Trans. KIEE, Vol 38. No. 1 JAN 1989

論 文
38~1~3

정전자장의 적응유한요소해석을 위한 오차추정

Posteriori Error Estimates for Adaptive Finite Element Analysis of Electro and Magnetostatic Fields

金 炯 碩*·崔 鴻 洵**·韓 松 曄§
(Hyeong-Seok Kim. Hong-Soon Choi. Song-yop Hahn)

요 약

본 논문에서는 2 차원 정전자장 문제를 유한 요소법으로 해석하기 위한 적응요소 분할에 대하여 간단한 오차 추정 방법을 다루었다. 그 방법으로 정전계에서는 발산 정리를, 정자계에서는 암페어의 주회 법칙을 이용하였다. 본 논문에서 제시한 오차 추정 방법으로 적응 유한 요소 계산을 하여 그 방법의 유용성을 검토하였다. 현존하는 적응 유한 요소 방법인 요소경계면의 장 연속조건을 이용한 방법과 비슷한 정도의 수렴 특성을 나타낸다. 본 오차 추정알고리즘은 다른 방법에 비해 간단하므로 실제 문제에 쉽게 적용될 수 있으리라 생각된다. 특히 정전계에서 구하고자 하는 물리량이 전하인 경우와 정자계에서 구하고자하는 물리량이 전류인 경우에는 타 방법보다 바람직한 방법이라 생각된다.

Abstract-This paper describes error estimate method for adapive finite element analysis of two dimensional electrostatic and magnetostatic field problems. To estimate the local errors, divergence theorem is used for electrostatic field and Ampere's circuital law for magnetostatic field. To confirm the effectiveness of the proposed error estimators, adaptive finite element computations are performed using the proposed error estimators. The rates of convergence of global errors are comparable with those of existing adaptive finite element schemes which make use of field continuity conditions between element boundaries. This algorithm of error estimate can be easily implemented because of its simplicity. Especially, when the value of charge in electrostatic field and the value of currrent in magnetostatic field are to be figured out, this method is considerded to be preferable to other approaches.

1. 서 론

유한 요소법이 전자장 해석에 적용된 것은 1960 년대 말 부터였다[1]. 최근에는 3 차원 정전자장, 교류자장 문제까지 유한요소해석을 위한 정식화가 이루어졌다. 한편으로는 유한 요소법의 응용이 실용화됨에 따라 실제 모델을 유한 요소법으로 해석하기 위해 필요한 입력 자료를 손쉽게 취급할 수 있는 전처리(pre-processing)와 해석 결과를 쉽게 인식할 수 있는 후처리 (post-processing)에 대한 관심이 높아지고 있다. 이에 따라 많은 자동 요소 분할방법이 연구 발표되고있다.[2,3] 따라서 초보적인 사용자도 유한요소법에 의한 해석이 가능하게되었다. 그러나 해석의 정확도를 높이기 위해서는 사용자가 해의 오차가 심한 부분을 예측하여 그 곳의 요소들

*正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 博士課程
**正 會 員 : 三星電機 研究室
§正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 敎授 · 工博
接受日字 : 1988年 9月 30日
1次修正 : 1988年 12月 2日

이 세분되도록 하여야 하는데 경험자라 하여도 어려움이 많이 따른다. 이를 극복하기위해 적응 요소분할방법이 연구되고있다.[4,5] 적응 유한 요소법은 초기 요소망에 의해 유한 요소법으로 해석한 결과로 각 요소의 오차를 계산하고 오차가 큰 요소들을 세분하여 요구되는 해의 정확도를 얻을때 까지 이를 반복하는 방법이다. 이 방법에서 가장 핵심이 되는 부분은 어떻게 오차를 추정하느냐 하는 것이다. 이에 본 논문에서는 정전장과 정자장에 대해서 발산정리(divergence theorem)와 암페어의 주회법칙(circuital law)를 이용한 오차 추정방법을 제시하였고 이 추정방법을 요소 경계면의 연속성을 고려한 오차 추정방법과 비교하여 그 유용성을 검토하였다.

