, Adaptive Control, So-Kwang Press in Japan, 1983.
- 7) L.G. Kraft, "A control Structure of an Adaptive Observer," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-24, pp.804-806, 1979.
- 8) R.L.Kosut and B.Friedlander, "Robust Adaptive control: Condition for Global Stability," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-30, pp.610-624, 1985.
- 9) J.E. Mason et al. "Analysis of Adaptive Identifiers in the Presence of Unmodelled Dynamics: An Averaging and Tuned Parameters," Memorandum no. UCB/ERL. M87/25, Univ. of California, 1987.
- 10) J.E. Mason et al, "Analysis of Adaptive Identifiers in the Presence of Unmodelled Dynamics: Averaging and Tuned Parameters," Proc. 26th CDC, pp. 360-365, 1987.
- 11) B.D.O. Anderson et al, Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis. Cambridge, MA. MIT Press, 1986.
- 12) P.Z. Peebles, Jr., Probability, Random Variables, and Random Signal Principles, McGraw-Hill, 1987.
- 13) S. Boyd and S.S. Sastry, "Necessary and Sufficient Conditions for Parameter Convergence in Adaptive Control," Automatica, vol. 22, pp.629-639, 1986.