2. 오차 추정 원리

2.1 정전계

정전계에 대한 지배방정식은

$$-\nabla^2\phi=\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1}$$

이다. 여기서 ϕ, ρ 및 ε 은 각각 스칼라 포텐셜, 전하밀도 및 유전율이다.

2 차원 문제에서 식 (1)을 그림 1과 같이 1 차 삼각형 요소를 이용한 유한 요소법으로 해석하는 경우를 생각하자. 요소 i 내의 전하 Q_i는 발산정리를 이용하여

$$\begin{aligned} Q_i&=\int_{\Omega_i}\nabla\cdot\mathbf{D}\,dS\\ &=\int_{C_i}\mathbf{D}_i\cdot\mathbf{n}\,dl \end{aligned} \tag{2}$$

이다. 여기서 C_i는 요소 i의 경계, $\mathbf{D}_i$는 경계 C_i의 내측 및 외측에서의 전속 밀도의 평균치, $\mathbf{n}$은 경계 C_i에 수직한 단위 벡터이다. 그런데 식 (2)는 수치해석 결과이므로 진치와 오차가 있다. 그러므로 요소 i 에서의 전하 오차 ΔQ_i는

$$\Delta Q_i=\left[\int_{\Omega_i}\rho dS-\int_{C_i}\mathbf{D}_i\cdot\mathbf{n}\,dl\right]^2 \tag{3}$$

이고 시스템의 전체오차 R는

$$R=\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta Q_i\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

로 정의한다. 여기서 N은 전체 요소수이다.

본 연구에서는 위에서 제시한 오차 추정방법을 근래에 이미 사용되고 있는 오차 추정방법과 비교 검토하기 위하여 참고 문헌(5)의 방법을 같이 비교하였다. 이 방법에서 요소별 오차 e_i는

$$e_i=\int_{\Omega_i}(E_{est}-E_{cal})^2\,dS \tag{5}$$

로 정의된다. 여기서 E_{est}는 요소의 경계에서 전속밀도의 수직성분 D_n과 전계의 접선성분 E_t가 연속이어야 한다는 조건에서 추정한 전계의 진치이고 E_{cal}은 유한 요소법으로 얻은 전계이다. 시스템 전체 오차 R는

$$R=\left\{\sum_{i=1}^{N}e_i\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

로 정의된다.

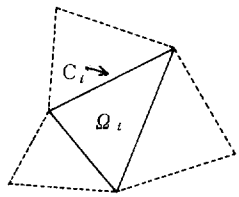


그림 1 요소 i 및 경계 C_i (실선)
Fig. 1 Element i and its boundary C_i, (solid line)

2.2 정자계

정자계에 대한 지배방정식은

$$-\nabla^2\mathbf{A}=\mu\mathbf{J} \tag{7}$$

이다. 여기서 $\mathbf{A}$는 자기벡터 포텐셜, μ는 투자율 및 $\mathbf{J}$는 전류밀도이다. 2 차원 문제에서 식(7)을 그림1과 같이 1 차 삼각요소를 이용한 유한 요소법으로 해석하는 경우를 생각하자. 요소 i내의 전체전류 I_i는 암페어의 주회법칙을 이용하여

$$\begin{aligned} I_i&=\int_{\Omega_i}\nabla\times\mathbf{H}\,dS\\ &=\int_{C_i}\mathbf{H}_i\times\mathbf{n}\,dl \end{aligned} \tag{8}$$

이다. 여기서 $\mathbf{H}_i$는 경계의 내측 및 외측에서의 자

계의 세기의 평균치 이다. 식 (8)은 수치해석결과이므로 진치와 오차가 있다. 그러므로 요소 i에서의 전류 오차 ΔI_i는

$$\Delta I_i = \left[\int_{\Omega_i} \mathbf{J}\, dS - \int_{C_i} \mathbf{H}_i \times \mathbf{n}\, dl \right]^2 \tag{9}$$

이고 시스템 전체 오차R는

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \Delta I_i \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

로 정의한다. 참고 문헌 (5)에서의 요소별 오차e_i는

$$e_i = \int_{\Omega_i} (B_{est} - B_{cal})^2 dS \tag{11}$$

이고 시스템 전체 오차 R는

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{N} e_i \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

이다.

3. 적응 요소 분할

본 연구에서 제시한 오차 추정방법이 유용한지 여부를 확인하기 위하여 앞절에서 제시한 오차 추정법을 사용한 적응 유한 요소법으로 정전자장을 해석하여 본다. 그림 2는 이 적응 유한 요소법의 흐름도를 나타내는데 여기서 오차 추정-세분할 요소 결정-요소 세분 과정이 적응 요소 분할 과정이 된다. 본 연구에서는 삼각형 요소를 사용하였기 때문에 요소 세분은 이분법[6] 을 사용하였다.

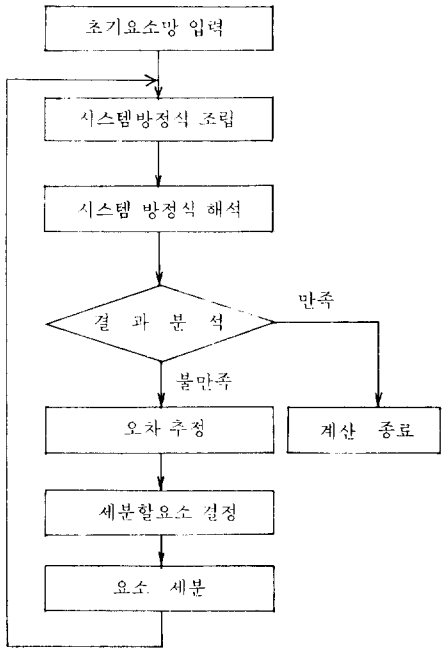


그림 2 적응 유한 요소 흐름도

Fig. 2 Flow chart for an adaptive finite element method.

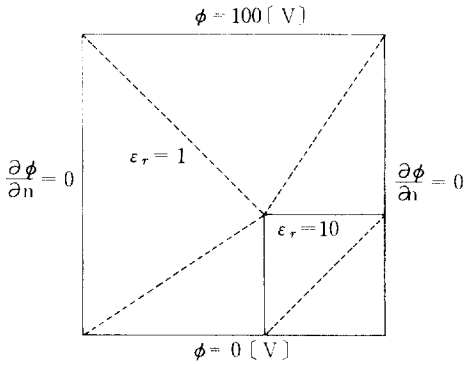


그림 3 정전계 해석 모델 및 초기 요소망

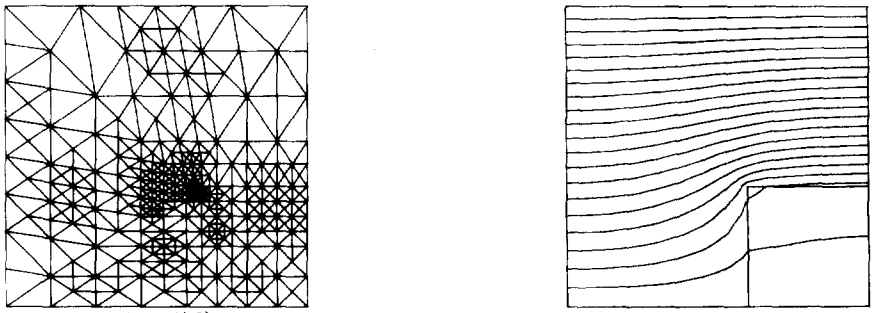
Fig. 3 A model for electrostatic problem and its initial mesh.

사례 연구

4.1 정전계 문제

그림 3은 평등전계내에 비유전율이 10인 4각형 유전체가 있는 해석 모델이다. 초기 요소수는 6개 이다. 그림 4는 그림 3의 모델을 식 (3)과 같은 오차 추정법으로 요소를 세분한 것으로 절점수가 312개 일때의 경우이다. 예상과 같이 유전체의 모서리 부분에서 요소가 많이 세분됨을 알 수 있다. 그림 5는 그림 3의 모델을 식 (5)와 같은 오차 추정법으로 요소를 세분한 것으로 절점수가 271개 일 때의 경우이다. 그림 4와 그림 5를 비교하여보면 다같이 유전체 모서리 부분에서 요소가 세분되나 전자의 경우는 유전체 내부에도 비교적 많은 요소가 세분되고 있음을 볼 수 있다. 두 경우의 등전위선 분포를 보면 매우 유사함을 알 수 있다.

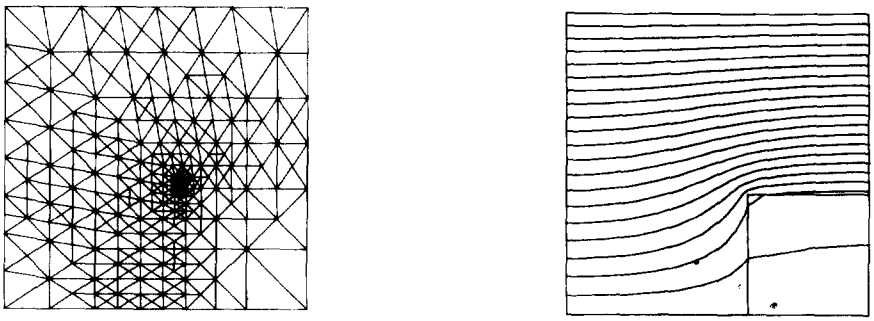
그림 6은 위의 두 경우에 요소수를 증가하면서 시



(a) 요소 분할도 (b) 등전위 분포

그림 4 발산 정리에 기초한 추정 오차를 이용한 적응 유한 요소 해석 결과

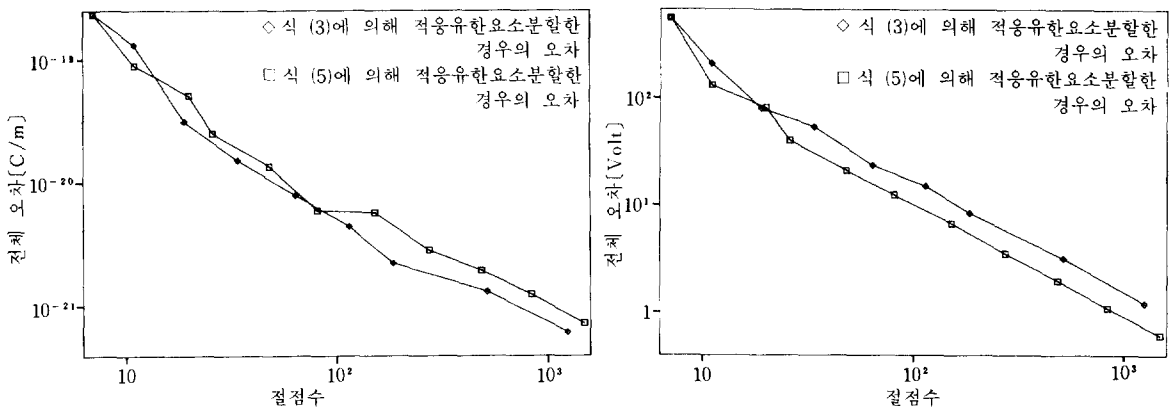
Fig. 4 Results of an adaptive finite element analysis using error estimate based on divergence theorem. (a) A refined mesh (b) Distribution of equipotential lines



(a) 요소 분할도 (b) 등전위 분포

그림 5 전속 및 전계의 연속 조건에 기초한 추정 오차를 이용한 적응 유한 요소 해석 결과

Fig. 5 Results of an adaptive finite element analysis using error estimate oased on the continuity of electric flux and field.
(a) A refined mesh (b) Distribution of equipotential lines



(a) 식 (4)로 주어지는 전체 오차 (b) 식 (6)으로 주어지는 전체 오차

그림 6 식(3) 및 식(5)에 의한 오차 추정별 전체 오차감소율

Fig. 6 Rates of convergence of total errors for error estimates based on eq. (3) and eq. (5)
(a) total error given by eq. (4) (b) total error give by eq. (6)

스템 오차 즉 식 (4)와 식 (6)의 값이 감소하여가는 것을 비교한 것이다. 식 (3)에 의한 오차 추정이나 식 (5)에 의한 오차 추정이 식 (6)의 시스템 오차를 거의 비슷하게 감소시켜나가고 있음을 알 수 있다.

4.2 정자계 문제

평등 자계내에 $\mu_r = 1000$인 4각형 자성체가 있는 경우의 해석 모델을 다룬다. 그림 7은 이 모델을 나타내고 초기 요소수는 6개이다. 그림 8과 그림 9는 각각 식 (9)와 식 (11)을 추정 오차로 한 경우의 세분된 요소를 나타낸다. 예상과 같이 자성체의 모서리에 요소가 세분되고 있으며 후자의 경우가 자성체 내부를 더욱 세분하고 있다. 두 경우의 자력선

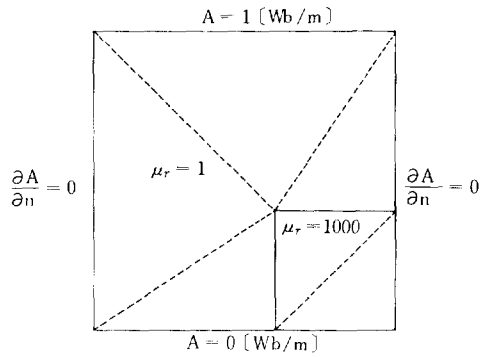
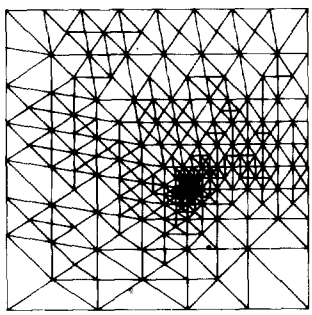
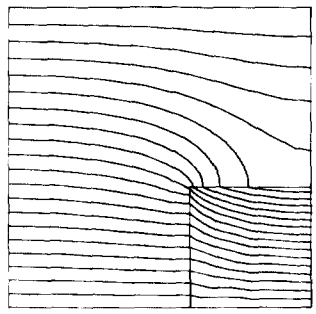


그림 7 정자계 해석 모델 및 초기 요소망

Fig. 7 A model for magnetostatic problem and its initial mesh.



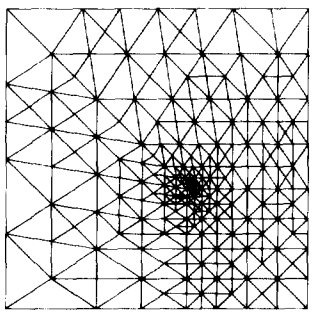
(a) 요소 분할도



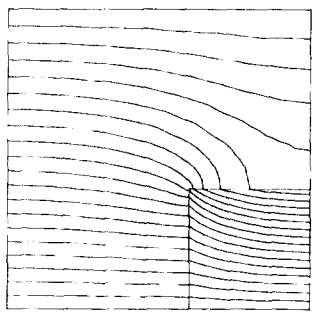
(b) 자력선 분포

그림 8 암페어의 주회 법칙에 기초한 추정 오차를 이용한 적응 유한 요소 해석 결과

Fig. 8 Results of an adaptive finite element analysis using error estimate based on the continuity of magnetic flux and field.
(a) A refined mesh (b) Distribution of flux lines



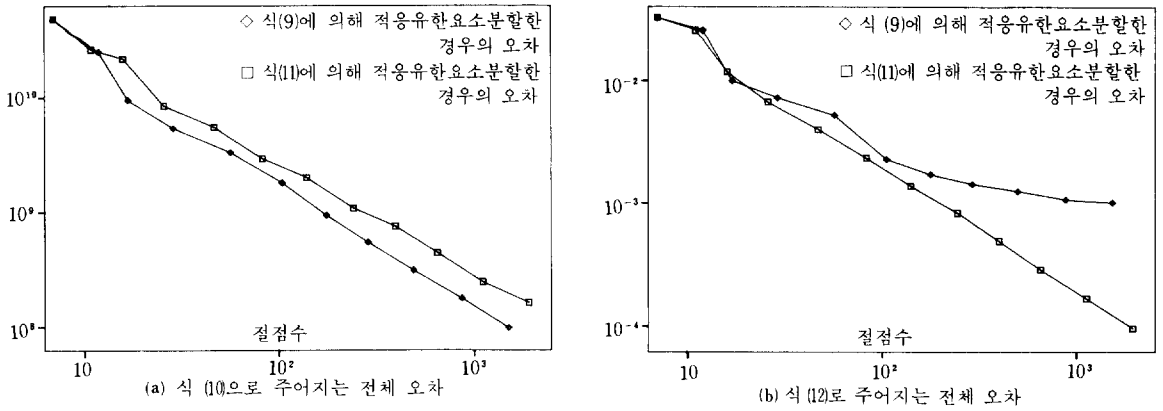
(a) 요소 분할도



(b) 자력선 분포

그림 9 자속 및 자계의 연속 조건에 기초한 추정 오차를 이용한 적응 유한 요소 해석 결과

Fig. 9 Results of an adaptive finite element analysis using error estimate based on the continuity of magnetic flux and field.
(a) A refined mesh (b) Distribution of flux lines



(a) 식 (10)으로 주어지는 전체 오차 (b) 식 (12)로 주어지는 전체 오차

그림 10 식 (9)및 식 (11)에 의한 오차 추정별 전체 오차 감소율

Fig. 10 Rates of convergence of total errors for error estimates based on eq. (9) and eq. (11) (a) total error given by eq. (10) (b) total error given by eq. (12)

분포를 보면 매우 유사함을 알 수 있다. 그림 10은 그림 8 및 그림 9의 경우에 있어서 전체 오차가 절점수 증가에 따라 감소하는 경향을 나타내고 있다. 식 (10)으로 주어지는 전체 오차는 오차 추정방법 에 따라 큰 변화가 없는데 식 (12)로 주어지는 전체 오차는 오차 추정법에 따라 크게 차이가 난다. 즉 식(9)에 의한 오차 추정의 경우는 전체 오차 수렴 속도가 매우 낮은데 이것은 자성체 내부의 투자율이 커서 자계의 세기가 매우 낮아지므로 공기 부분에 비해 상대적으로 전류 오차가 적어져 자성체 내부의 요소가 세분되지 않아 식 (12)로 주어지는 전체 오차는 감소되지 않기 때문이다. 그러므로 암페어의 주회법칙을 이용한 오차 추정방법은 전류를 중요시하는 문제 또는 투자율이 높은 자성체가 없는 문제에서 유용함을 알 수 있다.

5. 결 론

전자계를 유한 요소로 해석하는 경우 요소의 적응 분할에 필요한 오차 추정방법에 대하여 다루었다. 정전계의 경우는 발산 정리를 이용하였고 자계의 경우는 암페어의 주회법칙을 이용하였다. 본 방법은 현존하는 타 방법보다 오차 추정 알고리즘이 간단하여 응용하기가 매우 간편한 이점을 갖고 있다. 사례 연구를 통하여 유도된 알고리즘의 유용성을 검토한 결과 종래에 쓰이오던 적응 요소 분할법과 대체로 동등한 결과를 얻었다. 따라서 본 연구에서 얻어진 오차 추정 알고리즘은 실현하기가 매우 간단하므로 실제 문제에 매우 유효하게 이용될 수 있다고 생각된다.

끝으로 본 연구는 87년도 현대 연구비의 지원으로 이루어졌음을 알립니다.

참 고 문 헌

1) P. Silvester, "Finite element solution of homogeneous waveguide problems," Alta Frequenza, vol. 38, 1969

2) W. C. Thacker, "A brief review of technique for generating irregular computation grids," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.15, pp.1335-1341, 1980

3) C.F.Bryant, "Two dimensional automatic triangular mesh generation," IEEE Trans. on Magnetics, vol.MAG-21, no. 6, pp. 2547-2550, Nov., 1985

4) Z.J.Cendes and D.N.Shenton, "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic field," IEEE Trans. on Magnetics, vol.MAG-21, no.5, pp.1811-1816., Sep., 1985

5) Song-yop Hahn et al, "A posteriori error estimate for adaptive finite element mesh genera-

tion," IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-24, no.1, pp.315-317, Jan., 1988

6) M. Cecilia Rivara, "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 20, pp. 745-756, 2984